Н. А. Сахарников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Н. А. Сахарников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для естественных факультетов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1973

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

УДК 510.022

Высшая математика. Сахарников Н. А. Изд-во Ленингр. ун-та, 1973. 472 с.

Учебник содержит систематическое изложение основ математического анализа, аналитической геометрии и теории вероятностей. Теоретический материал иллюстрирован примерами из различных областей естествознания. Учебник написан на основе курса лекций по высшей математике, который читается автором в течение многих лет в Ленинградском университете.

Книга предназначена для студентов естественных факультетов университетов: химического, геологического, биолого-почвенного и географического. Кроме того, она может быть использована в педагогических институтах и технических вузах, в которых на курс высшей математики отводится до 500 часов.

С $\frac{0223-031}{076(02)-73}$ 113—73

© Издательство Ленинградского университета, 1973

САХАРНИКОВ
Николай Алексеевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Редактор *З. И. Царькова*
Техн. редактор *Л. И. Киселева*
Корректоры *Е. К. Терентьева, И. Л. Кудряшова*

М-05629. Сдано в набор 12/II 1973 г. Подписано к печати 14/VIII 1973 г. Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 3. Печ. л. 29,5. Уч.-изд. л. 28,24. Бум. л. 14,75. Тираж 25 000 экз. Заказ 114. Цена 1 р. 09 к.

Издательство ЛГУ им. А. А. Жданова. 199164. Ленинград, Университетская наб., 7/9.

Ленинградская типография № 6 «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 196006, г. Ленинград, Московский пр., 91.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Функции одной переменной**

§ 1. Функция 5
1. Множество (5). 2. Упорядоченное множество (7). 3. Математическая величина. Число (8). 4. Абсолютная величина вещественного числа (9). 5. Промежуток (10). 6. Постоянные и переменные величины (10). 7. Понятие функции (11). 8. Элементарные функции (13). 9. Алгебраические функции (16).

§ 2. Предел функции 16
10. Бесконечно малая функция (16). 11. Свойства бесконечно малых (19). 12. Бесконечно большая функция (21). 13. Предел функции (22). 14. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности (24). 15. Основные теоремы о пределах (25). 16. Один важный предел (28). 17. Число e. Натуральные логарифмы (29). 18. Задача (30). 19. Сравнение бесконечно малых (31). 20. Дополнительные сведения о пределах (32).

§ 3. Непрерывные функции 37
21. Понятие непрерывности функции в точке и в промежутке (37). 22. Классификация точек разрыва (39). 23. Свойства непрерывных функций (40). 24. Свойства функций, непрерывных в замкнутом промежутке (41). 25. Непрерывность обратной функции (43). 26. Еще три важных предела (45).

Глава II. **Производные и дифференциалы функции**

§ 4. Производная функции 46
27. Задачи, приводящие к понятию производной (46). 28. Понятие производной функции (49). 29. Основные правила дифференцирования (51). 30. Основные формулы дифференцирования (54). 31. Производные высших порядков (57).

§ 5. Основные теоремы дифференциального исчисления 58
32. Теорема Ферма (58). 33. Теорема Ролля (59). 34. Теорема Лагранжа (60). 35. Два дифференциальных уравнения (62). 36. Теорема Коши (62). 37. Раскрытие неопределенностей (63).

§ 6. Исследование функции 65
38. Условие постоянства функции. Условия монотонности функции (66). 39. Максимум и минимум функции (68). 40. Достаточные условия экстремума (70). 41. Задачи на экстремум (72). 42. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба (73). 43. Асимптоты (75). 44. Общая схема исследования функции (76). 45. Кривизна (77). 46. Касательная, нормаль и связанные с ними отрезки (80). 47. Приближенное вычисление вещественных корней уравнения (81).

§ 7. Дифференциал функции 84
48. Понятие дифференциала функции (84). 49. Свойства дифференциала (86). 50. Формулы приближенных вычислений (87). 51. Формула Тейлора (88). 52. Примеры (91). 53. Исследование функции на экстремум с помощью формулы Тейлора (92).

Глава III. **Элементы высшей алгебры**

§ 8. Комплексные числа. Функции комплексного переменного . . . 94
54. Три формы комплексного числа. Формулы Эйлера (94). 55. Примеры функций комплексного переменного (95). 56. Целые рациональные функции (97). 57. Дробные рациональные функции (100).

§ 9. Соединения. Определители 103
58. Элементы теории соединений (103). 59. Элементы теории определителей (105).

Глава IV. **Аналитическая геометрия на плоскости**

§ 10. Координаты на прямой и на плоскости 110
60. Вектор (110). 61. Направленный отрезок оси (112). 62. Координаты на прямой (112). 63. Основные теоремы теории проекций (113). 64. Координаты на плоскости (114). 65. Расстояние между двумя точками (116). 66. Преобразование декартовых координат (117). 67. Площадь треугольника (120).
§ 11. Уравнение линии 121
68. Геометрическое значение уравнения с двумя переменными (122). 69. Понятие уравнения линии (123). 70. Алгебраическая линия и ее порядок (124).
§ 12. Прямая линия 125
71. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (125). 72. Общее уравнение прямой (127). 73. Уравнение пучка прямых (128). 74. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (128). 75. Угол между двумя прямыми (129). 76. Задача о взаимном расположении двух прямых (131). 77. Нормальное уравнение прямой (133). 78. Расстояние от точки до прямой (134).
§ 13. Линия второго порядка 135
79. Окружность (135). 80. Эллипс и его уравнение (136). 81. Исследование формы эллипса (137). 82. Гипербола и ее уравнение (138). 83. Исследование формы гиперболы по ее уравнению (139). 84. Парабола (141). 85. Директрисы кривых второго порядка (142). 86. Полярное уравнение кривых второго порядка (144). 87. Исследование общего уравнения линий второго порядка (144).

Глава V. **Векторная алгебра**

§ 14. Линейные операции над векторами 148
88. Линейные операции и их свойства (148). 89. Декартова система координат в пространстве (149). 90. Разложение вектора по координатному базису (150). 91. Длина вектора, его направляющие косинусы и соотношения между ними (151). 92. Линейные операции над векторами, заданными своими проекциями (152).
§ 15. Некоторые нелинейные операции над векторами 153
93. Скалярное произведение и его основные свойства (153). 94. Угол между векторами. Условие ортогональности векторов (155). 95. Векторное произведение и его основные свойства (156). 96. Смешанное произведение и его основные свойства (158).

Глава VI. **Аналитическая геометрия в пространстве**

§ 16. Координаты в пространстве 160
97. Цилиндрическая и сферическая системы координат (160). 98. Задачи (161). 99. Геометрическое значение уравнения с тремя переменными (162). 100. Понятие уравнения поверхности. Алгебраическая поверхность (164).
§ 17. Плоскость в пространстве 165
101. Нормальное уравнение плоскости (165). 102. Общее уравнение плоскости (165). 103. Расстояние от точки до плоскости (167). 104. Уравнение связки плоскостей (167). 105. Угол между плоскостями (168).
§ 18. Прямая в пространстве 169
106. Общие уравнения прямой (169). 107. Канонические уравнения прямой (169). 108. Параметрические уравнения прямой (170). 109. Уравнения прямой, проходящей через две точки

(171). 110. Угол между двумя прямыми (171). 111. Угол между прямой и плоскостью (172). 112. Задача о взаимном расположении прямой и плоскости (172).
§ 19. Поверхности второго порядка 173
113. Эллипсоид (173). 114. Гиперболоид однополостной (174). 115. Гиперболоид двуполостной (175). 116. Параболоид эллиптический (175). 117. Параболоид гиперболический (176). 118. Конус второго порядка (178). 119. Цилиндры второго порядка (178).

Глава VII. **Функции нескольких переменных**

§ 20. Функция. Предел функции 179
120. Арифметическое n-мерное пространство (179). 121. Понятие функции нескольких переменных (181). 122. Понятие предела функции. Теория пределов (182). 123. Непрерывность функции нескольких переменных (183).
§ 21. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных 185
124. Понятие частной производной (185). 125. Обобщенная формула конечных приращений (187). 126. Дифференцирование сложной функции (187). 127. Дифференцирование неявной функции (189). 128. Теорема Эйлера об однородных функциях (191). 129. Частные производные высших порядков (192). 130. Полное приращение и полный дифференциал функции (193). 131. Элементы теории приближенных вычислений (195). 132. Касательная к пространственной кривой (197). 133. Касательная плоскость и нормаль к поверхности (198). 134. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных (200). 135. Формула Тейлора для функции нескольких переменных (200). 136. Экстремум функции нескольких переменных (201). 137. Условный, или относительный экстремум (204).
§ 22. Вопросы теории приближения функции 206
138. Интерполяционная формула Лагранжа (206). 139. О методе наименьших квадратов (207). 140. О равномерном приближении функции многочленом (209).

Глава VIII. **Неопределенный интеграл**

§ 23. Неопределенный интеграл. Общие способы его вычисления . . 211
141. Понятия первообразной функции и неопределенного интеграла (211). 142. Таблица основных интегралов (213). 143. Способ подстановки (215). 144. Способ интегрирования по частям (216). 145. Способ неопределенных коэффициентов (217).
§ 24. Интегрирование некоторых классов функций 217
146. Интегрирование рациональных функций (218). 147. Интегрирование некоторых иррациональных функций (220). 148. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений (222). 149. Интегрирование некоторых трансцендентных функций (224). 150. Задачи, приводящие к понятию неопределенного интеграла (225).

Глава IX. **Определенный интеграл. Несобственные интегралы**

§ 25. Определенный интеграл 228
151. Задачи, приводящие к определенному интегралу (228). 152. Понятие определенного интеграла (230). 153. Основная формула интегрального исчисления (232). 154. Свойства определенного интеграла (234). 155. Интеграл с переменным верхним пределом (239). 156. Способы вычисления определенного интеграла (240).

§ 26. Приложения определенного интеграла 246
157. Вычисление площади (246). 158. Вычисление объема (249). 159. Вычисление длины дуги (250). 160. Площадь поверхности вращения (251). 161. Статические моменты и координаты центра тяжести (252).
§ 27. Несобственные интегралы 255
162. Интеграл по бесконечному промежутку (255). 163. Интеграл от неограниченной функции (258). 164. Интегралы Эйлера (261).
§ 28. Интегралы, зависящие от параметра 262
165. Определенные интегралы, зависящие от параметра (262). 166. Несобственные интегралы, зависящие от параметра (265).

Глава X. **Кратные интегралы**

§ 29. Двойные интегралы 268
167. Задачи, приводящие к двойному интегралу (268). 168. Понятие двойного интеграла (270). 169. Свойства двойного интеграла (271). 170. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах (273). 171. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах (277). 172. Интеграл Эйлера — Пуассона (279). 173. Системы криволинейных координат на плоскости (280). 174. Вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах (283). 175. Приложения двойного интеграла (284).
§ 30. Тройные интегралы 285
176. Понятие тройного интеграла (285). 177. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах (287). 178. Системы криволинейных координат в пространстве (288). 179. Вычисление тройного интеграла в криволинейных координатах (292). 180. Приложения тройного интеграла в механике (294).

Глава XI. **Векторный анализ и теория поля**

181. Понятие поля (296).
§ 31. Скалярные и векторные поля 297
182. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня (297). 183. Производная по направлению (298). 184. Градиент скалярного поля (299). 185. Векторная функция скалярного аргумента (301). 186. Векторные линии и трубки (303).
§ 32. Криволинейные интегралы 304
187. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам (304). 188. Определение криволинейных интегралов, их свойства (305). 189. Вычисление криволинейных интегралов (308). 190. Формула Грина (311). 191. Условия независимости криволинейного интеграла от пути (313). 192. Потенциальное векторное поле (318).
§ 33. Поверхностные интегралы 320
193. Определение поверхностных интегралов, их свойства (320). 194. Поток вектора через поверхность (324). 195. Вычисление поверхностных интегралов (324). 196. Формула Остроградского (327). 197. Дивергенция вектора (328). 198. Соленоидальное векторное поле (330). 199. Формула Стокса (332). 200. Ротор вектора (334). 201. Безвихревые векторные поля(337).
§ 34. Дифференциальные операции теории поля и их выражение в различных системах координат 338
202. Дифференциальные операции второго порядка (338). 203. Выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах (340). 204. Выражение дивергенции в ортогональных криволинейных координатах (341). 205. Выражение оператора Лапласа в ортогональных криволинейных координатах (342). 206. Уравнение диффузии (343).

Глава XII. **Ряды**

§ 35. Числовые ряды 346
207. Основные понятия (346). 208. Основные свойства рядов (348). 209. Ряды с положительными членами (351). 210. Знакочередующиеся ряды (355). 211. Общие числовые ряды (357). 212. Ряды с комплексными членами (360).

§ 36. Функциональные ряды 361
213. Основные понятия. Признак Вейерштрасса (361). 214. Свойства равномерно сходящихся рядов (363). 215. Степенные ряды (367). 216. Ряд Тейлора (370). 217. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды (372). 218. Некоторые приложения степенных рядов (374). 219. Понятие о ряде Фурье (375). 220. Общие ортогональные системы функций (379). 221. Обобщенные ряды Фурье (381).

Глава XIII. **Обыкновенные дифференциальные уравнения**

§ 37. Дифференциальные уравнения первого порядка 386
222. Общие сведения о дифференциальных уравнениях (386). 223. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям (387). 224. Основные понятия (389). 225. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка (392).

§ 38. Дифференциальные уравнения высших порядков 395
226. Определения. Случаи понижения порядка (395). 227. Линейные дифференциальные уравнения (397). 228. Линейные однородные уравнения (398). 229. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (403). 230. Линейные неоднородные уравнения (406). 231. Метод нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений (407).

§ 39. Системы дифференциальных уравнений 408
232. Общие вопросы (408). 233. Способы интегрирования систем дифференциальных уравнений (410). 234. Некоторые методы интегрирования дифференциальных уравнений (412).

Глава XIV. **Теория вероятностей**

§ 40. Случайные события 418
235. Основные понятия теории вероятностей (418). 236. Основные теоремы (422).

§ 41. Случайные величины 427
237. Дискретная случайная величина и ее закон распределения (427). 238. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины (427). 239. Биноминальный закон распределения (431). 240. Интегральная функция распределения случайной величины и ее свойства (433). 241. Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства (435). 242. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины (437). 243. Нормальный закон распределения (438). 244. Закон больших чисел (439).

Глава XV. **Линейная алгебра**

§ 42. Определители 445
245. Понятие определителя любого порядка (445). 246. Свойство перестановок (446). 247. Основные свойства определителей (447). 248. Теорема умножения определителей (451).

§ 43. Системы линейных уравнений 453
249. Постановка вопроса (453). 250. Теорема Крамера (454). 251. Общий случай системы m уравнений с n неизвестными (455). 252. Однородные системы линейных уравнений (459).

Указатель литературы 461

Предметный указатель . . . . . —

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является учебником для студентов естественных факультетов университетов: химического, геологического, биолого-почвенного и географического. Она соответствует курсу высшей математики объемом до 500 учебных часов.

Отбор материала книги, его расположение и характер изложения определены задачами математического образования студентов на естественных факультетах университетов.

Математические методы исследования получили широкое распространение в естествознании, в связи с чем повысилось значение математической подготовки исследователей природы. Одна из задач состоит в том, чтобы учащийся овладел определенным запасом сведений по высшей математике (понятий, теорем, методов), необходимых ему для изучения наук, и научился применению этих знаний. Главная же задача состоит в развитии у учащегося точного научного мышления и, в частности, в повышении уровня логического мышления и математической культуры.

В соответствии с этим в книге соблюдается должный уровень как в отношении математической строгости рассуждений, так и в отношении простоты и ясности изложения.

Особое внимание автор стремился обратить на выявление конкретного содержания математических понятий и на методику применения математики в естествознании. С этой целью в книге помещены примеры и задачи из области естественных наук (физики, химии, механики, биологии и др.), иллюстрирующие понятия высшей математики и ее методы.

Книга содержит основы математического анализа, аналитической геометрии и теории вероятностей. Весь материал изложен в следующем порядке: функции одной переменной (глава I), производная и дифференциал функции (глава II), аналитическая

геометрия и векторная алгебра (главы IV, V, VI), функции нескольких переменных (глава VII), неопределенный интеграл (глава VIII), определенный интеграл и кратные интегралы (главы IX и X), векторный анализ и теория поля (глава XI), ряды (глава XII), обыкновенные дифференциальные уравнения (глава XIII), теория вероятностей (глава XIV), линейная алгебра (глава XV). В книге рассмотрены элементы высшей алгебры (главы III и XV), численные методы (главы VII, IX и XIII), элементы дифференциальной геометрии (главы II и VII) и начальные сведения о рядах Фурье (глава XII).

Книга написана на основе курса лекций по высшей математике, который читается автором в течение ряда лет в Ленинградском университете. Предложенное в книге расположение материала в основном соответствует этому курсу. Раннее введение производной (до аналитической геометрии) вызвано потребностью изучения смежных наук, прежде всего физики и химии; оно оказалось целесообразным и при изучении самой математики.

На некоторых факультетах изучается сокращенный курс высшей математики. В этом случае определенная часть материала книги может быть опущена без ущерба для понимания оставшейся части и без нарушения целостности курса.

Книга разбита на 15 глав, 43 параграфа и 252 пункта. Нумерация глав, параграфов и пунктов сплошная.

Автор приносит глубокую благодарность ответственному редактору книги проф. М. М. Смирнову и рецензентам проф. Я. С. Уфлянду и проф. Ю. С. Богданову за ряд предложений, способствующих значительному улучшению книги.

Автор благодарит всех лиц, принявших участие в обсуждении рукописи книги. При этом особую благодарность автор выражает преподавателю кафедры общей матетатики ЛГУ А. К. Пономаренко.

Глава I

ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. ФУНКЦИЯ

1. Множество. Одним из основных понятий математики является понятие множества. Это понятие первоначально, и его не определяют с помощью более простых понятий. Можно сказать, что множество — это семейство, совокупность, класс, система, собрание. Но такая замена одного слова другим не выясняет самую идею этого понятия. Ниже приведены примеры, поясняющие содержание понятия множества: 1) множество букв в данной книге, 2) множество страусов в Африке, 3) множество всех точек данной окружности, 4) множество всех правильных дробей, 5) множество корней данного уравнения, 6) множество натуральных чисел (т. е. целых положительных чисел), 7) множество атомов серебра в данной монете.

Объекты или предметы, составляющие данное множество, называются его *элементами*. Если x есть элемент множества A, то говорят, что x принадлежит A и записывают $x \in A$. Например, если A есть множество всех точек плоскости, а M — какая-нибудь из этих точек, то пишут $M \in A$.

Задать множество — это значит указать, из каких элементов оно состоит. Элементами множеств могут быть объекты любой природы (буквы, атомы, числа, страусы и т. д.). Однако каждое конкретное множество есть объединение элементов с каким-то общим признаком, общим свойством, которое иногда указывается в самом названии множества.

Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов (см. указанные выше примеры 1, 2, 7).

В математике допускаются к рассмотрению множества, число элементов которых равно единице, а также множество, вовсе не содержащее элементов — «пустое» множество.

Пример 1. Рассмотрим множество A окружностей, проходящих через данные точки. Если этих точек две, то A есть бесконечное множество. Если этих точек три и они не лежат на одной прямой, то имеется лишь одна окружность, проходящая через эти точки. Множество окружностей, проходящих через три данные точки, лежащие на одной прямой, не содержит ни одного элемента; это — пустое множество.

Множество A называется *подмножеством множества* B, если каждый элемент множества A является вместе с тем элементом множества B; в этом случае говорят, что A *содержится* в B, и обозначают это так: $A \subset B$, или $B \supset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что *множества* A *и* B *равны*, и записывают $A = B$. Например, множество $\{2, 3\}$ и множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ равны. Порядок расположения элементов в множестве безразличен.

Суммой множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B; она обозначается символом $A + B$, или $A \cup B$. Заметим, что если $A \subset B$, то $A + B = B$; в частности, $A + A = A$.

Разностью множеств A и B называется множество $A - B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат B.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, общих обоим множествам A и B; оно обозначается символом AB, или $A \cap B$.

Пример 2. Рассмотрим множество A всех студентов, присутствующих на данной лекции. Пусть A_1 — множество тех из них, кто моложе 20 лет, а A_2 — множество тех присутствующих на лекции студентов, рост которых больше 165 см. A_1 и A_2 есть подмножества множества A.

Сумма $A_1 + A_2$ есть множество, в которое войдут только все студенты моложе 20 лет и все студенты, рост которых больше 165 см.

Пересечение A_1A_2 есть множество всех студентов моложе 20 лет, рост которых больше 165 см.

Разность $A_1 - A_2$ есть множество студентов моложе 20 лет, рост которых не больше 165 см. Разность $A_2 - A_1$ есть множество студентов, рост которых больше 165 см и которые не моложе 20 лет.

Два множества A и B называются *эквивалентными*, если между этими множествами можно установить *взаимно-однозначное соответствие*. Это значит, что каждому элементу a множества A можно согласно некоторому правилу поставить в соответствие один и только один элемент b множества B, причем каждый элемент b из B окажется соотнесенным одному и только одному a из A. Эквивалентные множества обозначаются символом $A \sim B$.

Пример 3. Пусть A и B суть множества точек двух концентрических окружностей. Если сопоставить точки этих окружностей, лежащие на одном луче, исходящем из центра, то тем самым будет установлено взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B (рис. 1). Поэтому $A \sim B$. Если мы «распрямим» наши окружности, то одна из них превратится в более короткий прямолинейный отрезок. Казалось бы, что на более длинном отрезке точек «больше». Мы убедились, что это не так.

Пример 4. Пусть A — множество точек числовой оси и B — множество всех вещественных чисел. Эти множества эквивалентны. Вспомним, что числовой осью называется прямая, на которой выбраны направление, начальная точка и отрезок единичной длины. Числовая ось служит для изображения вещественных чисел. Из курса элементарной математики известно, что каждая точка M числовой оси имеет свою абсциссу x и что каждому вещественному числу x соответствует своя единственная точка M числовой оси. Это и значит, что множества A и B эквивалентны.

Пример 4 объясняет принятую в высшей математике условность языка — вместо слов «рассмотрим (возьмем, найдем) число x» можно сказать «рассмотрим (возьмем, найдем) точку x». Здесь как в первом, так и во втором случаях под x понимают число.

Бесконечное множество называется *счетным* (или исчислимым), если оно эквивалентно множеству натуральных чисел. Например, счетным является множество чисел $\{2n\}$. Можно доказать, что: 1) множество правильных дробей счетно, 2) множество чисел, удовлетворяющих условию $0 < x < 1$, не является счетным.

Говорят, что множество имеет мощность *континуума*, если оно эквивалентно множеству чисел, удовлетворяющих условию $0 < x < 1$.

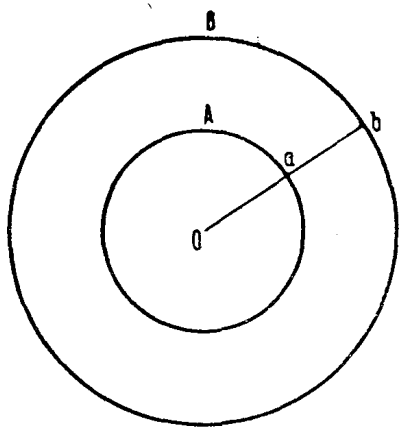

Рис. 1.

2. Упорядоченное множество. Множество A называется *упорядоченным*, если в нем введено отношение порядка между элементами. Это значит, что относительно любых двух элементов данного множества A известно, какой из них предшествует другому.

Пример. Любое множество вещественных чисел естественным образом упорядочивается, если расположить эти числа в порядке возрастания (или убывания). В геометрической форме этот пример можно представить так: любое множество точек на горизонтальной прямой упорядочивается, если из двух точек считать следующей ту, которая лежит правее (или левее).

Пусть A — счетное множество, среди элементов которого могут быть одинаковые. Сопоставим каждому элементу a из A свое натуральное число n и напишем это n в виде индекса у соответствующего элемента a; получим a_n. Примем число n за порядковый номер элемента a_n. *Упорядоченное счетное множество, элементы которого занумерованы и расположены в порядке возрастания номеров*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

называется последовательностью и обозначается символом $\{a_n\}$.

В частности, *числовой последовательностью* $\{x_n\}$ называется счетное числовое множество, элементы которого занумерованы и расположены в порядке возрастания номеров. При $n' > n$ член $x_{n'}$ следует за членом x_n независимо от того, будет ли само число $x_{n'}$ больше, меньше или даже равно x_n.

3. Математическая величина. Число. Одним из основных понятий высшей математики является понятие величины, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений. Понятие скалярной величины является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема, веса и т. п. Характерное свойство каждой конкретной величины состоит в том, что она может быть измерена путем сравнения с выбранной единицей измерения того же рода, что и измеряемая величина. Например, за единицу времени можно принять секунду, за единицу длины — метр и т. д. В результате измерения конкретной величины получается число, выражающее отношение рассматриваемой величины к величине, принятой за единицу меры. Каждой конкретной величине соответствует измеряющее ее число, которое зависит от выбора единицы меры. Таким образом, мы приходим к понятию *отвлеченного числа*.

Если измеряемая величина изменяется (например, при нагревании изменяется длина металлического стержня), то изменяется и соответствующее ей число. Заметим, что в традиционной математической терминологии говорить о «переменных числах» не принято. В подобных случаях говорят о переменной математической величине.

В более общем смысле слова под *математическими величинами* понимают не только числа, но и векторы, тензоры и т. д. (см. пп. 60 и 181).

Всякий закон природы дает соотношение между конкретными величинами или вернее между соответствующими им математическими величинами. Предметом исследования математики и являются как раз числа и другие математические величины и различные соотношения между ними независимо от конкретного характера тех величин или законов, которые привели нас к этим математическим величинам и соотношениям.

Числа, получающиеся в результате измерения, могут быть *целыми* (если единица содержится целое число раз в измеряемой величине), *дробными*, или *рациональными* (если измеряемая величина и единица измерения имеют общую меру) и, наконец, *иррациональными* (если такой общей меры нет).

Все рациональные и иррациональные числа (положительные и отрицательные) образуют множество *вещественных*, или *действительных*, *чисел*. В результате выполнения арифметических операций над вещественными числами (исключая деление на нуль) получаются числа вещественные.

Из курса элементарной математики известно, что всякое рациональное число можно представить в виде отношения двух целых чисел, а также в виде десятичной дроби — конечной или бесконеч-

ной периодической. Иррациональное же число так изобразить нельзя, но можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.

Между двумя любыми разными рациональными числами содержится одно рациональное число — полусумма этих чисел; следовательно, их содержится бесконечное множество. Между двумя любыми различными иррациональными числами также содержится бесконечное множество иррациональных чисел.

Примечание. В практике измерений можно обойтись без иррациональных чисел, потому что всякое иррациональное число можно приближенно представить с любой степенью точности соответствующим рациональным числом. Однако в теории, например при формулировке общих законов, иррациональные числа необходимы. Так, площадь круга равна πr^2, где π — иррациональное число.

4. Абсолютная величина вещественного числа. *Абсолютной величиной*, или *модулем* $|x|$, *вещественного числа* x называется само число x, если оно не отрицательно, или число $-x$, если оно отрицательно:

$$|x| = x \text{ при } x \geqslant 0, \quad |x| = -x \text{ при } x < 0. \tag{1}$$

Отсюда непосредственно следует, что при любом вещественном x имеют место неравенства

$$-|x| \leqslant \pm x \leqslant |x|. \tag{2}$$

Докажем несколько предложений об абсолютных величинах.

1°. *При любом положительном* ε *равносильны следующие неравенства*:

$$|x| < \varepsilon \text{ и } -\varepsilon < x < \varepsilon. \tag{3}$$

Действительно, из $|x| < \varepsilon$ согласно (2) следует, что одновременно $x \leqslant |x| < \varepsilon$ и $x > -\varepsilon$, так как $-x \leqslant |x| < \varepsilon$. Обратно, если дано, что $x < \varepsilon$ и $x > -\varepsilon$, то имеем одновременно $x < \varepsilon$ и $-x < \varepsilon$; но одно из чисел x или $-x$ и есть $|x|$, поэтому $|x| < \varepsilon$.

Аналогично доказывается равносильность неравенств $|x| \leqslant \varepsilon$ и $-\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon$.

Следствие. При любых вещественных a и $\varepsilon > 0$ равносильны неравенства

$$|x - a| < \varepsilon \text{ и } a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \tag{4}$$

Действительно, если обозначить $x - a = y$, то неравенства (4) примут вид $|y| < \varepsilon$ и $-\varepsilon < y < \varepsilon$. Но они равносильны согласно доказанному выше; поэтому равносильны и неравенства (4). Геометрическое истолкование неравенств (4) состоит в том, что каждое из них определяет множество точек числовой оси, ограниченное точками $a - \varepsilon$ и $a + \varepsilon$.

2°. *Абсолютная величина суммы вещественных чисел не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых*:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{5}$$

Доказательство. Если $x+y \geqslant 0$, то согласно (1) и (2) имеем $|x+y| = x+y \leqslant |x|+|y|$. Если же $x+y<0$, то $|x+y| = -(-x)+(-y) \leqslant |x|+|y|$.

3°. *Абсолютная величина разности вещественных чисел x и y не больше суммы абсолютных величин $|x|$ и $|y|$ и не меньше их разности*:

$$|x|-|y| \leqslant |x-y| \leqslant |x|+|y|. \tag{6}$$

Доказательство. 1) Если в неравенстве (5) заменить y на $-y$, то получим правую часть неравенства (6). 2) Представим x в виде суммы $x = (x-y)+y$ и согласно (5) получим $|x| \leqslant |x-y|+|y|$. Отсюда следует левая часть неравенства (6).

4°. Из определения непосредственно следуют равенства $|xy| = |x|\,|y|$ и $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ (последнее при $y \neq 0$).

5. Промежуток. В математическом анализе часто встречаются следующие числовые множества.

Множество всех чисел x, удовлетворяющих условию $a<x<b$, называется *открытым промежутком* (или интервалом) и обозначается символом (a, b).

Множество всех чисел x, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$, называется *замкнутым промежутком* (или отрезком) и обозначается символом $[a, b]$.

Встречаются также *полуоткрытые промежутки* $[a, b)$ и $(a, b]$. Множества чисел, удовлетворяющих условиям $x>a$ или $x<b$, обозначаются соответственно $(a, +\infty)$ и $(-\infty, b)$. Множество всех вещественных чисел обозначается символом $(-\infty, +\infty)$ или $|x|<+\infty$. Все указанные множества называются *промежутками*.

Любой открытый промежуток (α, β), содержащий точку x_0, называется *окрестностью точки x_0*. В частности, *ε-окрестностью точки x_0* называется промежуток $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, т. е. множество чисел, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\varepsilon$, где $\varepsilon>0$.

6. Постоянные и переменные величины. Математические величины бывают только двух видов — постоянные и переменные.

Величина называется *постоянной*, если она сохраняет одно и то же значение либо независимо от условий задачи, либо лишь в определенных условиях. Постоянные, сохраняющие неизменное значение независимо от условий, называются *абсолютно постоянными*. Например, отношение длины любой окружности к ее диаметру есть абсолютно постоянная величина, равная π. Величины, постоянные лишь в определенных условиях (в условиях рассматриваемой задачи), называются *параметрами*. *

---

* Параметрами называются также вспомогательные переменные.

Переменной величиной, или просто *переменной*, называется всякая математическая величина, которая может принимать различные числовые значения в рассматриваемом явлении (вопросе, процессе, исследовании). Например, угол наклона к вертикали колеблющегося маятника есть величина переменная.

В математике постоянную величину часто рассматривают как частный случай переменной величины, все значения которой равны между собой. Например, длина радиус-вектора r переменой точки линии l есть, вообще говоря, величина переменная. Если же l — окружность с центром в начале, то r — постоянная величина (рис. 2).

Важной характеристикой переменной величины является область ее изменения. *Областью изменения переменной величины* называется множество всех значений этой величины.

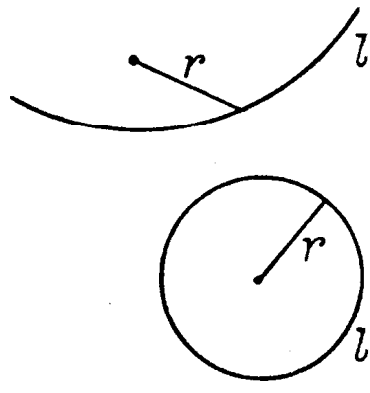

Рис. 2.

Пример 1. Если температура воздуха в данной точке пространства меняется в течение суток между значениями 18 и 25 °С, то областью изменения температуры является промежуток (18, 25).

Пример 2. Число жителей данного города есть переменная величина, которая может принимать только целые положительные значения. Например, в прошлом году число жителей города N изменилось от n_1 до n_2. Этот пример показывает, что областью изменения переменной может быть множество, состоящее из целых чисел.

7. Понятие функции. В математике и ее приложениях часто приходится иметь дело не с одной переменной, а сразу с несколькими переменными, которые взаимно связаны. Например, при изменении радиуса изменяется площадь соответствующего круга, причем эти переменные связаны зависимостью $s = \pi r^2$.

В общем случае пусть имеются две переменные x и y, принимающие вещественные значения. Пусть областью изменения переменной x является некоторое множество X.

Определение 1. *Переменная y называется функцией переменной x, определенной на множестве X (или в области X), если каждому значению x (из множества ее возможных значений X) соответствует определенное значение y.* Переменная x называется независимой переменной, или аргументом.

Обозначение функции $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = y(x)$ и т. п. введено Эйлером в 1748 г.; термин «функция» введен Лейбницем в 1692 г. Для обозначения частного значения функции, например $f(x)$ в точке x_0, употребляется символ $f(x_0)$.

В этом определении существенны два момента: во-первых, указание области X изменения аргумента x — ее называют *областью*

определения функции, и, во-вторых, установление правила или закона соответствия между значениями x и y. Задать функцию — это значит задать закон соответствия и область определения функции.

Закон соответствия может быть задан правилом какой угодно природы. Наиболее важным для математического анализа является задание этого правила в виде *аналитического выражения* или формулы, содержащей указание на те операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо выполнить, чтобы получить соответствующее значение y.

Пример 1. Если функция $y = x^2$ определена в промежутке $(-1, 2)$, то областью изменения функции является промежуток $[0, 4]$.

Пример 2. Рассмотрим свободное падение тяжелой точки с высоты h над поверхностью земли. Путь, пройденный при этом телом, есть функция времени $s = 0{,}5gt^2$, определенная для каждого значения t из промежутка $0 \leqslant t \leqslant T$, где $T = \sqrt{2h/g}$. Промежуток $[0, T]$ есть область определения функции. Областью изменения функции является промежуток $[0, h]$. Заметим, что формула $s = 0{,}5gt^2$ позволяет вычислить s при любых значениях t. Однако в условиях примера нелепо рассматривать значения $t < 0$ или пользоваться этой формулой при $t > T$.

Различают: 1) область определения функции — она определяется из чисто теоретических или прикладных соображений, но всегда исходя из существа рассматриваемого вопроса, и 2) естественную область определения функции $f(x)$, заданной аналитически (называемую также *областью допустимых значений*, сокращенно — о. д. з.), т. е. множество значений независимой переменной x, при которых величина $f(x)$ принимает вещественные значения.

В примере 2 о.д.з. для аналитического выражения $0{,}5gt^2$ — это вся числовая ось $(-\infty, +\infty)$. Аналитическое выражение $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ имеет о. д. з. $|x| \leqslant a$, а $y = \log_a x$ имеет о. д. з. $x > 0$.

Пример 3. Периметр p_n правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, есть функция числа n: $p_n = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$. Здесь область определения функции есть множество натуральных чисел, не меньших числа три.

В качестве области определения функции чаще всего встречаются либо промежуток (конечный или бесконечный), либо множество натуральных чисел.

Пример 4. Функция Дирихле определена в промежутке $(0,1)$ равенствами

$y = 0$, если x — иррациональное число,

$y = 1$, если x — рациональное число.

Пример 5. Функция $y = E(x)$ (entier — целый). Закон соответствия задан правилом: $E(x)$ есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $E(-2{,}5) = -3$, $E(1{,}4) = E(1) = 1$. График этой функции изображен на рис. 3 (точки, помеченные звездочкой, графику не принадлежат).

Наглядным способом представления функции служит ее график. *Графиком функции* $y = f(x)$ называют множество всех точек плоскости, координаты которых x и y удовлетворяют соотношению $y = f(x)$. Например, графиком линейной функции $y = ax + b$ служит прямая линия.

Важную роль в математике играют *функции натурального аргумента*, т. е. функции, определенные на множестве натуральных чисел: $y = f(x)$, где $x = n$. Значения такой функции обычно обозначают так: $f(n) = y_n$. Множество значений функции натурального аргумента, расположенных в порядке возрастания аргумента n, образует числовую последовательность $\{y_n\}$. Например, в случае $\{n^2\}$ имеем $y_1 = 1$, $y_2 = 4$, $y_3 = 9$, . . .

Вернемся к определению понятия функции. Если каждому значению x из множества X соответствует не одно, а несколько значений y, то y называется *многозначной функцией* x в отличие от определенной выше *однозначной функции*. В дальнейшем, говоря о функции, мы будем иметь в виду только однозначные функции.

Понятие функции есть одно из основных понятий математического анализа. Его можно понимать в следующем более широком смысле.

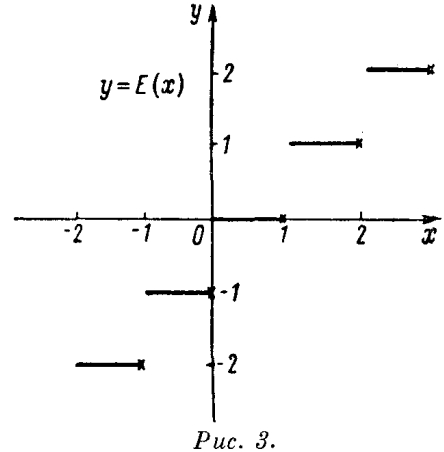

Рис. 3.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть даны два произвольных множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, обозначаемый $f(x)$, и если каждый элемент $y \in Y$ при этом оказывается поставленным в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, то говорят, что *на множестве* X *задана функция* $y = f(x)$. Множество X называется областью ее определения (или областью задания), а множество Y — областью ее изменения. Элемент $x \in X$ называется аргументом, или независимой переменной, а элемент y — образом элемента x.

Функцию в смысле определения 2 называют также *оператором* (определенным на множестве X), *преобразованием*, или *отображением* (множества X на множество Y). Если X и Y — числовые множества, то чаще пользуются термином «функция». Оператор, отображающий множество X на числовое множество Y, называется *функционалом*.

8. Элементарные функции. Перечислим некоторые классы функций, получивших название элементарных.

1. *Целая рациональная функция*, или *многочлен*:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

где a_0, a_1, . . ., a_n — числа, называемые коэффициентами; n — натуральное число, называемое степенью многочлена. Эта функция определена при всех значениях x.

Пример 1. $y = ax + b$ — *линейная функция*. Ее график есть прямая линия. При $b = 0$ линейная функция $y = kx$ выражает пропорциональную зависимость y от x; в этом случае ее график проходит через начало координат.

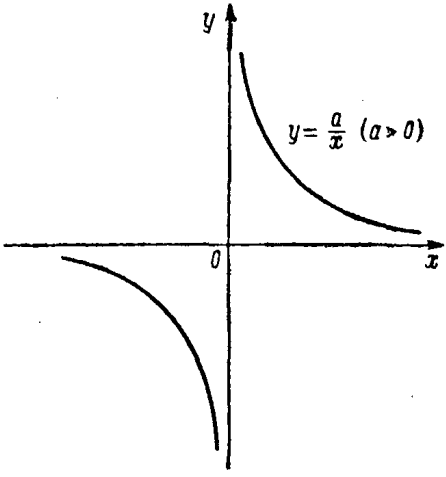

Рис. 4.

Пример 2. $y = ax^2 + bx + c$ — квадратичная функция. Ее график есть парабола, ось симметрии которой параллельна оси ординат (см. п. 66).

2. *Дробная рациональная функция* определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}.$$

Эта функция определена при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль. Дробной рациональной функцией является, например, функция $y = a/x$, выражающая обратную пропорциональную зависимость между x и y; ее график есть гипербола (см. пп. 66 и 82), изображенная на рис. 4.

3. *Степенная функция* $y = x^\alpha$, где α — вещественное число. При целом α получается рациональная функция. При $\alpha = 1/n$,

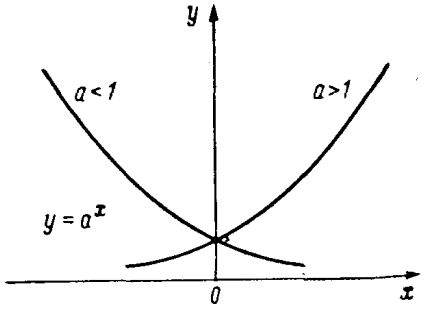

Рис. 5.

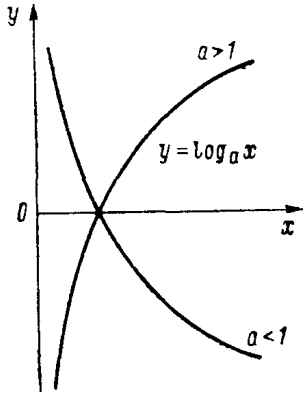

Рис. 6.

где n — натуральное число, $y = \sqrt[n]{x}$. Степенная функция в вещественной области определена при всех $x > 0$, а также при $x < 0$, если α рационально, несократимо и с нечетным знаменателем. При $\alpha \geqslant 0$ степенная функция определена в точке $x = 0$.

Примеры степенных функций: 1) $y=\sqrt{x}$ при $x\geqslant 0$, 2) $y=1/x$ при $x\neq 0$, 3) $y=\sqrt[3]{x}$ при любых вещественных x.

4. *Показательная функция* $y=a^x$, где a — положительное число, не равное единице. Эта функция определена на всей вещественной оси. Ее график изображен на рис. 5.

5. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$, где положительное число a не равно единице. Эта функция определена при $x>0$. Ее график изображен на рис. 6.

6. *Тригонометрические функции* $y=\sin x$ и $y=\cos x$ определены при всех вещественных значениях x; $y=\operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x=0$; $y=\operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x=0$. Заметим, что в тригонометрических функциях переменная x выражается в радианах (если не оговорено противное).

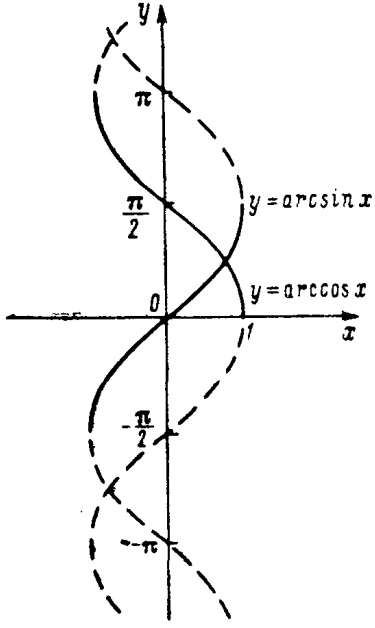

Рис. 7.

7. *Обратные тригонометрические функции*: а) $y=\arcsin x$. Здесь y есть переменная из промежутка $-\pi/2\leqslant y\leqslant \pi/2$, синус

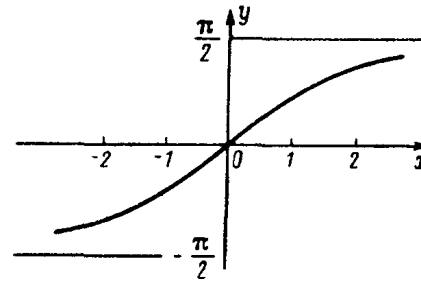

Рис. 8.

которой равен x, т. е. $x=\sin y$. Областью определения функции служит промежуток $-1\leqslant x\leqslant 1$. График этой функции изображен на рис. 7 сплошной линией.

б) Функция $y=\arccos x$ есть переменная, косинус которой равен x, т. е. $x=\cos x$, причем $|x|\leqslant 1$ и $0\leqslant y\leqslant \pi$.

в) Функция $y=\operatorname{arctg} x$ есть переменная, тангенс которой равен x, т. е. $x=\operatorname{tg} y$, причем $|x|<\infty$ и $|y|<\pi/2$ (рис. 8).

г) $y=\operatorname{arcctg} x$ означает, что $x=\operatorname{ctg} y$, где $|x|<\infty$ и $0<y<\pi$.

Сложная функция. Пусть даны две функции: $y=f(x)$, определенная в промежутке $a<x<b$, и $x=\varphi(t)$, определенная в промежутке $\alpha<t<\beta$. Предположим, что при изменении t в промежутке (α, β) переменная $x=\varphi(t)$ принимает значения в промежутке (a, b), т. е. если $t\in(\alpha, \beta)$, то $x\in(a, b)$. Наше предположение можно сформулировать короче: область

изменения функции $x = \varphi(t)$ принадлежит области определения функции $y = f(x)$.

При этом условии каждому t из (α, β) естественным образом соответствует такое y, что $y = f(x)$, где $x = \varphi(t)$. Эта функция, определяемая соответствием $y = f(\varphi(t))$, называется *сложной функцией*, или *суперпозицией функций* $f(x)$ и $\varphi(t)$.

Пример 1. Если $y = \sin x$ в промежутке $1 < x < 5$, а $x = 1 + t^2$ в промежутке $0 < t < 2$, то $y = \sin(1 + t^2)$ есть сложная функция независимой переменной t, определенная в промежутке $0 < t < 2$.

Пример 2. Если $y = 2 \lg x$ при $x > 0$ и $x = 10^t$ при $|t| < +\infty$, то сложная функция $y = 2 \lg 10^t$ или $y = 2t$ определена при $|t| < +\infty$.

Последний пример показывает, что термин «сложная функция» относится не к существу функции, а к способу ее задания.

Определение 3. Все функции, которые получаются из указанных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и операции функции от функции, примененных конечное число раз, тоже называются *элементарными функциями*. Например, $y = \sin^3 x$, $y = \log_a(1 + x^2)$ — функции элементарные.

9. Алгебраические функции. *Алгебраической функцией* называется функция, которая может быть задана с помощью суперпозиций конечного числа рациональных функций и степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий. Например, $y = x^2 + 1$ и $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$ суть алгебраические функции.

Алгебраическая функция, в состав аналитического выражения которой входит степенная функция с нецелым показателем и которая не является рациональной функцией, называется *иррациональной функцией*. Пример иррациональной функции: $y = \sqrt{x}$.

К числу алгебраических функций относятся рациональные функции (как целые, так и дробные) и иррациональные функции.

Всякая неалгебраическая функция называется *трансцендентной функцией*. Например, трансцендентными являются логарифмическая, показательная и тригонометрическая функции.

§ 2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

10. Бесконечно малая функция. Рассмотрим прежде всего следующие примеры функций:

$$y = x - a, \quad y = (x - a)^2, \quad y = \sin(x - a)$$

при значениях x, близких к a (рис. 9). Графики этих функций либо пересекают ось абсцисс, либо касаются ее в точке a. В случае $y = (x - a)^2$ график расположен в области положительных ординат и только в точке a касается оси абсцисс. В других случаях графики пересекают ось абсцисс и ординаты принимают значения разных знаков по обе стороны точки a.

Что можно сказать о значениях функции (не о графике) в этих случаях? Ответ: значения функции сколь угодно малы по абсолютной величие, если соответствующие значения аргумента достаточно близки к a.

Отвлекаясь от примеров, мы приходим к следующей предварительной формулировке понятия бесконечно малой функции. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой при стремлении x к a*, если ее значения сколь угодно малы по абсолютной величине при всех значениях x, достаточно близких к a.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться такими оборотами речи: «значения функции сколь угодно малы по абсолютной величине», «переменная x принимает значения, достаточно близкие к a». Выясним их точный смысл.

Часть фразы «значения функции $\alpha(x)$ сколь угодно малы по абсолютной величине» будем понимать в том смысле, что неравенство

$$|\alpha(x)|<\varepsilon \qquad (1)$$

выполняется для каждого наперед заданного положительного числа ε, как бы мало оно ни было.

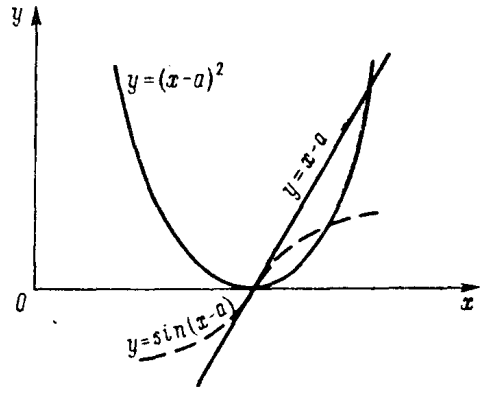

Рис. 9.

Часть фразы «значения аргумента достаточно близки к a» или «значения аргумента достаточно мало отличаются от числа a» следует понимать в том смысле, что неравенство

$$|x-a|<\delta \qquad (2)$$

выполняется для некоторого положительного числа δ (т. е. для достаточно малого δ). Число δ является достаточно малым, если для всех значений x из промежутка (2) выполняется условие (1) при заданном ε.

Определение 1. Пусть функция $\alpha(x)$ определена в некоторой окрестности X точки a, за исключением, может быть, самой точки a. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при стремлении x к a, если для каждого положительного* ε (как бы мало оно ни было) *существует соответствующее положительное число* δ *такое, что выполняется неравенство*

$$|\alpha(x)|<\varepsilon$$

для каждого x, удовлетворяющего условию

$$0<|x-a|<\delta. \qquad (3)$$

В этом случае переменную $\alpha(x)$ называют также *бесконечно малой величиной*, или просто *бесконечно малой*. Тот факт, что $\alpha(x)$

Гос. публичная научно-техническая библиотека СССР ОКЗЕМПЛЯР

является бесконечно малой при стремлении x к a, записывают символически так:

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \text{ или } \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to a$$

и читают: функция $\alpha(x)$ стремится к нулю или имеет своим пределом нуль при стремлении x к a *.

Для правильного понимания определения понятия бесконечно малой функции полезны следующие пояснения.

1. В точке a функция $\alpha(x)$ может быть не определена. В определении бесконечно малой значение функции $\alpha(a)$ не участвует.

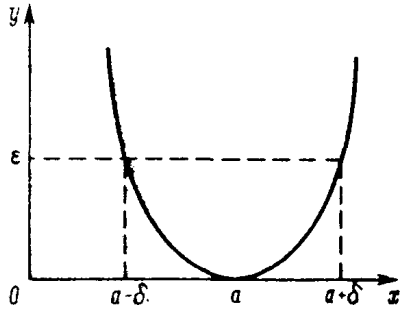

Рис. 10.

2. Неравенство (1) должно выполняться для всех положительных чисел ε. Для того чтобы функция $\alpha(x)$ была бесконечно малой, необходимо согласно определению мысленно перебрать все положительные числа ε и убедиться в выполнении неравенства (1) для каждого ε при соответствующих значениях аргумента x.

3. Если ε фиксировано, то неравенство (1) не обязательно выполняется при всех x из множества X, а лишь при тех из них, которые удовлетворяют неравенству (3) при соответствующем значении δ. Каждому фиксированному $\varepsilon > 0$ должно соответствовать свое значение $\delta > 0$. Поэтому δ зависит от ε, что можно выразить символически $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример. Выясним зависимость δ от ε на примере бесконечно малой функции $y = (x - a)^2$ при стремлении x к a; графиком этой функции является парабола (рис. 10). Положим, например, $\varepsilon_1 = 1/4$, и найдем значения x, при которых выполняется неравенство $(x - a)^2 < 1/4$. Это неравенство равносильно следующему: $|x - a| < 1/2$ или $a - 1/2 < x < a + 1/2$. Поэтому в качестве числа δ можно взять $\delta_1 = 1/2$ или любое положительное число, меньшее δ_1. Положим затем $\varepsilon_2 = 1/100$ и найдем δ_2 из неравенства $(x - a)^2 < 1/100$, которое равносильно $|x - a| < 1/10$ и поэтому $\delta_2 \leqslant 1/10$.

В общем случае фиксируем любое положительное ε и находим соответствующее δ из условия $(x - a)^2 < \varepsilon$, которое равносильно $|x - a| < \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому в качестве числа δ можно взять $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ или любое положительное число, меньшее $\sqrt{\varepsilon}$.

Для геометрического истолкования примера рассмотрим график функции $y = (x - a)^2$ и его произвольную точку $M(x, y)$. Если абсцисса x удовлетворяет условию (3), т. е. принадлежит δ-окрестности точки a, но $x \neq a$, то ордината y этой точки удовлетворяет условию (1), т. е. принадлежит ε-окрестности точки $y = 0$. Короче, если $0 < |x - a| < \delta$, то график функции не выходит за пределы полосы $0 \leqslant y \leqslant \varepsilon$ (рис. 10).

---

* Общее понятие предела дано в пп. 13 и 20.

4. В определении бесконечно малой функции говорится о существовании числа δ и не требуется, чтобы был указан способ вычисления δ по данному ε.

5. Ни одна из постоянных величин (кроме $\alpha = 0$), как бы мала она ни была по абсолютной величине, не является бесконечно малой, так как она не удовлетворяет условию (1). Постоянная $\alpha = 0$ является бесконечно малой в силу определения бесконечно малой.

6. Термин «бесконечно малая» относится к характеру изменения переменной, а не к ее «размерам». Так, вес льда айсберга, перемещающегося к экватору, может иметь весьма большие промежуточные значения. Однако при стремлении t к t_0, где t_0 — момент полного растаивания льда, этот вес неограниченно приближается к нулю и поэтому является величиной бесконечно малой.

Следствие. Из определения 1 следует, что величины $\alpha(x)$ и $|\alpha(x)|$ вместе являются (или не являются) бесконечно малыми. Действительно, неравенства $|\alpha(x)| < \varepsilon$ и $||\alpha(x)|| < \varepsilon$ вместе выполняются (или не выполняются).

В связи с рассмотрением понятия бесконечно малой функции сформулируем понятие предельной точки множества. Пусть Z есть данное числовое множество. *Точкой сгущения, или предельной точкой числового множества* Z, называется точка z_0, в любой окрестности которой имеются точки множества Z, отличные от z_0. Заметим, что точка z_0 может не принадлежать множеству Z.

Пример 1. Пусть Z — множество чисел, удовлетворяющих условию $a < x < b$. Каждая точка промежутка $a \leqslant x \leqslant b$ является предельной точкой данного множества. Действительно, в любой ε-окрестности, например, точки a, т. е. в промежутке $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, имеются точки данного множества.

Пример 2. Пусть Z — множество правильных положительных дробей. Можно доказать, что каждая точка промежутка $0 \leqslant x \leqslant 1$ (в том числе и иррациональная) является точкой сгущения данного множества.

Пример 3. Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при стремлении x к a, причем X — область определения функции и Y — область ее изменения. Тогда согласно определению 1 число a является точкой сгущения множества X, а число $y = 0$ — предельной точкой множества Y.

11. Свойства бесконечно малых. Здесь будет доказано, что в результате некоторых алгебраических операций над бесконечно малыми получаются опять бесконечно малые.

Теорема 1. *Сумма двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.*

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ функции, определенные в некоторой окрестности X точки a. Под суммой функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ будем понимать функцию $\alpha(x) + \beta(x)$, которая в любой точке x_0 из X принимает значение, равное сумме значений $\alpha(x_0)$ и $\beta(x_0)$. Требуется доказать, что $[\alpha(x) + \beta(x)] \to 0$ при $x \to a$.

Доказательство. Фиксируем любое положительное число ε. По условию α есть бесконечно малая, и поэтому существует

такое $\delta_1 > 0$, что при условии $0 < |x-a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$. По условию β есть бесконечно малая, и поэтому существует такое число $\delta_2 > 0$, что при условии $0 < |x-a| < \delta_2$ выполняется неравенство $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$.

При условии $0 < |x-a| < \delta$, где δ — наименьшее из чисел δ_1 и δ_2, выполнены неравенства $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ и вместе с ними неравенство

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, установлено, что любому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что имеет место неравенство $|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$ при условии $0 < |x - a| < \delta$. Теорема доказана.

Примечание. Теорема верна для алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, что доказывается аналогично.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если существует число $M > 0$ такое, что для каждого x из X имеет место неравенство

$$|f(x)| \leqslant M. \tag{4}$$

Например, функция $\sin x$ ограничена в любом промежутке, так как $|\sin x| \leqslant 1$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной при стремлении* x *к* a, если существуют числа M и δ_1 такие, что выполняется неравенство (4) при условии $0 < |x - a| < \delta_1$. Например, любая бесконечно малая $\alpha(x)$ при стремлении x к a есть величина ограниченная. Действительно, роль числа M играет любое фиксированное $\varepsilon_1 > 0$, так как по определению бесконечно малой выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon_1$ при условии $0 < |x - a| < \delta_1$.

Теорема 2. *Произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая.*

Дано: 1) функция $f(x)$ ограничена при стремлении x к a, т. е. на множестве, определяемом условием $0 < |x - a| < \delta_1$, выполнено неравенство (4), 2) $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

Требуется доказать, что

$$\lim_{x \to a} f(x)\alpha(x) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По второму условию теоремы числу $\frac{1}{M}\varepsilon$ соответствует $\delta_2 > 0$ такое, что выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \frac{1}{M}\varepsilon$ при условии $0 < |x-a| < \delta_2$.

Если $0 < |x-a| < \delta$, где δ — наименьшее из δ_1 и δ_2, то выполнены неравенства $|f(x) \leqslant M$ и $|\alpha(x)| < \frac{1}{M}\varepsilon$, а вместе с ними

и неравенство $|f(x)\alpha(x)|<\varepsilon$, так как $|f(x)\alpha(x)|=|f(x)|\,|\alpha(x)|<$ $<M\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$.

Следствие 1. Произведение постоянной c на бесконечно малую $\alpha(x)$ есть величина бесконечно малая: $\lim\limits_{x\to a} c\,\alpha(x)=0$.

Действительно, это равенство получается из (5) при $f(x)\equiv c$.

Следствие 2. Произведение двух бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть величина бесконечно малая: $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\,\beta(x)=0$.

Действительно, бесконечно малая $\beta(x)$ при стремлении x к a есть величина ограниченная, поэтому можно положить в формуле (5) $f(x)\equiv\beta(x)$, что и приводит к цели. В частности, если $\beta(x)\equiv$ $\equiv\alpha(x)$, то имеем $\lim\limits_{x\to a}\alpha^2=0$.

Целая положительная степень бесконечно малой тоже есть величина бесконечно малая: $\lim \alpha^n=0$, что можно доказать методом индукции.

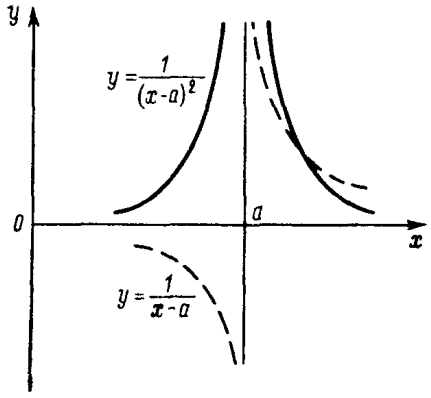

Рис. 11.

12. Бесконечно большая функция. Рассмотрим графики функций $y=(x-a)^{-1}$ и $y=(x-a)^{-2}$ в окрестности точки a, за исключением самой точки a, где эти функции не определены (рис. 11). Относительно значений этих функций можно сказать, что они сколь угодно велики по абсолютной величине, если соответствующие значения аргумента достаточно близки к a. Часть фразы «значения функции сколь угодно велики по абсолютной величине» следует понимать в том смысле, что для каждого положительного числа E, как бы велико оно ни было, выполняется неравенство $|f(x)|>E$.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности X точки a, за исключением, может быть, самой точки a. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при стремлении x к a*, а если для каждого положительного числа E (как бы велико оно ни было) существует соответствующее положительное число δ такое, что выполняется неравенство $|f(x)|>E$ для всех значений x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$.

Тот факт, что $f(x)$ является бесконечно большой функцией при стремлении x к a, записывают символически $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ и читают: $f(x)$ стремится к бесконечности при стремлении x к a.

В частности, если при этом $f(x)$ положительна в некоторой окрестности точки a, то говорят, что $f(x)$ *стремится к плюс бесконечности*, и записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. Аналогично, если

бесконечно большая $f(x)$ отрицательна в некоторой окрестности точки a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Пример. Функция $\operatorname{tg} x$ стремится к $-\infty$ при стремлении x к $x_0 = \frac{\pi}{2}$ справа, т. е. со стороны значений x, больших x_0, а при стремлении x к x_0 слева (т. е. при $x < x_0$) $\operatorname{tg} x$ стремится к $+\infty$. Принята следующая форма записи в подобных случаях:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

Примечания. 1. Бесконечность (∞) не число, а символ, который употребляется, например, для того, чтобы указать, что соответствующая переменная есть бесконечно большая величина.

2. Бесконечно большая при $x \to a$ величина $f(x)$ не имеет при этом предела, потому что под пределом переменной понимается некоторое число, а символ ∞ не является числом.

Ниже помещены две теоремы о связи между бесконечно большой и бесконечно малой функциями.

Теорема 1. *Переменная, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая.*

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Доказательство. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и обозначаем $\frac{1}{\varepsilon} = E$. По условию переменная $f(x)$ — бесконечно большая при стремлении x к a, поэтому числу E соответствует $\delta > 0$ такое, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > E = \frac{1}{\varepsilon}$, а вместе с ним и неравенство $\left|\frac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$.

Теорема 2. *Если бесконечно малая не обращается в нуль, то обратная ей величина есть бесконечно большая.*

Пусть $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$.

Доказательство. Фиксируем любое $E > 0$ и обозначаем $\frac{1}{E} = \varepsilon$. По условию $\alpha(x)$ — бесконечно малая при стремлении x к a, поэтому числу $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ выполняются неравенства $|\alpha(x)| < \varepsilon = \frac{1}{E}$ и $\frac{1}{|\alpha(x)|} > E$. Отсюда следует заключение теоремы 2.

13. Предел функции. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности X точки a, за исключением, может быть, самой точки $x = a$.

Определение 3. *Пределом функции $f(x)$ при стремлении x к a называется число b такое, что разность $f(x) - b$ есть величина бесконечно малая при стремлении x к a.*

Если число b является пределом $f(x)$ при стремлении x к a, то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, или $f(x) \to b$ при $x \to a$ и читают: переменная $f(x)$ стремится к b при стремлении x к a.

Это определение опирается на понятие бесконечно малой. Можно сформулировать определение предела функции без ссылки на бесконечно малую. Обозначим $f(x) - b \equiv \alpha(x)$. В соответствии с определением 3 постоянная b является пределом функции $f(x)$ при стремлении x к a, если функция $\alpha(x)$ при этом бесконечно малая. Сформулируем это предложение на «языке ε, δ» и придем к следующему определению предела функции, эквивалентному определению 3.

Определение 4. *Число b называется пределом функции $f(x)$ при стремлении x к a, если для каждого положительного числа ε существует соответствующее положительное число δ такое, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство*

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{6}$$

Заметим, что в точке $x = a$ функция $f(x)$ может быть не определена. Но если она определена при $x = a$ и имеет значение $f(a)$, то это значение функции не окажет влияния ни на факт существования предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, ни на величину предела функции. Это объясняется тем, что в определении предела функции значение $f(a)$ не участвует, что указано в условии $|x - a| > 0$, т. е. $x \neq a$.

Если Y — область изменения рассматриваемой функции, то b есть точка сгущения множества Y.

Если неравенство (6) выполняется при условии $0 < x - a < \delta$, то число b называется *пределом справа* и обозначается символом $b = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, или $f(a+0)$. Аналогично при условии $0 < a - x < \delta$ имеем *предел слева* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$. В этих случаях пределы называются *односторонними*. Если само $a = 0$, то вместо $0 + 0$ $(0 - 0)$ пишут просто $+0$ (-0).

Геометрическая иллюстрация предела функции. Рассмотрим график (рис. 12) функции $f(x)$ в промежутке изменения y, определяемом неравенством $b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$. Прямые, проходящие через точки оси ординат $y_1 = b - \varepsilon$ и $y_2 = b + \varepsilon$ параллельно оси абсцисс, пересекают график только в точках A и B, проектируя которые на ось абсцисс получим точки $x_1 = a - \delta_1$ и $x_2 = a + \delta_2$. Выберем наименьшее из чисел δ_1 и δ_2 и, обозначив его через δ, рассмотрим промежуток $a - \delta < x < a + \delta$ (с исключенной точкой a). Проведем прямые, параллельные оси ординат, через точки оси абсцисс $a - \delta$ и $a + \delta$.

Итак, если число b есть предел $f(x)$ при $x \to a$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что график функции $f(x)$, соответствующий изменению x на множестве $a - \delta < x < a + \delta$ $(x \neq a)$, не выходит из полосы $b - \varepsilon < y < b + \varepsilon$.

Из определения 3 непосредственно вытекают три следствия.

Следствие 1. Если постоянная b есть предел функции $f(x)$ при стремлении x к a, то эту функцию можно представить в виде суммы числа b и бесконечно малой величины $\alpha(x)$: $f(x) = b + \alpha(x)$.

Следствие 2. Если функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы некоторой постоянной b и бесконечно малой $\alpha(x)$ при стремлении x к a, то существует и равен b предел $f(x)$ при стремлении x к a, т. е. $b = \lim f(x)$ при $x \to a$.

Следствие 3. Функция не может иметь в одной точке двух различных пределов. Действительно, если $f(x) \to b$ и $f(x) \to c$ при $x \to a$, то $f(x) = b + \alpha$ и $f(x) = c + \beta$. Следовательно, $b + \alpha = c + \beta$ и $b - c = \beta - \alpha$, где $\beta - \alpha$ — бесконечно малая, а $b - c$ — постоянная. Этой постоянной может быть только нуль: $b - c = 0$. Поэтому $b = c$.

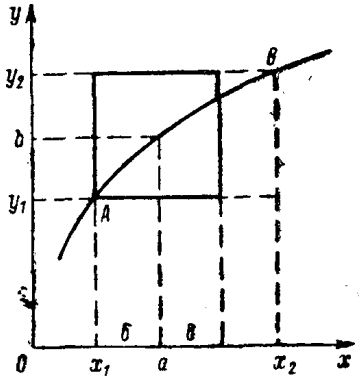

Рис. 12.

14. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности. Если множество $\{x\}$ содержит сколь угодно большие по абсолютной величине значения x, то говорят, что ∞ *является точкой сгущения для* $\{x\}$.

Пусть E — данное положительное число. Числовое множество, все элементы которого удовлетворяют условию $|x| > E$, назовем *E-окрестностью бесконечно удаленной точки.* Множество чисел, больших (меньших) E, назовем E-окрестностью $+\infty$ (соответственно E-окрестностью $-\infty$).

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности X бесконечно удаленной точки. *Число b называется предел ом $f(x)$ при стремлении x к бесконечности, если для каждого положительного ε существует соответствующее $\Delta > 0$ такое, что выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$, если $|x| > \Delta$.* При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Если рассматриваются лишь положительные (или лишь отрицательные) значения x, то говорят о пределе функции при стремлении x к $+\infty$ (или к $-\infty$).

Введем понятие предела последовательности. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве натуральных чисел $X = \{n\}$. Обозначим $x = n$ и $f(n) = y_n$.

Определение 6. *Число b называется предел ом последовательности $\{y_n\}$ при стремлении n к бесконечности, если для каждого положительного ε существует положительное число N такое, что для всех $n > N$*

выполняется неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$. При этом пишут $b = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

Заметим, что определение 6 согласуется с определением 5. Так, в определении 6 участвует условие $n > N$ вместо $|x| > \Delta$, но оба они представляют некоторое множество точек из окрестности бесконечно удаленной точки, на котором данная функция определена.

Пример 1. Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$, если $|q| < 1$. Для этого фиксируем любое положительное ε и докажем, что неравенство $|q^n| < \varepsilon$ выполняется для всех достаточно больших значений переменной n, т. е. при $n > N$, где N — некоторое число.

Неравенство $|q^n| < \varepsilon$ равносильно следующему: $n \lg |q| < \lg \varepsilon$ (где $\lg |q| < 0$, так как $|q| < 1$), а также неравенству $n > \dfrac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \equiv N$. *
Поэтому, если $n > N$, то будет выполняться неравенство $|q^n| < \varepsilon$ и наше утверждение доказано.

Пример 2. Докажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$ при $|q| > 1$. Для этого фиксируем положительное E. Выясним, при каких n выполняется неравенство $|q^n| > E$. Оно равносильно неравенствам $n \lg |q| > \lg E$ и $n > \dfrac{\lg E}{\lg |q|} \equiv N$ (где $|q| > 1$ и $\lg |q| > 0$). Поэтому, если $n > N$, то $|q^n| > E$, что и требовалось доказать.

15. Основные теоремы о пределах. Здесь рассматриваются функции одного и того же аргумента x, при этом x стремится к a или x стремится к бесконечности. Все теоремы п. 15 имеют место в обоих этих случаях; они верны также и для последовательностей. Мы приведем доказательство для одного из этих случаев (именно, когда $x \to a$), потому что для другого доказательство аналогично (см. п. 20).

Лемма (о сохранении знака функции, имеющей отличный от нуля предел). *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, может быть, самой точки a. Если при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет положительный (отрицательный) предел, то и сама функция положительна (отрицательна) по крайней мере для значений x, достаточно близких к a и не равных a.*

Доказательство. Из факта существования предела $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ следует, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что при условии $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \qquad (6а)$$

Если $b > 0$, то возьмем $\varepsilon = \dfrac{1}{2} b$. Из левой части неравенства (6а) следует, что $f(x) > b - \dfrac{1}{2} b = \dfrac{1}{2} b > 0$ при $0 < |x - a| < \delta$.

* Здесь знак $\equiv$ употребляется в смысле обозначения.

Если $b<0$, то возьмем $\varepsilon = -\frac{1}{2}b$. Из правой части неравенства (6а) следует, что $f(x)<b-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}b<0$ при $0<|x-a|<\delta$. Лемма доказана.

Пусть переменные $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют пределы

$$\lim_{x\to a} u(x)=b,\ \lim_{x\to a} v(x)=c.$$

В силу следствия 1 п. 13 имеем $u=b+\alpha$, $v=c+\beta$, где α и β — бесконечно малые при стремлении x к a.

Теорема 1. *Предел суммы двух переменных, имеющих пределы, существует и равен сумме пределов слагаемых*:

$$\lim_{x\to a}(u+v)=\lim_{x\to a} u+\lim_{x\to a} v. \tag{7}$$

Действительно, согласно условию теоремы переменную $u+v$ можно представить в виде суммы постоянной $b+c$ и бесконечно малой $\alpha+\beta$:

$$u+v=(b+c)+(\alpha+\beta).$$

Отсюда следует (см. следствие 2 п. 13), что переменная $u+v$ имеет предел, равный $b+c$.

Теорема 2. *Предел произведения двух переменных, имеющих пределы, существует и равен произведению пределов сомножителей*:

$$\lim_{x\to a}(uv)=\lim_{x\to a} u\cdot\lim_{x\to a} v. \tag{8}$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 1 с помощью равенства $uv=bc+(\alpha c+\beta b+\alpha\beta)$.

Следствие. *Постоянный множитель можно вынести за знак предела*:

$$\lim_{x\to a} cv(x)=c\lim_{x\to a} v(x). \tag{9}$$

Действительно, если в формуле (8) положить $u=c$, то получим равенство (9).

Примечание. Формула (7) распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, а формула (8) — на случай любого конечного числа сомножителей.

Теорема 3. *Предел отношения переменных, имеющих пределы, существует и равен отношению пределов этих переменных, если предел последующего члена отношения не равен нулю*:

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{b}{c}\quad(c\neq 0). \tag{10}$$

Доказательство. Требуется доказать, что разность

$$\frac{u}{v}-\frac{b}{c}=\frac{b+\alpha}{c+\beta}-\frac{b}{c}=(\alpha c-\beta b)\frac{1}{cv} \tag{11}$$

есть величина бесконечно малая при стремлении x к a.

По условию переменная v стремится к c, поэтому переменная cv имеет предел $\lim cv = c^2$, больший нуля. Таким образом, числу $\varepsilon = \frac{1}{2} c^2 > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что при $0 < |x - a| < \delta$ выполнено соотношение $0 < c^2 - \varepsilon < cv < c^2 + \varepsilon$. Имеем $0 < \frac{1}{2} c^2 < cv$. Отсюда следует, что $0 < \frac{1}{cv} < \frac{2}{c^2}$ и переменная $\frac{1}{cv}$ ограничена.

Правая часть равенства (11) представляет произведение бесконечно малой $\alpha c - \beta b$ на ограниченную $\frac{1}{cv}$ и поэтому есть величина бесконечно малая. Отсюда прямо следует заключение теоремы.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x+5}{4x-2}$. По формулам (10), (9) и (7) последовательно получаем

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} (3x+5)}{\lim\limits_{x \to 1} (4x-2)} = \frac{3 \lim\limits_{x \to 1} x + 5}{4 \lim\limits_{x \to 1} x - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$. Здесь нельзя применить формулу (10), так как предел знаменателя равен нулю. Поэтому до перехода к пределу произведем сокращение дроби на общий множитель $x - 2$; получим

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Теорема 4. *В неравенстве, обе части которого имеют пределы, можно перейти к пределу, присоединив знак равенства.*

Дано: 1) в некоторой окрестности точки a (за исключением, может быть, самой точки a) функции $u(x)$ и $v(x)$ определены и удовлетворяют соотношению $u(x) > v(x)$, 2) существуют пределы этих функций $b = \lim\limits_{x \to a} u(x)$ и $c = \lim\limits_{x \to a} v(x)$.

Доказать, что $b \geqslant c$.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что $b < c$. Переменная $u(x) - v(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x \to a} [u(x) - v(x)] = b - c$ меньший нуля, так как $b < c$. Согласно лемме в некоторой окрестности точки a выполняются неравенства $u(x) - v(x) < 0$ и $u(x) < v(x)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $b \geqslant c$.

Пример 3. Переменные $3 + \frac{1}{n}$ и $3 - \frac{1}{n}$ удовлетворяют соотношению неравенства $3 + \frac{1}{n} > 3 - \frac{1}{n}$. Пределы же этих переменных при $n \to \infty$ равны.

Теорема 5 (о сжатой переменной). *Если две переменные стремятся к одному и тому же пределу, а третья переменная заключена между ними, то и она стремится к этому же пределу.*

Дано: 1) в некоторой окрестности X точки a функции $u(x)$, $v(x)$ и $w(x)$ определены и удовлетворяют соотношению $u(x) \leqslant v(x) \leqslant w(x)$, 2) существуют и равны пределы $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} w(x) = b$.

Доказать, что существует $\lim\limits_{x \to a} v(x)$ и что $\lim\limits_{x \to a} v(x) = b$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из факта существования пределов переменных u и w следует, что 1) существует окрестность X_1 точки a, в которой (при $x \neq a$) выполняется неравенство $b - \varepsilon < u < b + \varepsilon$, 2) существует окрестность X_2 точки a, в которой (при $x \neq a$) имеем $b - \varepsilon < w < b + \varepsilon$.

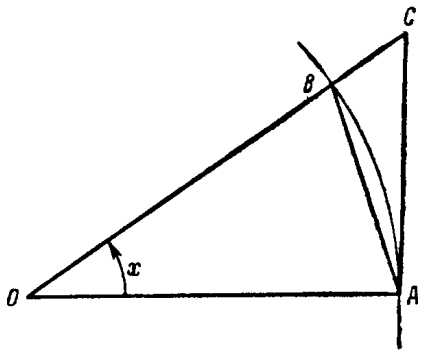

Рис. 13.

Отсюда следует согласно первому условию теоремы, что если $x \in X_1X_2$ и $x \neq a$, то $b - \varepsilon < u < v < w < b + \varepsilon$, а также $|v - b| < \varepsilon$.

Таким образом, доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует соответствующая окрестность X_1X_2 точки a такая, что выполняется неравенство $|v - b| < \varepsilon$, если $x \in X_1X_2$ и $x \neq a$. Следовательно, число b есть предел $v(x)$ при стремлении x к a.

16. Один важный предел. Установим следующее равенство:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{12}$$

Прежде всего выведем при условии $0 < x < \frac{\pi}{2}$ тригонометрическое неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{13}$$

Для этого рассмотрим (рис. 13) дугу AB окружности радиусом r, хорду AB и отрезок AC касательной к окружности в точке A. Из построения следует, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, которая в свою очередь меньше площади треугольника AOC. Поэтому, если под x понимать дуговую меру угла AOB при условии $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{2} r^2 \sin x < \frac{1}{2} r^2 x < \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x,$$

и по сокращении на $\frac{1}{2} r^2$ получим неравенство (13).

Из соотношения (13) следуют неравенства $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ и

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x, \tag{14}$$

а также соотношение $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\frac{x}{2} = x$, так как $\sin \frac{x}{2} < 1$ и $\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}$. Согласно теореме о сжатой переменной из неравенства $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$ следует, что $\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) \to 0$ при $x \to +0$, т. е. $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Если $x < 0$, то имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$ и по доказанному $\lim\limits_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Отсюда следует формула (12).

17. Число *e*. Натуральные логарифмы. В высшей математике встречается введенное еще в XVII в. число, которое обозначается буквой *e*. Число это можно определить как предел функции $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ при стремлении x к нулю:

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}. \tag{15}$$

Предполагается, что $x \neq 0$ и $x \neq -1$, так как функция $f(x)$ не определена при этих значениях аргумента. Факт существования этого предела мы примем без доказательства.

Если в равенстве (15) положить $x = \frac{1}{y}$ (при стремлении x к нулю переменная y стремится к бесконечности), а затем вернуться к прежнему обозначению независимой переменной (обозначив через x величину y), то получим

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \tag{16}$$

В частности, если функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ рассматривается только на множестве натуральных чисел, то из (16) следует, что

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{17}$$

Постоянное число *e* иррационально и приблизительно равно 2,7182818284...

Натуральные логарифмы. Число *e* принято за основание системы логарифмов, называемых *натуральными*. Натуральный логарифм x обозначается символом $\ln x$. Установим связь между натуральными и десятичными логарифмами. Для этого,

логарифмируя по основанию e тождество $x = a^{\log_a x}$, получим равенство $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$. При $x = e$ это равенство дает

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}. \tag{18}$$

При $a = 10$ то же равенство дает $\ln x = \ln 10 \cdot \lg x$ и

$$\lg x = M \ln x, \text{ где } M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e. \tag{19}$$

Формула (19) связывает натуральные и десятичные логарифмы и показывает, что эти логарифмы прямо пропорциональны один другому. На рис. 14 изображены графики логарифмических функций при основании 10 и e. Число M называется *модулем перехода* от натуральных логарифмов к десятичным: $M = \lg e \approx 0{,}43429$, $\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}30258$.

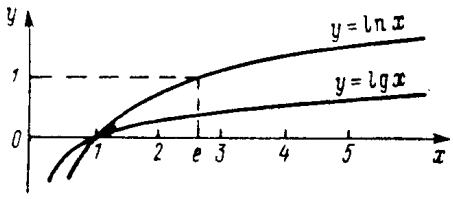

Рис. 14.

Пример. $\ln 2 = \frac{1}{M} \lg 2 \approx 2{,}30258 \cdot 0{,}30103 \approx 0{,}69315$.

18. Задача. Пусть некоторое вещество, начальная концентрация которого равна c_0, вступает в химическую реакцию. Со временем концентрация этого вещества убывает; обозначим через $c(t)$ его концентрацию в момент времени t, отсчитываемый от начала реакции. Требуется найти величину $c(t)$ при условии, что концентрация изменяется со скоростью (обозначим эту скорость через c'), пропорциональной $c(t)$, т. е. при условии

$$c' = -kc(t), \tag{20}$$

где k — данное положительное число. Равенство (20) есть пример так называемого *дифференциального уравнения* (см. гл. XIII).

Решение. Фиксируем любое положительное t и разбиваем мысленно промежуток времени от 0 до t на n элементарных частей, каждый длительностью $\frac{t}{n}$. Предположим, что в каждой такой части концентрация меняется с постоянной скоростью, равной своему значению в начале соответствующей части. Согласно этому предположению величина c' изменяется скачками в начале каждого элементарного промежутка.

Вычислим при этом предположении концентрацию, которую будет иметь вещество к концу каждого элементарного промежутка. В первом промежутке от $t_0 = 0$ до $t_1 = \frac{t}{n}$ скорость c' постоянна и равна $-kc_0$; к концу этого промежутка концентрация будет равна $c_1 = c_0 - kc_0 \frac{t}{n} = c_0 \left(1 - \frac{kt}{n}\right)$. К концу второго промежутка

концентрация будет равна $c_2 = c_1 - kc_1\frac{t}{n} = c_1\left(1-\frac{kt}{n}\right) = c_0\left(1-\frac{kt}{n}\right)^2$. К концу последнего элементарного промежутка времени будем иметь $c_n = c_{n-1} - kc_{n-1}\frac{t}{n} = c_0\left(1-\frac{kt}{n}\right)^n$.

По условию задачи скорость концентрации убывает не скачками, а непрерывно. Поэтому для получения точного ответа надо устремить n к бесконечности; при этом длительность каждого элементарного промежутка времени $\frac{t}{n}$ устремится к нулю. Таким образом, получим

$$c(t) = \lim_{n\to\infty} c_n = c_0 \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{kt}{n}\right)^n =$$

$$= c_0 \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{kt}{n}\right)^{-\frac{n}{kt}}\right]^{-kt} = c_0 e^{-kt}.$$

Окончательный ответ дает функция $c(t) = c_0 e^{-kt}$, представляющая *решение дифференциального уравнения* (20).

Этот же закон (показательный, с основанием e) встречается в ряде других процессов и явлений. Например, при изучении распада радия, размножения бактерий, изменения атмосферного давления с высотой и др. В финансовом деле — это закон сложных процентов.

19. Сравнение бесконечно малых. Рассмотрим две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ и их отношение. Пусть существует предел этого отношения при стремлении x к a. Возможны следующие случаи.

1. Если $\lim\frac{\alpha}{\beta} = c$, где c — отличное от нуля число, то бесконечно малые α и β называются *бесконечно малыми одного порядка*. В частности, если $c = 1$, то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными бесконечно малыми*, что обозначают символом $\alpha \sim \beta$. Например, при стремлении x к нулю $\sin x$ и x суть эквивалентные бесконечно малые.

2. Если $\lim\frac{\alpha}{\beta} = 0$, и, следовательно, $\lim\frac{\beta}{\alpha} = \infty$, то α называется *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с бесконечно малой β, а бесконечно малая β — величиной низшего порядка по сравнению с бесконечно малой α.

Например, если $\alpha = cx^m$ $(c \neq 0)$, $\beta = x^n$, где m и n — положительные числа и $x \to 0$, то при $m > n$ бесконечно малая α высшего порядка по сравнению с β.

Теорема 1. *Для того чтобы бесконечно малые α и β были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой высшего порядка по сравнению с любой из них*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$. Тогда $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 0$. Следовательно, $\frac{\alpha - \beta}{\beta} \to 0$ и $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка относительно β.

Достаточность. Пусть $\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$. Тогда $\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \to 0$ и $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$. Рассуждая так же, выведем из условия $\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \to 1$ эквивалентность α и β.

Теорема 2. *Если существует предел отношения двух бесконечно малых α и β, то он равен пределу отношения соответствующих им эквивалентных бесконечно малых.*

Действительно, если $\alpha \sim \alpha_1$, $\beta \sim \beta_1$ и существует $\lim \frac{\alpha}{\beta}$, то, перейдя к пределу в равенстве $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\beta_1}{\beta}$, получим $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Например, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin (x + 3x^2)}{x + x^3} = \lim \frac{x}{x} = 1$, так как при $x \to 0$ имеем $\sin (x + 3x^2) \sim x$ и $x + x^3 \sim x$.

20. Дополнительные сведения о пределах. Выше, в пп. 10, 13 и 14, было дано понятие предела функции при стремлении аргумента к числу или к бесконечности, а также было дано понятие предела последовательности. Здесь сформулировано единое определение предела функции, охватывающее все указанные случаи.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X одного из следующих видов — это либо конечный промежуток, либо бесконечный промежуток, либо множество натуральных чисел. Пусть a (где a — число или символ ∞) есть точка сгущения множества X (см. пп. 10 и 14).

Определение 7. *Число b называется предел ом $f(x)$ при стремлении x к a, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует соответствующая окрестность X_a точки a такая, что выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех x, удовлетворяющих условию*

$$x \in X X_a, \tag{21}$$

за исключением, может быть, $x = a$.

Определение 7 заключает в себе оба наиболее важных для анализа случая: 1) предел функции от аргумента, который, стремясь к числу или к бесконечности, может принимать все промежуточные значения, и 2) предел последовательности. В случае предела последовательности переменная x принимает только натуральные значения, X есть множество натуральных чисел и условие (21) принимает вид $n > N$.

Эта точка зрения на предел функции позволяет построить единую теорию пределов для всех указанных случаев изменения аргу-

мента. Все теоремы теории пределов, содержащиеся в пп. 11, 12, 14 и 15, оказываются верными для всех этих случаев.

Докажем, например, теорему о сумме двух бесконечно малых: сумма двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при стремлении x к a, где a — число или символ ∞. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. По условию имеем: неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено на некотором множестве X_1, а неравенство $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено на X_2, где X_1 и X_2 суть окрестности точки a, из которых исключена точка a. Рассмотрим множество X_1X_2, т. е. пересечение множеств X_1 и X_2. Тогда, если $x \in X_1X_2$, то будут выполнены неравенства $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x) < \frac{\varepsilon}{2}$, а вместе с ними и неравенство $|\alpha(x) + \beta(x)| < \varepsilon$. Этим доказано, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность X_1X_2 точки a такая, что при $x \in X_1X_2$ $(x \neq a)$ имеет место неравенство $|\alpha + \beta| < \varepsilon$.

Аналогично могут быть доказаны все остальные теоремы теории пределов.

Обратимся к выяснению условий с у щ е с т в о в а н и я п р е д е л а. Не всякая переменная имеет предел. Например, его не имеют переменная $y = \cos x$ при $x \to \infty$, $y = \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$, $y_n = (-1)^n$ при $n \to \infty$.

Вопрос о существовании предела функции имеет в высшей математике существенное значение. Прежде чем ставить вопрос о величине предела функции, необходимо предварительно выяснить, существует ли предел функции. Пренебрежение этим положением может привести к ошибочному выводу. Это показывает следующий пример.

П р и м е р 1. Рассмотрим переменную $y_n = q$ при условии $q > 1$. Здесь $y_{n+1} = y_n \cdot q$. Если пренебречь фактом существования предела переменной y_n при $n \to \infty$ и обозначить предел y_n через b, то в результате предельного перехода в равенстве $y_{n+1} = y_n q$ получим $b = bq$, из чего следует, что $b = 0$, так как $q \neq 1$. В действительности же при условии $q > 1$ переменная y_n предела не имеет; это бесконечно большая переменная (см. п. 14).

Некоторые достаточные условия существования предела даны в пп. 13 и 15. Другие даны ниже.

Пусть функция $f(x)$ определена на числовом множестве $X = \{x\}$. Функция $f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на X, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ (соответственно $f(x_2) < f(x_1)$). Если же для таких x_1 и x_2 выполняется неравенство $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ $[f(x_2) \leqslant f(x_1)]$, то функция называется *неубывающей (невозрастающей)*.

Функции всех этих типов носят название *монотонных*. В частности, числовая последовательность $\{y_n\}$ называется монотонно

возрастающей, если большему значению аргумента n соответствует большее значение y_n.

Теорема 1 (о существовании предела монотонной ограниченной последовательности *). 1. *Монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху, имеет предел, т. е. если для всех n (хотя бы начиная с некоторого места) выполняются неравенства $y_{n+1} \geqslant y_n$ и $y_n < M$ (где M — постоянная), то существует предел этой последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2. *Монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу, имеет предел.*

Пример 2. Докажем, что последовательность $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ бесконечно мала при любом x, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \tag{22}$$

Переменная $y_n = \frac{|x|^n}{n!}$ удовлетворяет соотношению $y_{n+1} = y_n \frac{|x|}{n+1}$. При $n > |x| - 1$ имеем $n + 1 > |x|$, и поэтому $y_{n+1} < y_n$, т. е. переменная y_n монотонно убывает, оставаясь положительной. Следовательно, по теореме 1 переменная y_n при любом фиксированном x имеет предел; обозначим его $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Для нахождения числа b перейдем в равенстве, связывающем y_n и y_{n+1}, к пределу при $n \to \infty$, получим $b = b \cdot 0$. Отсюда следует, что $b = 0$, а также формула (22) (см. следствие из определения бесконечно малой).

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает (или не убывает) в области X, имеющей точку сгущения a такую, что все значения x меньше a. Если при этом функция ограничена сверху, т. е. $f(x) < M$ для каждого x из X, то при $x \to a$ функция имеет конечный предел.*

Докажем эту теорему для случая, когда a — число. Пусть ε — любое фиксированное положительное число и n — натуральное число, большее $\frac{1}{\varepsilon}$.

1. Члены последовательности $\left\{a - \frac{1}{n}\right\}$ $\left(\text{где } \frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ и поэтому } a - \varepsilon < a - \frac{1}{n} < a\right)$ принадлежат промежутку $(a - \varepsilon, a)$, и поэтому согласно определению предела последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a - \frac{1}{n}\right)$, равный a.

2. Последовательность $\left\{f\left(a - \frac{1}{n}\right)\right\}$ при $n > \frac{1}{\varepsilon}$: 1) не убывающая, потому что с ростом n величина $\frac{1}{n}$ убывает, $a - \frac{1}{n}$ возрастает, а $f\left(a - \frac{1}{n}\right)$ не убывает, так как по условию $f(x)$ не

* Доказательство см. в работе Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. I, п. 44.

убывает, 2) ограниченная, так как $f(x)$ ограничена сверху. Поэтому по теореме 1 существует $\lim f\left(a-\frac{1}{n}\right)=b$ при $n\to\infty$.

3. Если число x достаточно близко к a, то существует такое $n=n(x)$, что $a-\frac{1}{n}<x<a-\frac{1}{n+1}$, и в силу монотонности $f(x)$ имеем $f\left(a-\frac{1}{n}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(a-\frac{1}{n+1}\right)$. По теореме о сжатой переменной при стремлении x к a (при этом $n\to\infty$) существует $\lim f(x)$, равный b. Теорема 2 доказана.

Последовательность отрезков (замкнутых промежутков)

$$[a_1,\ b_1],\ [a_2,\ b_2],\ \ldots,\ [a_n,\ b_n],\ \ldots \tag{23}$$

называется *стягивающейся*, если 1) каждый последующий отрезок целиком содержится в предыдущем: $a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n$, 2) длины отрезков (23) стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

Лемма. *Если множество* (23) *есть стягивающаяся последовательность отрезков, то существует единственное число* α, *принадлежащее всем этим отрезкам.*

Доказательство. Последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху ($a_n<b_1$ при всех n). Согласно теореме 1 существует $\lim a_n=\alpha$, причем $a_n\leqslant\alpha$. Последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу ($b_n>a$ при всех n), поэтому существует $\lim b_n=\beta$ и $b_n\geqslant\beta$. Если в неравенстве $a_n<b_n$ перейти к пределу при $n\to\infty$, то согласно теореме 4 п. 15 получим $\alpha\leqslant\beta$. Таким образом, при всех n имеем

$$a_n\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant b_n. \tag{24}$$

По условию длины отрезков (23) стремятся к нулю. Поэтому $\alpha=\beta$ и число α принадлежит всем отрезкам последовательности (23), что прямо указано в неравенстве (24). Лемма доказана.

Докажем фундаментальную теорему Больцано — Коши, содержащую необходимое и достаточное условие существования предела. При этом мы будем пользоваться общим понятием предела функции, определенной на множестве X, с точкой сгущения a (см. определение 7). Формулировку теоремы дадим параллельно для случая конечного a и для случая $a=\infty$.

Теорема Больцано — Коши *. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве X, имеющем точку сгущения a, где a — число (или символ ∞). Для того чтобы функция $f(x)$ при стремлении x к a имела конечный предел, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$ ($\Delta>0$), что имеет место неравенство*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \tag{25}$$

лишь только $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta$ [$|x'|>\Delta$, $|x''|>\Delta$].

* Бернгард Больцано (1781—1848) — чешский математик. Огюстен Луи Коши (1789—1857) — французский математик.

Другими словами, для того чтобы функция имела конечный предел при стремлении x к a, необходимо и достаточно, *чтобы ее значения были сколь угодно близки между собою для значений аргумента, достаточно близких к a (но отличных от a).*

Условие теоремы составляет так называемый *критерий Больцано — Коши существования предела функции.* Доказательство проведем в предположении, что a — число.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. По определению предела существует окрестность X_a точки a такая, что $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, при условии $x \in XX_a$ и $x \neq a$. Рассмотрим x' и x'', удовлетворяющие этому условию, и составим разность

$$f(x') - f(x'') = [f(x') - b] + [b - f(x'')],$$

которую мы представили в виде суммы двух слагаемых. Абсолютная величина суммы не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых, каждая из которых меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, поэтому имеем

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - b| + |b - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено условие (25).

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы. Нужно доказать существование предела.

Рассмотрим последовательность положительных чисел $\varepsilon = \frac{1}{n}$. По условию теоремы для каждого числа n и $\varepsilon = \frac{1}{n}$ существует окрестность точки a (назовем ее δ_n) такая, что для любых x' и x'', принадлежащих X и δ_n, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}. \tag{26}$$

Таким образом, возникает последовательность промежутков $\{\delta_n\}$.

Каждую такую окрестность δ_n точки a будем считать отрезком; при этом мы имеем право предполагать, что $\delta_{n+1} \subset \delta_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Действительно, если бы отрезок δ_{n+1} не составлял части отрезка δ_n, то мы просто заменили бы отрезок δ_{n+1} общей частью отрезков δ_n и δ_{n+1} и получили бы непустой отрезок $\delta_n\delta_{n+1}$, содержащийся в δ_n.

Функция $f(x)$ на отрезке δ_n подчинена условию (26). Поэтому все множество Y_n ее значений, принимаемых на δ_n, может быть заключено внутри некоторого отрезка Δ_n длиной $\frac{1}{n}$. Но $\delta_{n+1} \subset \delta_n$, и поэтому $Y_{n+1} \subset Y_n$. Следовательно, отрезок Δ_{n+1} может быть взят целиком заключенным в отрезке Δ_n: $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$. А так как

длина отрезка Δ_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то последовательность отрезков $\{\Delta_n\}$ образует стягивающуюся систему отрезков. В силу леммы о стягивающейся последовательности отрезков существует число b, принадлежащее всем отрезкам Δ_n.

Убедимся в том, что число b является пределом $f(x)$ при стремлении x к a. С этой целью рассмотрим числовое множество ε_b, т. е. ε-окрестность точки b. По определению числа b имеем $\Delta_n \subset \varepsilon_b$ для всех достаточно больших n. Поэтому, если $x \in X\delta_n$, то $f(x) \in Y_n \subset \Delta_n \subset \varepsilon_b$. Отсюда следует по определению предела функции, что $b = \lim f(x)$ при $x \to a$. Теорема доказана.

Из теоремы Больцано — Коши, в частности, следует *критерий сходимости последовательности: для того чтобы числовая последовательность $\{y_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовало такое N, чтобы для всех достаточно больших n и m (т. е. при $n > N$ и $m > N$) выполнялось неравенство $|y_n - y_m| < \varepsilon$.*

Пример 3. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, определенная при $x \neq 0$, не имеет предела при стремлении x к нулю, потому что нарушено условие (25), являющееся необходимым для существования предела. Действительно, в силу периодичности функции $\sin z$ и стремления $z = \frac{1}{x}$ к бесконечности, существуют сколь угодно близкие к точке $x = 0$ значения x' и x'', при которых $f(x') = 1$, $f(x'') = -1$, а их разность $f(x') - f(x'') = 2$.

§ 3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Непрерывные функции образуют основной класс функций, рассматриваемых в математическом анализе. Первичное представление о непрерывной функции как о функции, график которой можно начертить не отрывая пера от бумаги, явно недостаточно. Нужен аналитический признак непрерывности.

21. Понятие непрерывности функции в точке и в промежутке. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел $f(x)$ при стремлении x к x_0 и этот предел равен значению функции в точке x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Если это условие не выполнено, то точка x_0 называется *точкой разрыва функции $f(x)$.*

Пример 1. Рассмотрим тело, находящееся при температуре θ_0 в твердом состоянии. Обозначим: $Q(\theta)$ — количество тепла, поглощенное телом при его нагревании до температуры θ; θ_1 — температура плавления; θ_2 — температура газообразования вещества этого тела. При нагревании тела от температуры θ_0 до θ_1 величина Q увеличивается. Она продолжает увеличиваться при дальнейшем нагревании тела при температуре θ_1 в процессе

его плавления. Достигнув некоторого значения, переменная Q продолжает возрастать вместе с ростом температуры вещества, перешедшего в жидкое состояние и т. д. График изменения $Q(\theta)$ изображен на рис. 15. В точке θ_1 эта функция имеет предел слева $\lim\limits_{\theta \to \theta_1 - 0} Q(\theta) = A_1B_1$ и предел справа $\lim\limits_{\theta \to \theta_1 + 0} Q(\theta) = A_1C_1$, но они не равны между собой, так как отлична от нуля скрытая теплота плавления, представленная отрезком B_1C_1. Аналогичное явление наблюдается в точке θ_2. Условие непрерывности (1) функции $Q(\theta)$ в точках θ_1 и θ_2 не выполнено и это суть точки разрыва функции.

Пример 2. Функция $y = x^2$ непрерывна при всех значениях x, потому что выполнено условие (1). Действительно, в силу теоремы 2 п. 15 имеем $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = \lim\limits_{x \to x_0} x \cdot \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0^2$.

Условию (1) можно придать вид $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$.

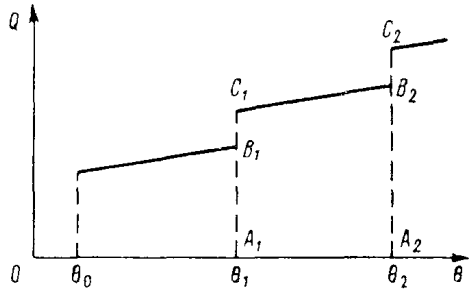

Рис. 15.

В такой форме записи условие непрерывности функции в точке выглядит внешне так, как будто можно перейти к пределу под знаком функции или переставить местами знаки lim и f.

При определении понятия предела функции при стремлении x к x_0 было безразлично, определена ли функция в точке x_0 или нет. Для непрерывности функции в точке x_0 необходимо, чтобы эта функция была определена в точке x_0.

На «языке ε, δ» условие (1) означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что при условии $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Соотношение (2) должно выполняться для всех без исключения точек из δ-окрестности точки x_0. Величина δ зависит не только от ε, но и от x_0, что можно выразить символически: $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Условие непрерывности функции в точке встречается в другой форме, эквивалентной условию (1). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. *Приращением аргумента при переходе от его значения x_0 к значению x называют разность* $x - x_0$; принято обозначение

$$\Delta x = x - x_0. \tag{3}$$

Приращением функции $y = f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке x называется разность соответствующих значений функции

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x). \tag{4}$$

Из условия непрерывности (1) следует (в силу теорем п. 15), что $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{5}$$

Наоборот: если выполнено условие (5), то вместе с ним выполнены предшествующее ему равенство и вытекающее из него равенство (1). Следовательно, условия (1) и (5) эквивалентны. Каждое из этих условий может служить для определения понятия непрерывности функции в точке x_0. Поэтому можно дать такое определение непрерывности функции в точке, равносильное определению 1.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.*

В разных случаях удобно пользоваться тем или другим условием непрерывности функции.

Пример 3. Функция $y = \sin x$ непрерывна при любом значении x. Действительно, $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$.

Величину Δy можно представить в виде произведения трех сомножителей:

$$\Delta y = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\Delta x\cdot\cos(x_0+\alpha),\ \text{где}\ \alpha = \frac{\Delta x}{2},$$

из которых два ограничены, а один бесконечно мал (первый сомножитель ограничен при стремлении Δx к нулю, потому что он имеет при этом конечный предел). Следовательно, все произведение, т. е. Δy, тоже стремится к нулю в силу теоремы о произведении бесконечно малой на ограниченную. Этим доказана непрерывность функции $\sin x$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $\cos x$.

Введем понятие *односторонней непрерывности функции в данной точке*. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0 справа (слева)*, если выполнено предельное соотношение $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ [соответственно $f(x_0 - 0) = f(x_0)$].

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в промежутке*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

22. Классификация точек разрыва. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо (как, впрочем, и достаточно), чтобы она была определена в этой точке, чтобы существовали односторонние пределы слева и справа:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) \tag{6}$$

и чтобы имело место равенство трех чисел

$$f(x_0-0) = f(x_0+0) = f(x_0).$$

Если существуют односторонние пределы (6), но нарушено какое-либо из этих равенств, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода функции $f(x)$*.

Если хотя бы один из односторонних пределов (6) не существует (в частности, равен ∞), то x_0 называется *точкой разрыва второго рода функции $f(x)$*.

Пример 1. Функция $y = \frac{1}{x}$ имеет точку разрыва второго рода $x_0 = 0$, так как при стремлении x к нулю функция бесконечно большая.

Пример 2. Функция $y = E(x)$ имеет точки разрыва первого рода $x = n$, так как $E(n + 0) = n$, $E(n - 0) = n - 1$.

Пример 3. Функция, заданная равенствами: $y = \frac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $y = c$ при $x = 0$, имеет разрыв первого рода в точке $x_0 = 0$, если $c \neq 1$. Если же $c = 1$, то данная функция непрерывна в точке $x_0 = 0$.

Пример 4. Функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ имеет разрыв первого рода в точке $x_0 = 0$, потому что $f(+0) = \frac{\pi}{2}$, $f(-0) = -\frac{\pi}{2}$.

В случае разрыва первого рода в точке x_0 разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называют величиной скачка функции $f(x)$ в точке x_0.

23. Свойства непрерывных функций.

Теорема 1. *Сумма, разность, произведение и частное двух функций, непрерывных в точке x_0, также являются функциями, непрерывными в точке x_0 (в случае частного предполагается, что знаменатель не обращается в нуль в этой точке).*

Доказательство основывается на теореме об арифметических действиях над функциями, имеющими пределы. Так, если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке x_0, то для каждой из них выполнено условие (1), и по теореме о пределе суммы имеем

$$\lim_{x \to x_0} [u(x) + v(x)] = \lim_{x \to x_0} u(x) + \lim_{x \to x_0} v(x) = u(x_0) + v(x_0).$$

Это равенство и означает, что функция $u(x) + v(x)$ непрерывна в точке x_0, потому что для нее выполнено условие (1). Аналогично доказывается непрерывность разности, произведения и частного.

Теорема 2. *Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.*

Доказательство. Степенная функция $y = x^n$ с натуральным показателем n непрерывна при любом x, так как по теореме 2 п. 15 имеем

$$\lim_{x \to x_0} x^n = (\lim_{x \to x_0} x)^n = x^n.$$

Целая рациональная функция непрерывна при любом x, что прямо следует из теоремы 1.

Дробная рациональная функция непрерывна всюду, где знаменатель не обращается в нуль, что также следует из теоремы 1, принимая во внимание непрерывность многочлена.

Непрерывность тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ имеет место всюду, что доказано выше (в п. 21); $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ непрерывны всюду, где эти функции определены как отношения двух непрерывных функций $\sin x$ и $\cos x$.

Можно доказать непрерывность и других основных элементарных функций в соответствующих областях.

Теорема 3. *Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна.*

Дано: 1) $x = \varphi(t)$ определена в промежутке (α, β) и непрерывна в точке t_0 этого промежутка; обозначим $\varphi(t_0) = x_0$, 2) $y = f(x)$ определена в промежутке (a, b), причем, если $t \in (\alpha, \beta)$, то $x = \varphi(t) \in (a, b)$, 3) $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Требуется доказать, что сложная функция $y = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0, т. е. выполнено условие $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta y = 0$.

Доказательство. Фиксируем в промежутке (α, β) значения t_0 и t. Рассмотрим соответствующие значения $x_0 = \varphi(t_0)$ и $x = \varphi(t)$, они принадлежат промежутку (a, b). Рассмотрим соответствующие приращения функций

$$\Delta x = x - x_0 = \varphi(t) - \varphi(t_0),$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)).$$

Непрерывность $x = \varphi(t)$ в точке t_0 означает, что при стремлении t к t_0 величина Δx стремится к нулю, а следовательно, x стремится к x_0. Из непрерывности $y = f(x)$ в точке x_0 следует, что при стремлении x к x_0 величина Δy стремится к нулю.

Следовательно, если t стремится к t_0, то стремится к нулю соответствующее приращение Δx «внутренней функции» $x = \varphi(t)$, а вместе с ним и соответствующее приращение Δy, что и означает непрерывность сложной функции $y = f(\varphi(t))$ в точке t_0.

Пример 8. Функция $y = \sin^3 x$ непрерывна при любом x как сложная функция, составленная из непрерывных функций $y = u^3$ и $u = \sin x$.

24. Свойства функций, непрерывных в замкнутом промежутке. Эти свойства ниже сформулированы в виде теорем, которые мы приводим без доказательства *.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$. Это значит, что она непрерывна в каждой внутренней точке промежутка и что на концах промежутка имеет место односторонняя непрерывность, т. е. выполнены условия $f(a + 0) = f(a)$ и $f(b - 0) = f(b)$.

Теорема Вейерштрасса **. *Функция $f(x)$, непрерывная в замкнутом промежутке $[a, b]$, достигает в этом промежутке своего наибольшего и своего наименьшего значений, т. е. существуют такие точки x_1 и x_2 промежутка $[a, b]$, что для всех x из $[a, b]$ выполняются неравенства $f(x_1) \geqslant f(x)$ и $f(x) \geqslant f(x_2)$.*

Пример 9. Функция $y = \sin x$, непрывная в замкнутом промежутке $0 \leqslant x \leqslant \pi$, достигает наименьшего значения в крайней левой точке промежутка $x_1 = 0$ и наибольшего значения во внутренней точке промежутка $x_2 = \frac{\pi}{2}$; выполняется неравенство $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

---

* Доказательство см. в работе Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. I, пп. 72—75.

** Карл Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

Теорема. *Непрерывная функция, меняя знак, проходит через нуль.*

Это значит, что если на концах промежутка непрерывности $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, т. е. $f(a) f(b) < 0$, то между a и b имеется точка c, в которой функция обращается в нуль: $f(c) = 0$.

Теорема Коши. *Непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$, переходя от одного своего значения к другому, проходит через каждое промежуточное значение.*

Это значит, что если число μ находится между значениями функции $f(x_1)$ и $f(x_2) \neq f(x_1)$, где x_1 и x_2 из $[a, b]$, то в промежутке (x_1, x_2) имеется точка c, значение функции в которой $f(c)$ равно μ.

Доказательство. Пусть $f(x_1) < \mu < f(x_2)$. Рассмотрим в промежутке $[x_1, x_2]$ вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - \mu$. Эта функция непрерывна в промежутке и на концах его имеет значения разных знаков: $\varphi(x_1) = f(x_1) - \mu < 0$, $\varphi(x_2) = f(x_2) - \mu > 0$. Согласно предыдущей теореме между x_1 и x_2 имеется точка c, в которой $\varphi(c) = f(c) - \mu = 0$, и $f(c) = \mu$.

Введем понятие равномерной непрерывности функции в промежутке. Для этого сформулируем на «языке ε, δ» понятие непрерывности функции в промежутке X (это может быть промежуток замкнутый или незамкнутый, ограниченный или неограниченный).

Непрерывность функции $f(x)$ в каждой внутренней точке x промежутка X означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon, x)$ такое, что выполняется неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ при условии $|x' - x| < \delta$. Здесь важно подчеркнуть, что δ зависит не только от ε, но и от точки x.

Если бы речь шла о конечном числе значений x (при неизменном ε), то из конечного числа соответствующих им чисел $\delta(\varepsilon, x_1), \ldots, \delta(\varepsilon, x_n)$, каждое из которых положительно, можно было бы выбрать наименьшее $\delta(\varepsilon) > 0$. Оно также было бы положительным и годилось бы для всех рассматриваемых $x_1, \ldots, x_n$. Но при бесконечном множестве значений x, содержащихся в промежутке X, ситуация сложнее: при фиксированном $\varepsilon > 0$ множеству $\{x\}$ соответствует бесконечное числовое множество $\{\delta(\varepsilon, x)\}$, в котором может не оказаться наименьшего числа. Например, если числа δ заполняют промежуток $(0,1)$, то нет положительного числа, меньшего всех чисел этого множества.

Определение 4. *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной в промежутке X, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует соответствующее $\delta(\varepsilon) > 0$ (не зависящее от x) такое, что для любых $x \in X$ и $x' \in X$, удовлетворяющих условию $|x' - x| < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

В этом случае число δ оказывается зависящим только от ε и годится для всех x из промежутка X. Равномерная непрерыв-

ность означает, что во всех частях промежутка достаточна одна и та же степень близости двух значений аргумента, чтобы получить заданную степень близости соответствующих значений функций.

Пример. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x}$ в промежутке $0 < \alpha < x < 1$. Фиксируем любое число ε $(0 < \varepsilon < 1)$. Рассмотрим $x_0 \in (\alpha, 1)$. Неравенство $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{1}{x_0} - \varepsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} + \varepsilon \equiv \frac{1}{x_1}$. В качестве δ можно взять разность

$$\delta(\varepsilon, x_0) = x_0 - x_1 = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}.$$

На рис. 16 видно, что чем «круче» график функции, тем меньше δ, т. е. чем ближе x_0 к точке α, тем меньше δ. Это же следует из формулы, определяющей $\delta(\varepsilon, x_0)$.

Если $\alpha < x < 1$, то существует положительное δ $(\varepsilon) = \frac{\varepsilon\alpha^2}{1 + \varepsilon\alpha}$ такое, что при $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполняется условие (7), и поэтому функция $1/x$ равномерно непрерывна в промежутке $(\alpha, 1)$, где $\alpha > 0$.

В промежутке $(0,1)$ функция $1/x$ непрерывна, но не равномерно непрерывна, так как при $x_0 \to 0$ имеем $\delta(\varepsilon, x_0) \to 0$.

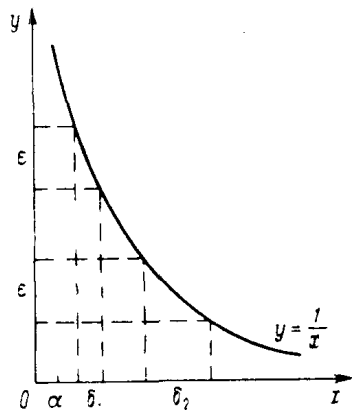

Рис. 16.

Теорема Кантора *. *Если функция непрерывна в замкнутом промежутке, то она равномерно непрерывна в этом промежутке.*

В сущности это значит, что если функция непрерывна в промежутке $[a, b]$, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно разбить промежуток $[a, b]$ на конечое число таких частей, что значения функции в двух произвольных точках любой части отличаются между собой меньше, чем на ε.

25. Непрерывность обратной функции. Введем понятие обратной функции. Пусть функция

$$y = f(x) \tag{8}$$

определена, строго монотонна и непрерывна в промежутке $[a, b]$. Обозначим наименьшее из чисел $f(a)$ и $f(b)$ через α, а наибольшее — через β.

Функция (34) принимает каждое значение промежутка $[\alpha, \beta]$, т. е. промежуток $[\alpha, \beta]$ сплошь состоит из значений функции (8), что следует из непрерывности функции (8) и теоремы Коши (см. п. 24). Каждое значение y из $[\alpha, \beta]$ функция $f(x)$ принимает только один раз, что следует из монотонности данной функции.

---

* Георг Кантор (1845—1918) — немецкий математик.

Числовые множества, определяемые неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$ и $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, эквивалентны, т. е. между элементами этих множеств можно установить взаимно-однозначное соответствие. Действительно, каждому элементу x из $[a, b]$ соответствует единственное значение y из $[\alpha, \beta]$ согласно равенству (8).

Выберем любое y_1 в $[\alpha, \beta]$. В промежутке $[a, b]$ найдется значение x_1, при котором функция $f(x)$ имеет значение y_1. Это значение единственное, так как функция (8) монотонна. Таким образом, каждому y из $[\alpha, \beta]$ поставлено в соответствие определенное значение x из $[a, b]$ такое, что $f(x) = y$. Этим определена в области $[\alpha, \beta]$ функция

$$x = \varphi(y), \tag{9}$$

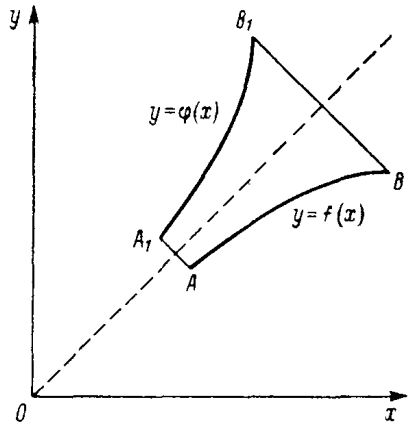

Рис. 17.

которая называется *обратной функцией для функции* (8). Здесь y — независимая переменная, x — функция.

Из этого определения следует, что 1) функции (8) и (9) взаимно обратны, 2) имеют место тождества $f(\varphi(y)) \equiv y$ в $[\alpha, \beta]$ и $\varphi(f(x)) \equiv x$ в $[a, b]$.

Пример 11. Функция $y = e^x$ в промежутке $-\infty < x < \infty$ и функция $x = \ln y$ в промежутке $0 < y < \infty$ суть взаимно-обратные функции, что следует из определения этих функций.

Теорема. *Если функция* (8) *определена, строго монотонна и непрерывна в* $[a, b]$, *то обратная функция* (9) *определена, монотонна (того же характера, что* (8)) *и непрерывна в промежутке между* $f(a)$ *и* $f(b)$.

Доказательство. Существование функции (9) показано выше при определении понятия обратной функции.

Монотонность обратной функции докажем рассуждением от противного. Пусть функция (8) возрастающая, а (9) — невозрастающая, тогда имеют место неравенства $y_2 > y_1$ и $x_2 \leqslant x_1$ при некоторых значениях x_1, x_2, y_1, y_2. Но такие неравенства противоречат условию возрастания функции (34), так как при $x_1 > x_2$ имеем $y_1 > y_2$, а при $x_1 = x_2$ имеем $y_1 = y_2$. Поэтому обратная функция возрастающая.

Непрерывность обратной функции докажем тоже рассуждением от противного. Пусть y_0 из промежутка $[\alpha, \beta]$ есть точка разрыва функции (9). У монотонной функции разрывы могут быть лишь первого рода, поэтому имеем $\lim\limits_{y \to y_0 - 0} \varphi(y) \equiv x_1 \neq x_2 = \lim\limits_{y \to y_0 + 0} \varphi(y)$ и функция (9) не принимает значений в промежутке (x_1, x_2).

Но это противоречит тому факту, что функция (8) определена в промежутке $(x_1, x_2) \subset [a, b]$. Теорема доказана.

Если пользоваться обычными обозначениями: x — для независимой переменной и y — для функции, то функцию (9) можно представить в виде $y = \varphi(x)$.

Графики прямой функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = \varphi(x)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Действительно, графики функций (8) и (9) совпадают, на рис. 17 — это линия AB. Замена в (9) x на y, а y на x приведет к $y = \varphi(x)$ и к зеркальному отображению AB в указанной биссектрисе.

26. Еще три важных предела. Установим справедливость трех важных формул, которые будут нам полезны в дальнейшем:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}, \tag{10}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \tag{11}$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m. \tag{12}$$

Согласно свойствам логарифма имеем

$$\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\log_a(1+x)^{1/x}.$$

Выражение, стоящее справа под знаком логарифма, при $x\to 0$ стремится к e (см. п. 17), а его логарифм (в силу непрерывности логарифмической функции) стремится к $\log_a e=\frac{1}{\ln a}$.

Для вывода формулы (11) положим $a^x - 1 = y$, тогда при $x \to 0$ (в силу непрерывности показательной функции) и $y \to 0$. Имеем $x = \log_a(1 + y)$ и с помощью формулы (10) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\ln a.$$

Для доказательства формулы (12) положим $1 + x = e^y$ и с помощью формулы (11) получим формулу (12)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{my}-1}{e^y-1}=m\lim_{y\to 0}\frac{e^{my}-1}{my}\cdot\frac{y}{e^y-1}=m.$$

Пример 1. Найти $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x^2-6x+6)}{x-1}$. Положим $x-1=\alpha$. Тогда $x^2-6x+6=1-4\alpha+\alpha^2$ и

$$L=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1-4\alpha+\alpha^2)}{\alpha^2-4\alpha}\cdot\frac{\alpha^2-4\alpha}{\alpha}=\frac{1}{\ln e}(-4)=-4.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-2^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^x\cdot\dfrac{4^x-1}{x}=2^0\ln 4=\ln 4.$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{5}}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{5}.$

Глава II

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Производная является важнейшим понятием математического анализа, основным понятием дифференциального исчисления. Это понятие возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение задачи о касательной к данной кривой, задачи о скорости неравномерного движения и некоторых других задач. Подобные задачи интересовали математиков с давних времен. Но еще в XVI в. постановка этих задач и методы их решения носили частный характер. Накопившийся в этом направлении обширный материал получил теоретическое завершение лишь в XVII в. в трудах Ньютона и Лейбница *.

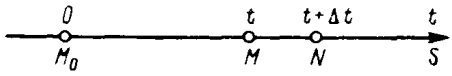

Рис. 18.

27. Задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о скорости движущейся точки. Рассмотрим движущуюся прямолинейно точку. Пройденный ею путь s, отсчитываемый от определенной точки прямой, есть функция времени t. Движение считается заданным, когда известно *уравнение движения*: $s = f(t)$. В частности, в случае равномерного движения s — линейная функция времени: $s = s_0 + vt$, где v — постоянная.

Требуется найти скорость движущейся точки. Вместе с тем надо выяснить смысл самого понятия скорости в данный момент времени для случая неравномерного движения.

---

* Исаак Ньютон (1642—1727) — английский математик и физик. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — немецкий философ и математик. Ньютон и Лейбниц — создатели дифференциального и интегрального исчисления.

Рассмотрим два момента времени t и $t + \Delta t$. Моменту времени t соответствует положение точки M и пройденный ею путь, равный $s = f(t)$. Моменту времени $t + \Delta t$ соответствует положение точки N и пройденный ею путь $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ (рис. 18). Поэтому за промежуток времени между t и $t + \Delta t$ точка пройдет путь, равный $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$. Средняя скорость на участке пути MN равна $v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Эта скорость воображаемого равномерного движения. Средняя скорость меняется вместе с изменением Δt и тем лучше характеризует движение в промежутке $(t, t + \Delta t)$, чем меньше Δt. Поэтому правильное представление о скорости движения дает предел средней скорости при стремлении Δt к нулю.

Скоростью v точки в данный момент времени t называют предел средней скорости при стремлении Δt к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Мы получили предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при стремлении Δt к нулю. Пределы такого вида часто встречаются в математике и ее приложениях. Они называются *производными*. В данном случае речь идет о том, что *скорость движущейся прямолинейно точки есть производная от пути по времени*, что обозначается символом $v = s'_t$.

Пример 1. Если $s = \frac{1}{2} gt^2$, то $\Delta s = \frac{1}{2} g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} gt^2 = gt\,\Delta t + \frac{1}{2} g(\Delta t)^2$ и $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{1}{2} g\,\Delta t\right) = gt$.

Задача о скорости химической реакции. Предположим, что некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества Q, вступившего в реакцию к моменту времени t, есть функция от t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение ΔQ величины Q. Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ выражает среднюю скорость химической реакции за промежуток времени длиною Δt. Предел этого отношения при стремлении Δt к нулю, т. е. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, выражает скорость химической реакции в данный момент времени t.

Задача о теплоемкости тела. Пусть θ — температура тела, w — количество тепла, которое надо сообщить этому телу (единичной массы) при нагревании от 0 до $\theta°$. Величина w есть функция температуры $w = w(\theta)$. Придадим θ некоторое приращение $\Delta\theta$, тогда w получит приращение Δw. Величина $\frac{\Delta w}{\Delta \theta}$ представляет среднюю теплоемкость тела в промежутке температур между θ и $\theta + \Delta\theta$. Но теплоемкость, вообще говоря, меняется

при изменении $\Delta\theta$. Под теплоемкостью тела понимают величину $c = \lim\limits_{\Delta\theta\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta\theta}$. Итак, можно сказать, что теплоемкость есть производная от количества тепла по температуре.

Задача о касательной к данной кривой. *Касательной к кривой в данной ее точке* M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M вдоль по кривой стремится к точке M_0 (рис. 19). *Угловым коэффициентом прямой* (в частности, касательной) называется тангенс угла, образованного этой прямой с осью Ox (угол отсчитывается от оси Ox против часовой стрелки); он обозначается обычно буквой k.

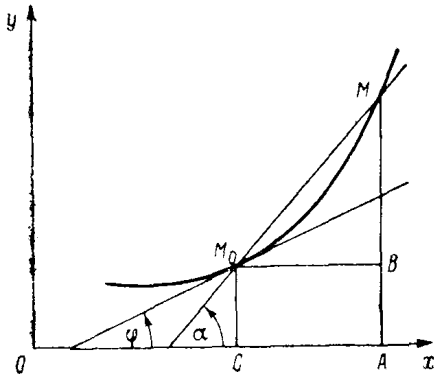

Рис. 19.

Требуется найти угловой коэффициент касательной к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке M_0 с абсциссой x_0.

Для этого возьмем на кривой точку $M_0(x_0, y_0)$ и близкую к ней точку $M(x, y)$. Проведем секущую M_0M и обозначим через α угол наклона секущей. Согласно построению (рис. 19) имеем $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BM}{M_0B}$, где $BM = AM - AB = f(x) - f(x_0) = \Delta y$, $M_0B = CA = OA - OC = x - x_0 = \Delta x$.

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если теперь устремить Δx к нулю, то точка M, перемещаясь вдоль по кривой, устремится к точке M_0, а угол α будет стремиться к φ (если кривая имеет касательную в точке M_0). Зная угловой коэффициент секущей, мы, исходя из определения касательной как предельного положения секущей, можем найти угловой коэффициент касательной

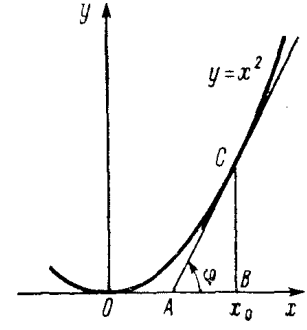

Рис. 20.

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Следовательно, *угловой коэффициент касательной есть производная от ординаты по абсциссе.*

Пример 2. Пусть $y = x^2$. Тогда $\Delta y = 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2$, где x_0 — абсцисса точки касания M_0. Следовательно,

$$k = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Поэтому (см. рис. 20) имеем $AB = BC \operatorname{ctg} \varphi = \frac{x_0^2}{2x_0} = \frac{x_0}{2}$, и точка A делит отрезок OB пополам. Таким образом, для построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке C достаточно разделить пополам отрезок OB и его середину соединить с точкой касания.

28. Понятие производной функции. Если сопоставить операции, которые были выполнены при решении задач п. 27, и отвлечься от различия в истолковании переменных, то мы увидим, что каждый раз приращение функции делилось на приращение независимой переменной и затем вычислялся предел их отношения. Так мы приходим к основному понятию дифференциального исчисления — к понятию производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности фиксированного x_0. Рассмотрим точку $x_0 + \Delta x$ из этой окрестности и вычислим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 1. *Производной функции $y = f(x)$ по независимой переменной x при данном значении x_0 (или в данной точке x_0) называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ к вызвавшему его приращению независимой переменной $\Delta x = x - x_0$ при стремлении Δx к нулю, если этот предел существует:*

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{3}$$

Для обозначения производной приняты следующие символы: y', y'_x, $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$. Символ $\frac{dy}{dx}$ (обозначение Лейбница) надо рассматривать пока как целый символ, а не как частное.

Если отношение Δy к Δx при стремлении x к x_0 имеет предел справа (или слева), то он называется *производной справа* (соответственно *производной слева*). Такие пределы называются *односторонними производными*.

Операция (действие) нахождения производной функции называется ее *дифференцированием*. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x_0*, если она имеет в этой точке производную. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в промежутке*, если она имеет производную в каждой точке этого промежутка. При этом, если промежуток от a до b замкнутый, то на концах промежутка речь идет об односторонних производных.

Геометрическое значение производной установлено в п. 27: производная функции $f(x)$ в точке x_0 численно равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 с абсциссой x_0. Чем «круче» график функции, тем больше $|\varphi|$, $|\operatorname{tg} \varphi|$ и $|y'|$. Из геометрического смысла производной следует, что если производная в каком-либо промежутке положительна, то сама функция в этом промежутке возрастает; если же производная отрицательна, то функция убывает.

Механическое значение производной установлено тоже в п. 27: скорость прямолинейно движущейся точки есть производная от пройденного пути по времени.

Если слово «скорость» понимать в более широком смысле, то можно производную всегда интерпретировать как некую «скорость». Пусть дана функция $y = f(x)$. По аналогии с п. 27 средней скоростью изменения y по сравнению с x при изменении x на величину Δx можно считать отношение $v_{ср} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. *Скоростью изменения y при данном значении x* естественно назвать предел этого отношения при стремлении Δx к нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v_{ср} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. как раз производную от y по x.

Из определения производной вытекает схема ее вычисления. Пусть дана функция $y = f(x)$. Фиксируем x, даем независимой переменной x приращение Δx, находим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Составляем отношение Δy к Δx. Находим предел этого отношения и получаем в соответствии с формулой (3) производную.

Пример 1. Если $y = c$, то $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ и $y' = 0$. Следовательно, *производная постоянной равна нулю.*

Пример 2. Если $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$ и $y' = 1$.

Пример 3. Если $y = \sin x$, то $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Используя непрерывность $\cos x$ и формулу (12) п. 16, получим

$$y' = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции). *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*

Пусть в точке x_0 данная функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$. Требуется доказать, что в этой точке функция непрерывна, т. е. выполнено условие: $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим $\Delta x = x - x_0$ и соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. По теореме о пределе произведения ограниченной величины на бесконечно малую при $\Delta x \to 0$ имеем

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

и теорема доказана.

Примечание. Обратное утверждение неверно, что показывают примеры.

Пример 6. $y = |x|$ есть функция, непрерывная в точке $x_0 = 0$. Но она не имеет производной в этой точке. Существует производная справа (т. е. при $\Delta x > 0$) $f'(+0) = \lim \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$ и производная слева (т. е. при $\Delta x < 0$) $f'(-0) = \lim \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$, но они не равны между собой.

Пример 7. Кривая растворимости сернокислого натрия Na_2SO_4 имеет вид, изображенный на рис. 21. По оси ординат отложено процентное содержание соли в растворе. При температуре θ_1 касательная слева не совпадает с касательной справа.

29. Основные правила дифференцирования. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые функции.

1. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной*:

$$(cu)' = cu'. \qquad (4)$$

Действительно, пусть $y = cu(x)$, где c — постоянная. Приращению независимой переменной Δx соответствует приращение функции $\Delta y = c\,\Delta u$. Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и после перехода в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ получим равенство (4):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = cu'(x).$$

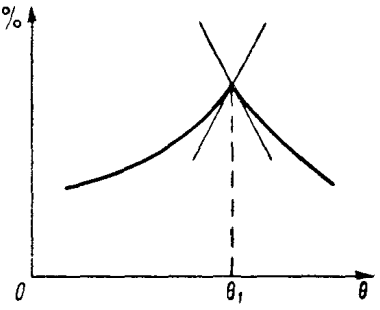

Рис. 21.

2. *Производная суммы двух дифференцируемых функций существует и равна сумме их производных*:

$$(u + v)' = u' + v'. \qquad (5)$$

Пусть $y = u(x) + v(x)$. Тогда $\Delta y = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x) = [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$. Поэтому $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ и после перехода в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$ получим равенство (5).

Пример 1. $(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x$.

Правило дифференцирования суммы двух слагаемых распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых, что доказывается аналогично.

3. *Производная произведения двух дифференцируемых функций существует и равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго*, т. е. имеет место формула

$$(uv)' = u'v + uv'. \qquad (6)$$

Пусть $y = u(x)\,v(x)$. Тогда $\Delta y = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)\,v(x)$. Здесь $u(x+\Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x+\Delta x) = v(x) + \Delta v$. Следовательно, $\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right] = u'v + uv'.$$

Третье слагаемое в квадратной скобке стремится к нулю, потому что величина $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ограничена (как переменная, имеющая предел), а Δv — бесконечно малая (что следует из дифференцируемости v).

Пример 2. $(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

4. *Производная частного двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ при $v(x) \neq 0$ имеет следующее выражение:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{7}$$

Пусть $y = \frac{u}{v}$. Тогда $\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)}$, и поэтому $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} v - u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \Big/ [v(v+\Delta v)] = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, так как Δv стремится к нулю вместе с Δx, что следует из дифференцируемости v.

Пример 3. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

5. *Производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$, составленной из дифференцируемых функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, существует и равна произведению производной внешней функции $f(u)$ по промежуточному аргументу u на производную этого аргумента по независимой переменной x*

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{8}$$

Выведем формулу (8). Имеем $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Фиксируем x, даем независимой переменной x приращение Δx. При этом u получит приращение $\Delta u = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$, а y получит соответствующее приращение $\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$. Из равенства $y'_u = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ следует, что $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$ и $\Delta y = y'_u \Delta u + \alpha \Delta u$, где переменная α бесконечно мала при $\Delta u \to 0$. Заметим сразу же, что при стремлении Δx к нулю будет стремиться к нулю как Δu (что следует из дифференцируемости u), так и переменная α. Величина $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ограничена как переменная, имеющая предел. Поэтому получим

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \left(y'_u \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = y'_u \cdot u'_x.$$

Пример 4. $y = \sin x^2$ есть тригонометрическая функция от степенной и по формуле (8) имеем $y' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2$.

Пример 5. $y = \sin^2 x$ есть степенная функция от тригонометрической, и поэтому $y' = 2 \sin x (\sin x)' = \sin 2x$.

6. Производная обратной функции. Следующая теорема позволяет найти производную обратной функции, зная производную прямой функции.

Теорема. *Если строго монотонная в* $[a, b]$ *функция* $y = f(x)$ *имеет при некотором значении* x_0 *отличную от нуля производную, то обратная функция* $x = \varphi(y)$ *имеет в соответствующей точке* y_0 *производную* x'_y, *равную единице, деленной на* y'_x:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{9}$$

Доказательство. Обозначим через Δx и Δy соответствующие приращения x и y, т. е.

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0), \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Заметим, что Δy вызывает приращение Δx, но можно считать и наоборот, что Δx вызывает приращение Δy. Оба эти приращения отличны от нуля и мы имеем $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$. Перейдя в этом равенстве к пределу при стремлении Δy к нулю (заметим, что Δx и Δy вместе стремятся к нулю (см. п. 25)), получим формулу (9)

$$x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'_x}.$$

Пример 6. Пусть $y = \sqrt{x}$. Обратная функция $x = y^2$ имеет производную $x'_y = 2y$. По формуле (9) имеем $y'_x = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, если $x \neq 0$.

7. Правило дифференцирования функции, заданной параметрически. Пусть зависимость y от x не задана непосредственно, а вместо этого задана зависимость обеих переменных x и y от некоторой третьей, вспомогательной, переменной (называемой параметром): $x = x(t)$, $y = y(t)$ при $\alpha < t < \beta$. Предположим, что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$. Тогда, очевидно, y является функцией от x: $y = y(t(x)) \equiv f(x)$.

Если функции $x(t)$, $y(t)$ и $t(x)$ имеют производные, то и функция $f(x)$ имеет производную. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$, где (согласно правилу дифференцирования обратной функции) $t'_x = \frac{1}{x'_t}$. Поэтому при $x'_t \neq 0$ получаем окончательно

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{10}$$

Пример 7. Функция $y(x)$ задана параметрически: $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, где r — постоянная. По формуле (10) получаем

$$y'_x = \frac{(r\sin t)'_t}{(r\cos t)'_t} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\frac{x}{y}.$$

Желая исключить параметр t, возводим оба данные равенства в квадрат и результаты складываем. Получим уравнение $x^2 + y^2 = r^2$, из которого найдем явную зависимость y от x: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Дифференцируя эту функцию по x, придем к прежнему результату $y'_x = \dfrac{-2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$.

30. Основные формулы дифференцирования. Приведем таблицу производных, содержащую основные формулы дифференцирования:

1. $y = c$, $y' = 0$;	
2. $y = x^m$, $y' = mx^{m-1}$,	2а) $y = x$, $y' = 1$,
2б) $y = \dfrac{1}{x}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}$,	2в) $y = \sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
3. $y = a^x$, $y' = a^x \ln a$,	3а) $y = e^x$, $y' = e^x$;
4. $y = \log_a x$, $y' = \dfrac{1}{x\ln a}$,	4а) $y = \ln x$ $y' = \dfrac{1}{x}$;
5. $y = \sin x$, $y' = \cos x$;	6. $y = \cos x$; $y' = -\sin x$;
7. $y = \operatorname{tg} x$, $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	8. $y = \operatorname{ctg} x$, $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $y = \arcsin x$, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	10. $y = \arccos x$, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $y = \operatorname{arctg} x$, $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	12. $y = \operatorname{arcctg} x$, $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Вывод основных формул дифференцирования помещен ниже.

Тригонометрические функции. Производная синуса выведена в п. 28. Представим $y = \cos x$ в виде $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ и в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции получим

$$y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Производную функции $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ получим по правилу дифференцирования дроби

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Пусть $y = \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, тогда

$$y' = \cos^{-2}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Логарифмическая функция. Пусть $y=\log_a x$, где $0<a\neq 1$. Тогда $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$. С помощью формулы (10) п. 26 получим

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{1}{x\ln a}.$$

Следовательно, производная логарифмической функции $y=\log_a x$ равна единице, деленной на произведение аргумента этой функции и натурального логарифма основания. В частности, если $a=e$, то $y'=\frac{1}{x}$.

Пример 1. $y=\ln\sin x$, $y'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\operatorname{ctg} x$.

В более общем случае, когда $y=\ln\varphi(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции получим $y'=\frac{1}{\varphi(x)}\varphi'(x)$. *Логарифмической производной данной функции* $\varphi(x)$ называется производная ее логарифма

$$[\ln\varphi(x)]'=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}. \tag{11}$$

Пример 2. Для нахождения производной функции $y=\sqrt[10]{\frac{\sin x}{x}}$ целесообразно предварительно найти ее логарифмическую производную, т. е. производную функции $\ln y=\frac{1}{10}(\ln\sin x-\ln x)$. Дифференцируя по x, получим $\frac{y'}{y}=\frac{1}{10}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right)$.

Умножив этот результат на y, получим окончательно

$$y'=\frac{1}{10}\sqrt[10]{\frac{\sin x}{x}}\left(\operatorname{ctg} x-\frac{1}{x}\right).$$

Показательная функция. Пусть $y=a^x$, где $1\neq a>0$. При любом вещественном значении x величина y положительна. Вычислим логарифмическую производную данной показательной функции, т. е. производную функции $\ln y=x\ln a$; получим $\frac{y'}{y}=\ln a$. Умножив на y, получим окончательный результат: $y'=a^x\ln a$. Если при этом $x=x(t)$, то

$$y'_t=a^x\ln a\cdot x'_t. \tag{12}$$

Следовательно, *производная показательной функции равна произведению этой функции на натуральный логарифм основания и на производную показателя.* В частности, если $a=e$, то $\ln a=1$ и $y'=e^x x'$.

Пример 3. $y = a^{\sin x}$, $y' = a^{\sin x} \ln a \cdot \cos x$.

Следовательно, «скорость» изменения показательной функции пропорциональна уже достигнутому значению функции $y' = ky$. Именно на этом свойстве показательной функции основано ее широкое использование в науке.

Степенная функция $y = x^m$ (где m — любое вещественное число). Область изменения x зависит от m; она была указана в п. 8. При $x \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = x^{m-1} \frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^m - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}$$

Если воспользоваться пределом (12) п. 26, то получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = mx^{m-1}.$$

Если $x_0 = 0$, то $m \geqslant 0$. При $m = 0$ имеем $y \equiv 1$ и $y' = 0$. При $m > 0$ имеем $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^m - x_0^m = (\Delta x)^m$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{m-1} = \begin{cases} 0 & \text{при } m > 1, \\ 1 & \text{при } m = 1. \end{cases}$$

Если $0 < m < 1$, то в точке $x_0 = 0$ производная бесконечна Во всех остальных случаях существует конечная производная, равная $y' = mx^{m-1}$. Если $x = \varphi(t)$, то *производная степенной функции равна произведению показателя степени на степень с тем же основанием и уменьшенным на единицу показателем и на производную основания*:

$$y'_t = mx^{m-1} \cdot x'_t. \tag{13}$$

Пример 4. Если $y = \sqrt{\sin x}$, то $y' = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Пример 5. Пусть температура данной массы идеального газа постоянна. Обозначим ее объем v, а давление p. Тогда, как известно, имеет место зависимость $pv = p_0 v_0$, где p_0 и v_0 — первоначальные значения давления и объема. Следовательно, $v = \dfrac{p_0 v_0}{p}$ и $v'_p = -\dfrac{p_0 v_0}{p^2}$. Величина v'_p характеризует скорость изменения объема газа при изменении его давления. Производная оказалась отрицательной, что указывает на уменьшение объема при увеличении давления.

Степенно-показательная функция: $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$. Здесь $u(x) > 0$, и поэтому y можно представить в виде $y = e^{v \ln u}$. Дифференцируя y по x как сложную функцию, получим

$$y' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} u'. \tag{14}$$

Отсюда следует правило: для того чтобы найти производную степенно-показательной функции, надо ее продифференцировать как степенную функцию и как показательную функцию и результаты сложить.

Пример 6. $y=x^x$, $y'=x^x\ln x+xx^{x-1}=x^x(\ln x+1)$.

Обратные тригонометрические функции. Пусть $y=\arcsin x$; ее область определения $|x|\leqslant 1$. Обратная функция есть $x=\sin y$. По правилу дифференцирования обратной функции, при $|x|<1$ получаем

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{+\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $|y|<\frac{\pi}{2}$.

Пусть $y=\arccos x$; ее область определения $|x|\leqslant 1$. Из определения функций $\arcsin x$ и $\arccos x$ следует, что их сумма равна $\frac{\pi}{2}$, поэтому $y=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$ и $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x|<1$.

Аналогично для $y=\operatorname{arctg} x$ получаем при $|x|<\infty$

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Для $y=\operatorname{arctg} x$ при $|x|<\infty$ получаем $y'=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcctg} x\right)'=$ $=-\frac{1}{1+x^2}$.

31. Производные высших порядков. Производная $f'(x)$ данной дифференцируемой функции $f(x)$ сама есть функция переменной x. Ее называют *производной первого порядка*. Если она имеет производную, то, дифференцируя ее, мы получим новую функцию, которая называется *производной второго порядка*, или второй производной первоначальной функции, и обозначается так:

$$y''=(y')'. \tag{15}$$

Продолжая дифференцирование, получим третью производную и т. д.

Определение. *Производной n-го порядка, или n-й производной данной функции*, называется производная от ее производной $n-1$-го порядка

$$y^{(n)}=(y^{(n-1)})'. \tag{16}$$

Для производных высших порядков приняты обозначения:

$$y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \ldots, \text{ или } y'', y''', y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}, \ldots$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой n раз*, если существуют ее производные до порядка n включительно и эти производные непрерывны.

Пример 1. Если $y=\sin x$, то $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=-\sin x=$ $=\sin(x+\pi)$, т. е. дифференцирование $\sin x$ приводит к прибавлению числа $\frac{\pi}{2}$ к аргументу. Поэтому имеем

$$y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\,\frac{\pi}{2}\right). \tag{17}$$

Пример 2. Если $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $a_0, \ldots, a_n$ — постоянные, то $y'=a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$. Продолжая дифференцирование, получим $y^{(n)}=a_0(n!)$, где $n!=1\cdot 2, \ldots, n$.

Пример 3. Пусть $y=u(x)v(x)$. Применяя правила дифференцирования произведения и суммы, получим $y'=u'v+uv'$, $y''=u''v+2u'v'+uv''$. Продолжая процесс дифференцирования, придем к следующей формуле:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\ldots+$$
$$+C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}, \tag{18}$$

которая называется *формулой Лейбница*. В ней принято обозначение

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}. \tag{19}$$

Пример 4. Если $u=e^x$, $v=x^2$, то, по формуле Лейбница, получим

$$(e^xx^2)^{(20)}=e^xx^2+20e^x\cdot 2x+190e^x\cdot 2=e^x(x^2+40x+380).$$

§ 5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

32. Теорема Ферма.* *Если функция $f(x)$ 1) определена в некотором промежутке (a, b), 2) достигает в некоторой внутренней точке c этого промежутка наибольшего (или наименьшего) значения, 3) существует конечная производная $f'(c)$, то эта производная необходимо равна нулю: $f'(c)=0$.*

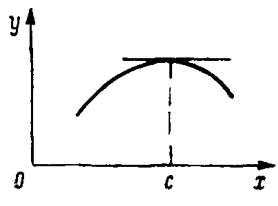

Рис. 22.

Доказательство. По условию в точке c функция $f(x)$ достигает, допустим, наибольшего значения. Это значит, что выполнено неравенство $f(c)\geqslant f(x)$, а вместе с ним и неравенство $\Delta y=f(x)-f(c)\leqslant 0$ для всех x из промежутка (a, b).

При $x<c$ имеем $\Delta x=x-c<0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$. По условию в точке c существует конечная производная. Поэтому получим

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c-0)\geqslant 0.$$

* Пьер Ферма (1601—1665) — французский математик.

При $x>c$ имеем $\Delta x=x-c>0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x}\leqslant 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(c+0)\leqslant 0$.

Сопоставляя неравенства $f'(c-0)\geqslant 0$ и $f'(c+0)\leqslant 0$, заключаем, что $f'(c)=0$.

Геометрический смысл заключения теоремы состоит в том, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке c параллельна оси абсцисс (рис. 22).

Примечание. При доказательстве теоремы существенно использованы все ее условия. В частности, если бы наибольшее (или наименьшее) значение достигалось не во внутренней точке, а на границе промежутка (a, b), при соблюдении условия существования производной (конечно, односторонней) в этой точке, то обращение этой производной в нуль могло не иметь места.

Пример. Функция $y=\sin x$ в промежутке $0\leqslant x\leqslant \pi/2$ достигает в точке $x_0=0$ наименьшего значения, но ее производная в этой точке не равна нулю: $y'_0=\cos 0=1$.

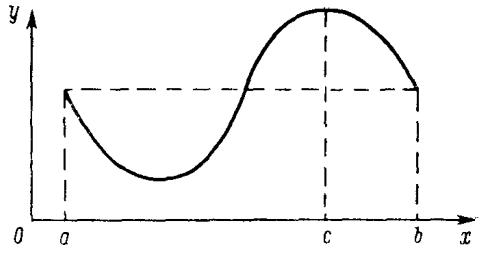

Рис. 23.

33. Теорема Ролля*. *Если функция $f(x)$ 1) непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, 2) дифференцируема по крайней мере в открытом промежутке (a, b), 3) принимает на концах промежутка равные значения $f(a)=f(b)$, то внутри промежутка (a, b) существует точка c такая, что*

$$f'(c)=0. \qquad (1)$$

Геометрическое содержание теоремы Ролля состоит в том, что если выполнены условия теоремы, то внутри промежутка (a, b) существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (рис. 23).

Алгебраическое значение теоремы таково: между двумя корнями дифференцируемой функции имеется корень ее производной (хотя бы один). Под *корнем функции* мы понимаем значение аргумента, при котором эта функция обращается в нуль.

Доказательство теоремы Ролля. По теореме Вейерштрасса (см. п. 24), функция $f(x)$ (непрерывная в замкнутом промежутке) достигает в этом промежутке своего наибольшего значения q и своего наименьшего значения p. Пусть эти значения функции достигаются соответственно в точках c_2 и c_1 промежутка $[a, b]$, так что $f(c_1)=p$, $f(c_2)=q$. Возможны только два случая.

Случай 1. Обе точки c_1 и c_2 совпадают с концами промежутка $[a, b]$. Тогда из третьего условия теоремы следует, что $p=q$ и что функция $f(x)$ постоянна в $[a, b]$. Следовательно,

* Мишель Ролль (1652—1719) — французский математик.

в любой внутренней точке этого промежутка производная $f'(x)$ равна нулю.

Случай 2. Хотя бы одна из точек c_1 или c_2 не совпадает ни с одним из концов промежутка $[a, b]$. Обозначим эту точку c. Она находится внутри промежутка (a, b) и в ней функция достигает наибольшего или наименьшего значения. Кроме того, в точке c существует производная функции. Согласно теореме Ферма, в этой точке $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Примечание. При доказательстве теоремы существенно использовались все ее условия. (Читателю полезно проследить, где и как использовались эти условия.) В частности, если $f(x)$ не дифференцируема хоть в одной точке промежутка (a, b) при соблюдении остальных условий теоремы, то внутри (a, b) может не быть точки, в которой производная была бы равна нулю. Это показано в примере 7 п. 28 — в точке θ_1 функция не имеет производной.

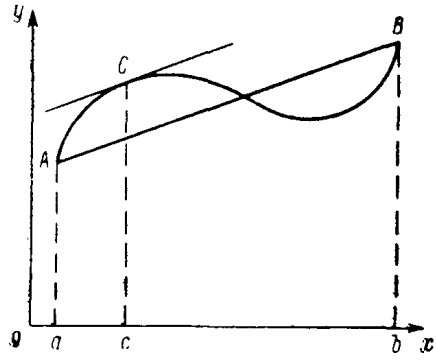

Рис. 24.

34. Теорема Лагранжа * (о среднем значении в дифференциальном исчислении). *Если функция $f(x)$ 1) непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$, 2) дифференцируема по крайней мере в открытом промежутке (a, b), то внутри промежутка (a, b) существует такое значение c, что выполняется равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c). \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda x$. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля при любом постоянном λ, как сумма двух непрерывных и дифференцируемых функций $f(x)$ и λx. Она удовлетворяет третьему условию теоремы Ролля $\varphi(a) = \varphi(b)$ при специальном выборе числа λ из условия $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$, т. е., если $\lambda = -[f(b) - f(a)] : (b - a)$. При таком λ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, а поэтому в силу заключения этой теоремы внутри промежутка (a, b) существует значение c, при котором $\varphi'(c) = 0$. Последнее равенство можно записать в виде $f'(c) + \lambda = 0$, так как $\varphi'(x) = f'(x) + \lambda$. Отсюда следует равенство (2). Теорема доказана.

Примечания. 1. Теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля, так как если $f(a) = f(b)$, то из (2) следует (1).

2. Геометрический смысл заключения теоремы Лагранжа состоит в том, что на графике AB функции $f(x)$ есть внутренняя точка C такая, что касательная к графику в точке C параллельна хорде AB. Действительно, левая

* Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

часть равенства (2) численно равна угловому коэффициенту хорды AB, а правая часть — угловому коэффициенту касательной в точке C. Из равенства угловых коэффициентов вытекает равенство углов наклона хорды и касательной и параллельность этих линий (рис. 24).

Формула (2) называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*. Из нее непосредственно следует соотношение

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{3}$$

Заменив здесь a на x_0, b на x, $b-a$ на $x-x_0$, получим

$$f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0). \tag{4}$$

Обозначив $\Delta x=x-x_0$, $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, получим

$$\Delta y=f'(c)\,\Delta x. \tag{5}$$

Формулы конечных приращений (3), (4) и (5) показывают, что *приращение функции равно произведению соответствующего приращения аргумента на значение производной в некоторой средней точке.*

Промежуточное между x_0 и x значение аргумента c в формулах (4) и (5) можно представить в следующем виде:

$$c=x_0+\theta(x-x_0), \tag{6}$$

где $0<\theta<1$. Действительно, число c заключено между x_0 и x. Поэтому имеем $0<\frac{c-x_0}{x-x_0}<1$. Остается обозначить средний член этого неравенства буквой θ и мы прямо отсюда выведем соотношение (6).

Следствие из теоремы Лагранжа. Если $f'(x)\equiv 0$ в промежутке $[a, b]$ (конечно, в точках a и b речь идет об односторонних производных), то в этом промежутке функция $f(x)$ постоянна.

Доказательство. По условию функция $f'(x)$ дифференцируема в $[a, b]$, и поэтому она непрерывна (см. п. 28). Функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа в промежутке $[a, x]$, где x — любая фиксированная точка промежутка $(a, b]$. Формула Лагранжа (4) для функции $f(x)$ и промежутка $[a, x]$ имеет вид

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a).$$

Здесь по условию $f'(c)=0$, и поэтому справедливо равенство $f(x)=f(a)$. Оно имеет место для любого рассматриваемого x. Следовательно, функция $f(x)$ сохраняет в промежутке $[a, b]$ постоянное значение, равное $f(a)$.

Встречается другая формулировка следствия — *если производные двух функций тождественно равны в некотором промежутке, то сами функции либо равны, либо отличаются постоянным слагаемым.*

Действительно, если $\varphi'(x) \equiv \psi'(x)$ в $[a, b]$, то $[\varphi(x) - \psi(x)]' \equiv 0$ и $\varphi(x) - \psi(x) = c_1$. Поэтому $\varphi(x) = \psi(x) + c_1$.

35. Два дифференциальных уравнения. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее производную искомой функции (см. гл. XIII). Здесь рассмотрены два важных примера, в которых решения дифференциальных уравнений получены с помощью следствия из теоремы Лагранжа (см. п. 34).

Пример 1. В естествознании встречаются переменные $y(x)$, скорость изменения которых $y'(x)$ при каждом значении x пропорциональна $y(x)$:

$$y' = ky, \tag{7}$$

где k — постоянная. Это соотношение есть пример дифференциального уравнения.

Желая найти $y(x)$ из этого уравнения, представим (7) сначала в виде $\frac{y'}{y} = k$, а затем в виде равенства производных двух функций: $(\ln y)' = (kx)'$. Отсюда следует (см. п. 34), что $\ln y = kx + \ln c$, где c — постоянная. Поэтому функция, удовлетворяющая данному уравнению, имеет вид $y = ce^{kx}$.

Пример 2. Найти функцию, удовлетворяющую следующему дифференциальному уравнению:

$$y'' + a^2 y = 0,$$

где a — постоянная. Это уравнение называется *уравнением гармонических колебаний*.

Умножим данное уравнение на $2y'$ и представим результат умножения в виде равенства $(y'^2)' = (-a^2y^2)'$. Следовательно (см. п. 34), $y'^2 = a^2\alpha^2 - a^2y^2$, где α — постоянная. Извлекая корень, получим соотношение $y' = a\sqrt{\alpha^2 - y^2}$, которое можно представить в виде равенства производных $\left(\arcsin\frac{y}{\alpha}\right)' = (ax)'$. Итак (см. п. 34), $\arcsin\frac{y}{x} = ax + \beta$, где β — постоянная. Поэтому имеем

$$y = \alpha \sin(ax + \beta) = \alpha \cos\beta \sin ax + \alpha \sin\beta \cos ax.$$

Обозначив $\alpha\cos\beta = c_1$, $\alpha\sin\beta = c_2$, получим окончательно

$$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax.$$

Найденная периодическая функция удовлетворяет данному уравнению при любых значениях постоянных c_1 и c_2, в чем легко убедиться путем прямой проверки.

36. Теорема Коши.* *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ 1) непрерывны в замкнутом промежутке $[a, b]$, 2) дифференцируемы по крайней мере в открытом промежутке (a, b), 3) $g'(x) \neq 0$ в промежутке (a, b), то внутри (a, b) существует значение c такое, что имеет место равенство*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{8}$$

---

* Огюстен Луи Коши (1789—1857) — французский математик.

Доказательство. Из третьего условия теоремы следует, что $g(a) \neq g(b)$, в чем можно убедиться рассуждением от противного. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то, по теореме Ролля, примененной к функции $g(x)$ (здесь выполнены все условия теоремы Ролля), получается, что $g'(c_1) = 0$ в некоторой внутренней точке c_1 промежутка (a, b). Но это противоречит третьему условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) + \lambda g(x)$, где λ — число. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет первым двум условиям теоремы Ролля при любом λ как сумма двух непрерывных и дифференцируемых функций. Она удовлетворяет третьему условию теоремы Ролля $\varphi(a) = \varphi(b)$, если λ подчинено условию $f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$, из которого следует, что $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. При таком выборе числа λ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля. Поэтому в силу заключения этой теоремы существует внутри (a, b) число c такое, что имеет место равенство $f'(c) + \lambda g'(c) = 0$, или $-\lambda = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, которое совпадает с (8).

Заметим, что теорема Лагранжа есть частный случай теоремы Коши, соответствующий случаю $g(x) \equiv x$.

37. Раскрытие неопределенностей. Пусть функции $u(x)$ $v(x)$ определены в некоторой окрестности точки a. Рассмотрим при $x \to a$ следующие выражения:

$$uv, \quad u - v, \quad \frac{u}{v}, \quad u^v.$$

Условимся в следующем. Назовем 1) *неопределенностью вида* $\frac{0}{0}$ отношение $\frac{u}{v}$ двух бесконечно малых (случай $u \to 0$, $v \to 0$), 2) *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$ отношение $\frac{u}{v}$ двух бесконечно больших (случай $u \to \infty$, $v \to \infty$), 3) *неопределенностью вида* $\infty - \infty$ разность $u - v$ двух бесконечно больших одного знака (случай $u \to \infty$, $v \to \infty$), 4) *неопределенностью вида* $0 \cdot \infty$ произведение uv бесконечно малой на бесконечно большую (случай $u \to 0$, $v \to \infty$). Степенно-показательное выражение u^v называется 5) *неопределенностью вида* 0^0, если $u \to 0$, $v \to 0$, 6) *неопределенностью вида* ∞°, если $u \to \infty$, $v \to 0$, 7) *неопределенностью вида* 1^∞, если $u \to 1$, $v \to \infty$.

Раскрыть неопределенность того или иного вида — это значит найти предел соответствующей функции.

Рассмотрим прежде всего случай отношения бесконечно малых.

Теорема Лопиталя.* *Предел отношения двух бесконечно малых существует и равен пределу отношения их производных*:

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)} \tag{9}$$

* Гильом Франсуа де Лопиталь (1661—1704) — французский математик.

(в этом состоит так называемое правило Лопиталя), *если выполнены следующие условия*: 1) *функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *определены, непрерывны и дифференцируемы в некоторой окрестности* (α, β) *точки* a *и* $v'(x) \neq 0$ *в* (α, β); 2) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = 0$; 3) *существует предел* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$.

Приведем доказательство теоремы для случая, когда a — число. Функции $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши в промежутке между a и x, где x фиксировано в (α, β). Поэтому внутри этого промежутка существует такое число c, что

$$\frac{u(x)-u(a)}{v(x)-v(a)} = \frac{u'(c)}{v'(c)} \quad \text{и} \quad \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)},$$

так как согласно непрерывности $u(x)$ и $v(x)$ в точке a и второго условия теоремы, имеем $u(a) = v(a) = 0$.

При стремлении x к a переменная c, заключенная между x и a, тоже стремиться к a. При этом в силу третьего условия теоремы существует предел отношения функций и он равен

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(c)}{v'(c)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Последнее равенство основано на независимости величины предела от обозначения независимой переменной. Теорема доказана.

Примечание. Правило Лопиталя верно* и в случае, когда a — символ ∞.

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sin x)'}{x'} = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1.$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{-\cos x}{2x-\pi} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Пример 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1.$

Сформулируем теорему, относящуюся к случаю неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема. *Если* 1) $u(x)$ *и* $v(x)$ *определены и дифференцируемы при всех* $x \neq a$ *в окрестности точки* a, *где* $v'(x) \neq 0$, 2) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$, 3) *существует предел* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$, *то суще-*

* Доказательство см. в работе Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. I, п. 120.

ствует предел отношения $u(x)$ к $v(x)$ и он равен пределу отношения производных этих функций

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}. \tag{10}$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{e^x}=0.$

Следовательно, степенная функция x^n растет медленнее показательной функции e^x.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$ приводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования произведения функций uv к виду отношения $uv=u/\frac{1}{v}$ или $uv=v/\frac{1}{u}$.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0.$

Неопределенность вида $\infty-\infty$ можно привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем представления разности $u-v$ в виде отношения

$$u-v=\frac{1}{\frac{1}{u}}-\frac{1}{\frac{1}{v}}=\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\right)\Big/\frac{1}{uv}.$$

Неопределенности вида 1^∞, ∞° и 0° можно раскрыть с помощью тождества $u^v=e^{v\ln u}$, которое имеет место при условии $1\neq u>0$. Перейдем в этом тождестве к пределу при $x\to a$; предполагая существование предела переменной $v\ln u$ и учитывая непрерывность показательной функции, получим

$$\lim_{x\to a}u^v=e^q, \text{ где } q=\lim_{x\to a}(v\ln u). \tag{11}$$

Величина $v\ln u$ представляет неопределенность вида $\infty^\circ\cdot 0$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}x^x=e^q=1$, так как $q=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)/\dfrac{1}{x}=$

$=-\lim\limits_{x\to 0}x=0.$

§ 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

С помощью производной можно изучить различные свойства функций. Ниже доказаны теоремы о тех или иных свойствах функций. Некоторые из теорем содержат необходимые условия, другие — достаточные условия, третьи — необходимые и достаточные условия истинности математического предложения, представляющего заключение соответствующей теоремы. Выясним точный смысл этих понятий.

Необходимым условием для истинности какого-либо предложения называется всякое условие, без осуществления которого это предложение заведомо неверно.

Пример 1. Для делимости числа N на 6 необходимо, чтобы а) число N было целым, б) число N было четным. Каждое из этих условий является необходимым условием для делимости N на 6.

Достаточным условием для истинности какого-либо предложения называется всякое условие, из которого следует, что это предложение верно.

Пример 2. Для делимости числа N на 6 достаточно, чтобы число N делилось на 12, или, чтобы число N делилось на $6k$, где k — любое натуральное число.

В нашем примере речь идет о математическом предложении «число N делится на 6». Это предложение может быть истинным (верным) или неверным в зависимости от числа N. Если выполнено достаточное условие: $N = 6k$, то предложение верно — число N делится на 6. Если нарушено любое из необходимых условий (например, N — нецелое число), то предложение неверно — число N не делится на 6.

Достаточное условие иногда называют признаком.

Необходимым и достаточным условием называется условие, являющееся необходимым и вместе с тем достаточным для истинности рассматриваемого предложения. Необходимое и достаточное условие иногда называют критерием.

Так, для делимости числа N на 6 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

38. Условие постоянства функции. Условия монотонности функции.

Теорема 1. *Для того чтобы в промежутке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *сохраняла постоянное значение, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие*

$$f'(x) \equiv 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Если $f(x)$ постоянна в $[a, b]$, то она имеет производную, и эта производная тождественно равна нулю (см. п. 28).

Достаточность. Если $f(x)$ в каждой точке промежутка $[a, b]$ имеет равную нулю производную, то в силу следствия из теоремы Лагранжа функция $f(x)$ сохраняет в $[a, b]$ постоянное значение. Теорема доказана.

Установим условия монотонности функции (см. п. 20). Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$. Рассмотрим две точки x и x_0 этого промежутка и соответствующие приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ и функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Теорема 2. *Если в промежутке* $[a, b]$ *функция* $y = f(x)$ *диф-*

ференцируема и возрастает (убывает), то ее производная в этом промежутке не отрицательна (не положительна), т. е.

$$f'(x) \geqslant 0 \quad [f'(x) \leqslant 0]. \tag{2}$$

Действительно, если $f(x)$ возрастающая, то $\Delta y > 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y < 0$ при $\Delta x < 0$ (см. п. 20). В обоих случаях $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, а следовательно, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$. Если же $f(x)$ убывающая, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, а $f'(x) \leqslant 0$.

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна в $[a, b]$ и дифференцируема в (a, b), причем*

$$f'(x) > 0 \quad [f'(x) < 0], \tag{3}$$

то эта функция возрастает (убывает) в $[a, b]$.

Действительно, согласно формуле конечных приращений (см. п. 34) для произвольных x и x_0 из $[a, b]$ имеем

$$\Delta y = f'(c)\,\Delta x. \tag{4}$$

Следовательно, если $f'(x) > 0$ в (a, b) и $\Delta x > 0$, то $\Delta y > 0$ и данная функция возрастает в $[a, b]$. Если же $f'(x) < 0$ и $\Delta x > 0$, то $\Delta y < 0$ и функция убывает.

Пример 1. Функция $y = x^3$ всюду возрастающая по определению этого понятия. Ее производная $y' = 3x^2$ всюду положительна, за исключением точки $x_0 = 0$, где она равна нулю.

Примечание. Производная строго монотонной функции не может обратиться тождественно в нуль ни в каком промежутке монотонности. Действительно, пусть $f(x)$, например, возрастает в (a, b) и $f'(x) \equiv 0$ в (a, b). Эти условия несовместимы, потому что из второго условия следует постоянство $f(x)$ в (a, b), а согласно первому условию функция не постоянна.

Пример 2. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает всюду, где $\sin x \neq 0$, потому что при этом условии $y' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$.

Пример 3. Функция $y = e^{2x}$ всюду возрастает, так как $y' = 2e^{2x} > 0$.

Пример 4. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$. Для этого находим производную данной функции $y' = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$. Производная обращается в нуль в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Выясним знак производной в промежутках изменения переменной x, которые указаны в первой строке таблицы. Далее с помощью теоремы 3 установим характер изменения переменной y в каждом из этих промежутков. Результаты вычислений приведены в таблице.

x	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$
y	Убывает	Возрастает	Убывает	Возрастает

Заметим, что знак производной позволяет судить не о знаке функции, а о характере ее изменения.

Пример 5. Доказать неравенство $\sin|x| \leqslant |x|$. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = x - \sin x$ и ее производную $f'(x) = 1 - \cos x$. При всех x величина $f'(x) \geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место лишь в изолированных точках. Поэтому $f(x)$ всюду возрастает. При $x_0 = 0$ имеем $f(x_0) = 0$. Следовательно, при $x > 0$ имеем $f(x) = x - \sin x > 0$ и поэтому $\sin x < x$. При $x < 0$ имеем $f(x) < 0$ и поэтому $\sin x > x$, а $\sin(-x) < -x$. Объединяя результаты, получаем $\sin|x| \leqslant |x|$ при всех x.

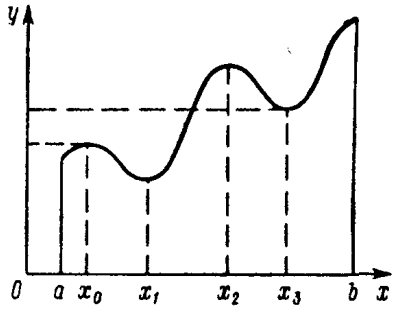

Рис. 25.

39. Максимум и минимум функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и x_0 — точка этого промежутка.

Определение. *Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум (минимум)*, если значение функции $f(x)$ в точке x_0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений в какой-либо окрестности точки x_0. Это значит, что существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad [f(x) > f(x_0)]. \tag{5}$$

Условие (5) можно представить соответственно в виде

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) < 0 \quad [\Delta y > 0]. \tag{6}$$

Если функция имеет в точке x_0 максимум или минимум, то говорят, что она имеет в этой точке *экстремум*, а сама точка x_0 называется *точкой экстремума* функции (рис. 25).

Из определения следует, что понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что в случае экстремума неравенства (5) и (6) не обязаны выполняться для всех значений x в области определения функции, а лишь в некоторой окрестности точки x_0 (за исключением x_0).

В случае максимума график функции имеет вершину, и точке максимума x_0 соответствует ордината $f(x_0)$, наибольшая среди соседних ординат. Очевидно, функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов, причем иной максимум может быть меньше другого минимума. На рис. 25 $f(x_0) < f(x_3)$.

Наибольшее значение функции в промежутке $[a, b]$ — это не обязательно наибольший из максимумов; это может быть значение функции на границе промежутка, например в точке $x = b$ (см. рис. 25).

Примечание. Если функция имеет в точке x_0 экстремум, например минимум, то это еще не значит, что справа от x_0 функция возрастает, а слева убывает. Это показывает следующий пример, в котором x_0 есть точка сгущения экстремумов. Пусть функция задана равенствами

$$f(x) = x^2\left(2 - \sin\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \neq 0,\ f(0) = 0. \tag{7}$$

Можно доказать*, что в точке $x_0 = 0$ данная функция непрерывна и имеет минимум. Ее производная $f'(x) = 2x\left(2 - \sin\frac{1}{x}\right) + \cos\frac{1}{x}$ в любой окрестности точки x_0 (но не в самой точке x_0) непрерывна и меняет знак бесконечно много раз. А сама функция $f(x)$ не монотонна ни слева, ни справа от x_0 (рис. 26).

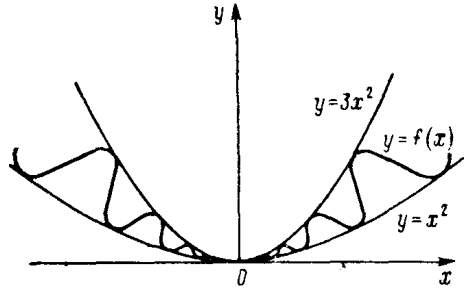

Рис. 26.

Теорема. *Если дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то производная $f'(x)$ в точке x_0 равна нулю:*

$$f'(x_0) = 0. \tag{8}$$

В сущности это другая формулировка теоремы Ферма, все условия которой здесь выполнены, а поэтому имеет место и ее заключение.

Для дифференцируемой функции $f(x)$ условие (8) является необходимым условием экстремума. Но функция может иметь в точке экстремум и не быть в этой точке дифференцируемой. На рис. 21 показан график такой функции. Следовательно, *необходимо, чтобы в точке экстремума производная функции либо не существовала, либо была равна нулю.*

Заметим, что условие (8), будучи необходимым условием экстремума дифференцируемой функции, не является достаточным условием экстремума. Это показывает пример: функция $y = x^3$ не имеет экстремума, но ее производная равна нулю в точке $x_0 = 0$.

Значения аргумента, при которых производная равна нулю или имеет разрыв, называются *критическими значениями.*

Пример. Функция $y = x^{2/3}(x + 5)$ имеет критические значения $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$, потому что производная $y' = 5(x + 2)/3\sqrt[3]{x}$ в точке x_1 равна нулю, а в точке x_2 бесконечна; причем сама функция в этих точках определена.

---

* Аналогичный пример рассмотрен в работе И. П. Привалова и С. А. Гальперна «Основы анализа бесконечно малых».

40. Достаточные условия экстремума. Условимся в следующем: будем говорить, что «*производная меняет знак плюс на минус при переходе через точку* x_0», если в некоторой окрестности точки x_0 выполняются неравенства: $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Аналогично, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то производная меняет знак минус на плюс при переходе через x_0.

Теорема 1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности критической точки* x_0 *(в самой точке* x_0 *производная может не существовать). Если при переходе через точку* x_0 *производная* $f'(x)$ *меняет знак плюс на минус, то в точке* x_0 *функция имеет максимум. Если же при переходе через точку* x_0 *производная меняет знак минус на плюс, то в точке* x_0 *функция имеет минимум.*

Доказательство. Предположим сначала, что производная меняет знак плюс на минус. Рассмотрим значение x, меньшее x_0, и напишем формулу конечных приращений (см. п. 34) для $f(x)$ и промежутка $[x, x_0]$: $\Delta y = f'(c)\,\Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $x < c < x_0$. По условию при $x < x_0$ $f'(c) > 0$ и поэтому $\Delta y < 0$.

Если же $x > x_0$, то из аналогичной формулы Лагранжа и условия $f'(x) < 0$ следует, что $\Delta y < 0$. Итак, в обоих случаях $\Delta y < 0$, и в соответствии с определением понятия максимума функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Отсюда следует правило исследования функции на экстремум с помощью первой производной. Пусть в (a, b) дана функция $f(x)$: 1) находим ее первую производную, 2) находим критические значения, 3) выясняем знак $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки, 4) выносим суждение об экстремуме в соответствии с теоремой 1, 5) вычисляем значения функции в точках экстремума.

Пример 1. Для исследования на экстремум функции $y = x^{2/3}(x + 5)$ находим ее критические значения (см. п. 39): $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$. Затем согласно правилу последовательно заполняем строки таблицы

x	$-\infty < x < -2$	$x_1 = -2$	$-2 < x < 0$	$x_2 = 0$	$0 < x < +\infty$
y'	$+$	0	$-$	∞	$+$
y	Возрастает	Максимум	Убывает	Минимум	Возрастает

Следовательно, в точке x_1 данная функция имеет максимум, а в точке x_2 она имеет минимум, причем $f(x_1) = -3\sqrt[3]{4}$, $f(x_2) = 0$.

Пример 2. Дана функция $y = x^3 - 3x + 2$. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума. Для этого вычисляем производную $y' = 3(x - 1)(x + 1)$ и находим критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Заполняем последовательно строки таблицы

x	$-\infty<x<-1$	$x_1=-1$	$-1<x<1$	$x_2=1$	$1<x<+\infty$
y'	+	0	−	0	+
y	Возрастает	Максимум	Убывает	Минимум	Возрастает

График функции изображен на рис. 27.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$. Тогда* 1) *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, если*

$$f''(x_0)>0; \qquad (9)$$

2) *функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если*

$$f''(x_0)<0. \qquad (10)$$

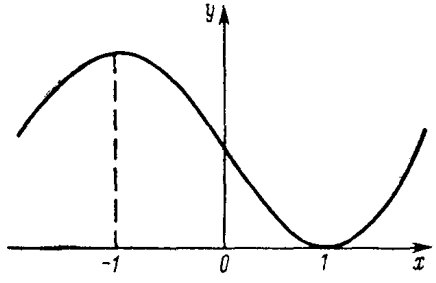

Рис. 27.

Доказательство. Пусть выполнено условие (9). По условию $f''(x)$ непрерывна в точке x_0, поэтому в силу леммы о сохранении знака функции (см. п. 15) условие $f''(x) > 0$ будет выполнено в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности точки x_0 функция $z \equiv f'(x)$ возрастает, так как ее производная положительна: $z' = f''(x) > 0$. По условию в точке x_0 первая производная равна нулю. Следовательно, при переходе через точку x_0 первая производная $f'(x)$ меняет знак минус на плюс, и поэтому в силу теоремы 1 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум. Аналогично доказывается вторая часть теоремы 2.

Теорема 2, так же как теорема 1, содержит достаточные условия экстремума.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x + 2$. Для этого находим $y' = 3x^2-3$ и $y'' = 6x$. В точке $x_1 = -1$ функция имеет максимум, так как $y' = 0$, а $y'' < 0$. В точке $x_2 = 1$ функция имеет минимум, так как $y' = 0$, а $y'' > 0$.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в промежутке $[a, b]$ можно поступить так: 1) найти критические значения $x_1, \ldots, x_n$ и присоединить к ним точки a и b, 2) вычислить значения функции в каждой из этих точек и выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее. В результате получим искомые значения функции.

41. Задачи на экстремум. З а д а ч а 1. На какой высоте h следует подвесить лампочку, для того чтобы в точке A освещенность была наибольшей (рис. 28) при условии, что расстояние $AC = a$ задано?

Р е ш е н и е. Как известно, освещенность J в точке A равна $J = k\cos\varphi/r^2$. Здесь $\cos\varphi = h/r$, $r^2 = h^2 + a^2$. Следовательно, величина J есть функция h, определенная в области $h \geqslant 0$:

$$J = \frac{kh}{(h^2+a^2)^{3/2}}.$$

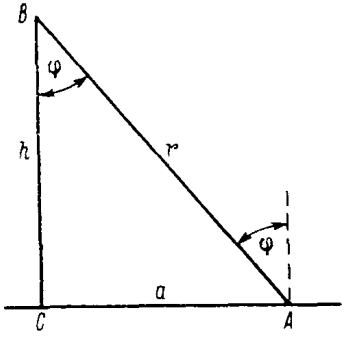

Рис. 28.

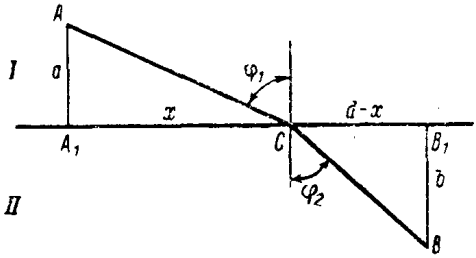

Рис. 29.

Надо найти такое значение h, при котором величина J максимальна. Исследуем функцию на экстремум; найдем ее первую производную

$$J' = k\frac{a^2-2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}} = \frac{2k}{(h^2+a^2)^{5/2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-h\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+h\right).$$

Производная обращается в нуль в точках $h_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ и $h_2 = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, из которых только h_1 может доставить функции экстремум. При $0 < h < h_1$ имеем $J' > 0$, а при $h > h_1$ $J' < 0$. Следовательно, в точке $h_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7a$ величина J достигает максимума.

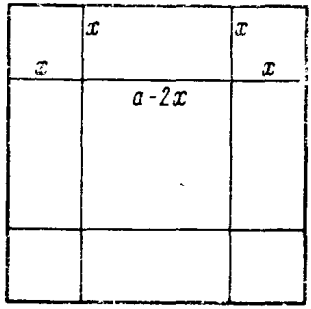

Рис. 30.

Например, если $a = 100$ *см*, то $h \approx 70$ *см*.

З а д а ч а 2. Две среды разделены прямой. Известны скорости движения точки в средах v_1 и v_2 соответственно. Данные точки A и B (рис. 29) находятся в разных средах на расстояниях a и соответственно b от границы раздела. Расстояние между проекциями этих точек на границу раздела дано $A_1B_1 = d$. Требуется найти на границе сред точку C такую, чтобы время движения из A в C и далее в B было бы наименьшим.

Р е ш е н и е. Время прохождения пути $AC + CB$ равно

$$t(x) = \frac{1}{v_1}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{v_2}\sqrt{(d-x)^2+b^2},$$

где x — расстояние A_1C. Надо найти такое значение x, при котором функция $t(x)$ имеет минимум. Производная

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{1}{v_2}\cdot\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$$

обращается в нуль при условии $\frac{1}{v_1}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{v_2}\cdot\frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2+b^2}}$, которое равносильно следующему: $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}=\frac{v_1}{v_2}$, где углы φ_1 и φ_2 указаны на рис. 29. Можно доказать, что при этом условии функция $t(x)$ имеет именно минимум. Итак, для того чтобы время движения из A в B было минимальным, надо точку C выбрать так, чтобы отношение синусов углов φ_1 и φ_2 было равно отношению скоростей v_1 и v_2. Именно такой путь выбирает луч света при движении из A в B.

З а д а ч а 3. Из квадратного листа со стороною a нужно сделать коробку наибольшего объема (причем уголки выбрасываются и швы свариваются, рис. 30).

Р е ш е н и е. Объем $v=(a-2x)^2x$, где x—высота коробки $\left(0<x<\frac{a}{2}\right)$. Производная $v'=a^2-8ax+12x^2$ обращается в нуль в точках $x_1=a/2$ и $x_2=a/6$. Из них только x_2 доставляет объему максимум, потому что при этом $v''=-4a<0$.

О т в е т: $x=a/6$.

42. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке (a, b). Тогда ее график имеет касательную в каждой точке.

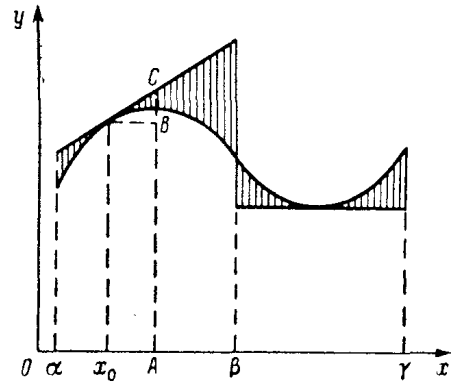

Рис. 31.

Кривая называется *выпуклой (вогнутой) в промежутке* (a, b), если все ее точки лежат ниже (выше) любой ее касательной в этом промежутке. Говорят, что на участке выпуклости кривая обращена вогнутостью в сторону отрицательных ординат, или вниз (рис. 31). Из этого определения следует, что на участке выпуклости, так же как и на участке вогнутости, касательные к графику функции не пересекаются с самим графиком и имеют с ним каждая свою единственную общую точку — точку касания.

Точки, отделяющие выпуклые части графика функции от его вогнутых частей, называются *точками перегиба*. Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает график, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой — над нею.

Для решения вопроса о направлении вогнутости кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, рассмотрим в окрестности точки x_0 знак разности $y-Y$ между ординатой графика функции $y=f(x)$ и ординатой Y точки (x, Y) касательной к этому графику в точке $M_0(x_0, y_0)$. Предположим существование в этой окрестности второй производной $f''(x)$. Величину Y всегда можно представить в виде $Y=AB+BC=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Поэтому разность ординат, преобразованная с помощью формулы конечных приращений, будет равна

$$y-Y=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=[f'(c)-f'(x_0)](x-x_0).$$

Используя еще раз формулу конечных приращений применительно к функции $f'(x)$, получим

$$y - Y = f''(c_1)(x - x_0)(c - x_0),$$

где произведение $(x - x_0)(c - x_0)$ всегда положительно. Следовательно, знак левой части вполне определяется знаком второй производной: если $y'' > 0$, то $y > Y$ и кривая вогнута, если $y'' < 0$, то $y < Y$ и кривая выпукла. Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть в промежутке (a, b) функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая сохраняет знак. Тогда кривая $y = f(x)$ в этом промежутке выпукла (вогнута), если в (a, b) выполнено условие*

$$f''(x) < 0 \quad [f''(x) > 0]. \quad (11)$$

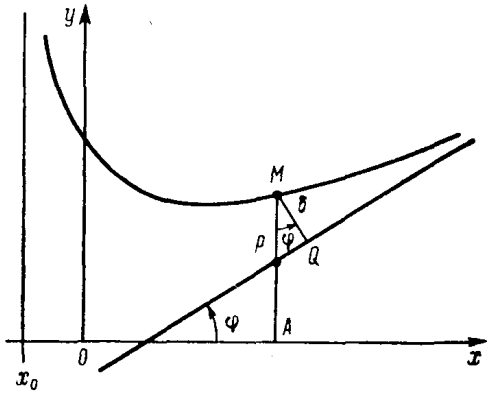

Рис. 32.

Пример 1. Кривая $y = e^{-x}$ всюду вогнута, потому что ее вторая производная $y'' = e^{-x}$ всюду положительна.

Пример 2. Кривая $y = \ln x$ выпукла, потому что $y'' = -1/x^2 < 0$.

Пример 3. Кривая $y = x^3$ выпукла при $x < 0$ и вогнута при $x > 0$, потому что $y'' = 6x < 0$ при $x < 0$ и $y'' > 0$ при $x > 0$. В точке $x_0 = 0$ вторая производная обращается в нуль. Точка перегиба имеет абсциссу $x_0 = 0$.

Пример 4. Кривая $y = x^4$ всюду вогнута в силу определения понятия выпуклости. Однако в точке $x_0 = 0$ вторая производная обращается в нуль и условие (11) нарушено.

Примечание 1. Вторая производная дважды дифференцируемой функции может обратиться в нуль в отдельных точках промежутка выпуклости или вогнутости ее графика (см. пример 4).

Примечание 2. Вторая производная дважды дифференцируемой в (a, b) функции не может обратиться тождественно в нуль ни в каком промежутке выпуклости или вогнутости графика функции. Действительно, если бы в (a, b) имели $f''(x) \equiv 0$, то в силу следствия из теоремы Лагранжа $f'(x) = k$ и $f(x) = kx + b$. Но график линейной функции — прямая линия, не обладает свойством выпуклости или вогнутости. Поэтому $f''(x) \not\equiv 0$ в (a, b).

Если $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то меняет знак и разность $y - Y$, и в точке x_0 налицо перегиб.

Пример 5. График функции $y = x^5$ имеет точку перегиба M_0 с абсциссой $x_0 = 0$, потому что при переходе через точку $x_0 = 0$ вторая производная меняет знак минус на плюс.

В точке перегиба вторая производная может не существовать. Это показывает следующий пример.

Пример 6. Функция задана равенствами $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$ при $-a \leqslant x \leqslant 0$, $y = b - \sqrt{b^2 - x^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant b$. Ее график составлен из дуг окружностей различных радиусов a и b. Точка $x_0 = y_0 = 0$ есть точка перегиба. В ней функция непрерывна, имеет первую производную $y' = 0$, но не имеет второй производной.

43. Асимптоты. Перейдем к изучению бесконечных ветвей графика функции $y = f(x)$, если такие ветви имеются. *Бесконечной ветвью кривой* называется такая ее часть, на которой имеются точки, сколь угодно далекие от начала координат. Например, окружность не имеет бесконечной ветви, а парабола имеет две бесконечных ветви.

Асимптотой бесконечной ветви кривой называется прямая расстояние δ до которой от точки M кривой стремится к нулю когда точка M вдоль этой ветви неограниченно удаляется от начала координат. Если обозначить через $d(0, M)$ расстояние от начала координат 0 до точки M (рис. 32), то

$$\lim \delta = 0 \text{ при } d(0, M) \to \infty. \tag{12}$$

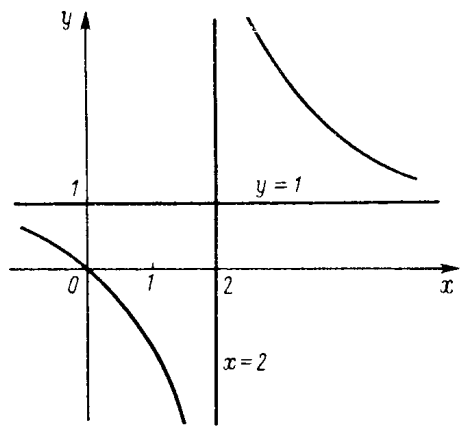

Рис. 33.

Различают асимптоты вертикальные (т. е. параллельные оси ординат) и наклонные (т. е. не параллельные оси ординат).

1. Вертикальные асимптоты. Из определения асимптоты следует, что если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0 + 0$, или при $x \to x_0 - 0$, или при $x \to x_0$, то прямая $x = x_0$ есть асимптота кривой $f(x)$ (см. рис. 32).

Пример 1. График функции $y = \dfrac{x}{x-2}$ имеет асимптоту $x = 2$, потому что $y \to \infty$ как при $x \to 2 + 0$, так и при $x \to 2 - 0$. Для того чтобы прямая была асимптотой, достаточно выполнения одного (любого) из этих условий. В данном случае кривая имеет две бесконечные ветви, для которых прямая $x = 2$ служит единой асимптотой (рис. 33).

Правило нахождения вертикальных асимптот таково: 1) находим точки разрыва функции, 2) исследуем поведение функции при стремлении аргумента слева и справа к каждой из этих точек. Если при этом окажется, что $f(x)$ — функция бесконечно большая, то $x = x_0$ есть уравнение вертикальной асимптоты.

2. Наклонные асимптоты изображаются уравнением вида

$$y = ax + b. \tag{13}$$

Заметим, что если бесконечная ветвь имеет наклонную асимптоту (с углом наклона φ), то вместе с условием (12) будет выполнено условие $\lim PM = 0$ при $x \to \infty$, так как $PM = \frac{\delta}{\cos\varphi}$, где $\cos\varphi = \text{const}$ (см. рис. 32). Здесь величина $PM = AM - AP = f(x) - ax - b$, поэтому имеем

$$\lim [f(x) - ax - b] = 0 \tag{14}$$

при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, т. е. разность ординат кривой и асимптомы есть величина бесконечно малая при стремлении x к ∞. Но тогда и величина $\frac{1}{x}[f(x) - ax - b]$ — бесконечно малая. Поэтому $\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] \to 0$ при $x \to \infty$. Отсюда следует, что

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{15}$$

Зная a, находим величину b из равенства (14):

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]. \tag{16}$$

Если существуют пределы (15) и (16), то кривая имеет наклонную асимптоту, которая изображается уравнением (13). При этом надо различать два случая: $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Пример 2. $y = \frac{x}{x-2}$. Вертикальная асимптота $x=2$ найдена в примере 1. Для нахождения наклонных асимптот вычисляем a и b по формулам (15) и (16):

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = 0, \quad b = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-2} = 1.$$

Следовательно, прямая $y = 1$ есть горизонтальная асимптота как при $x \to +\infty$, так как и при $x \to -\infty$ (см. рис. 33).

Пример 3. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$. По формулам (15) и (16) находим

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \left[1 - \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}\right] = 1,$$

$$b = -2\lim \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\pi \text{ при } x \to +\infty, \\ \pi \text{ при } x \to -\infty. \end{cases}$$

Следовательно, график функции имеет две наклонные асимптоты:

$y = x + \pi$ при $x \to -\infty$ и $y = x - \pi$ при $x \to +\infty$ (рис. 34).

44. Общая схема исследования функции. Пусть дана функция. Можно рекомендовать следующую схему ее исследования: 1) выясним область существования функции, найдем точки разрыва и установим поведение функции вблизи точек разрыва, 2) найдем промежутки возрастания и убывания функции, 3) исследуем функ-

цию на экстремум, 4) найдем промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба, 5) найдем асимптоты и выясним расположение графика функции относительно асимптот, 6) найдем точки пересечения графика функции с осями и другие дополнительные точки, 7) построим график функции.

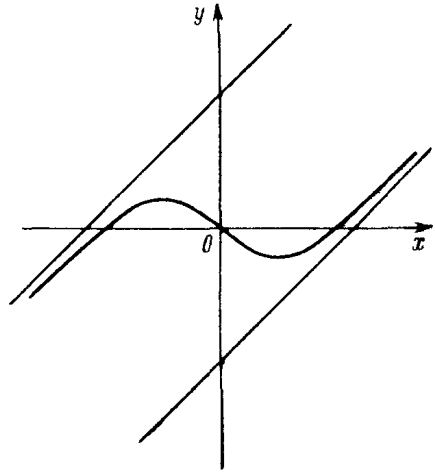

Рис. 34.

При этом полезно установить, является ли данная функция четной или нечетной. Напомним, что функция называется *четной* в промежутке $(-a, a)$, если в нем выполнено условие $f(-x) = f(x)$; график четной функции симметричен относительно оси ординат. Например, $y = \cos x$ или $y = x \sin x$ — четные функции.

Функция называется *нечетной* в $(-a, a)$, если выполнено условие $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Например, $y = x^3$ или $y = x \cos 2x$ — нечетные функции.

Пример. Функция $y = e^{-(x-a)^2}$ всюду непрерывна, положительна. Ее производная $y' = 2(a - x)\, y$ обращается в нуль только в точке $x_0 = a$, в которой функция имеет максимум. Ее вторая производная $y'' = 2y[2(x-a)^2 - 1]$ обращается в нуль только в точках $x_1 = a - \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x_2 = a + \frac{1}{\sqrt{2}}$. В промежутках $-\infty < x < x_1$ и $x_2 < x < \infty$ функция вогнута, в промежутке (x_1, x_2) функция выпукла. Имеется одна горизонтальная асимптота $y = 0$, так как пределы (15) и (16) равны нулю. Точки x_1 и x_2 суть точки перегиба. Кривая симметрична относительно прямой $x = a$. График функции изображен на рис. 35 — это так называемая кривая Гаусса.

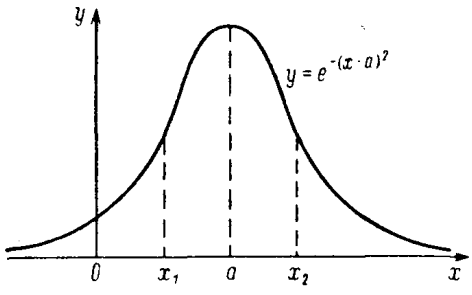

Рис. 35.

45. Кривизна. Наиболее естественной характеристикой искривленности дуги кривой является изменение угла поворота касательной к этой кривой при перемещении точки касания от одного конца дуги к другому.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, которая предполагается дважды дифференцируемой в рассматриваемой области. Пусть A и B — две точки графика, соответствующие значениям аргумента x и $x + \Delta x$. Выберем на кривой начало отсчета дуг — точку N и положительное направление отсчета дуг (например,

направление увеличения абсциссы). Обозначим приращение угла поворота касательной на дуге AB: $\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$, приращение длины дуги * обозначим (рис. 36) $\Delta s = \cup AB = \cup NB - \cup NA$.

Средней кривизной дуги AB называется абсолютная величина отношения угла поворота касательной на дуге AB к длине этой дуги: $k_{ср} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$.

Кривизной кривой в точке A называется предел средней кривизны дуги AB при стремлении длины дуги Δs к нулю: $k = \lim k_{ср}$ при $\Delta s \to 0$, причем $B \to A$.

Следовательно,

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \qquad (17)$$

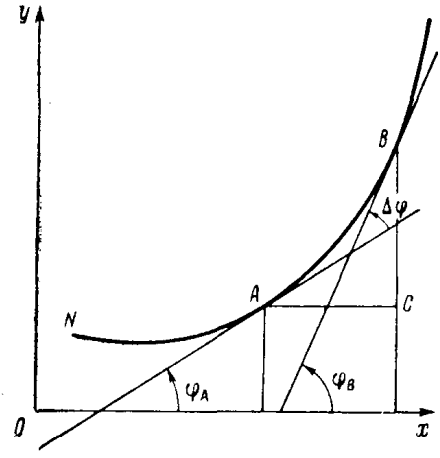

Рис. 36.

Таким образом, кривизна равна абсолютному значению производной угла наклона касательной φ по длине дуги s. Кривизна служит мерой искривленности кривой в бесконечно малой окрестности соответствующей точки.

Пример 1. На прямой $\Delta\varphi = 0$, поэтому $k_{ср} = 0$ и кривизна прямой равна нулю: $k = 0$.

Пример 2. На окружности радиусом R имеем $\Delta\varphi = \alpha$ (рис. 37), $k_{ср} = \frac{\alpha}{\alpha R} = \frac{1}{R}$. Кривизна окружности постоянна и обратна радиусу: $k_{окр} = \frac{1}{R}$.

Вывод формулы кривизны. Дана дважды дифференцируемая функция $y = f(x)$. Пусть по-прежнему N — начало отсчета дуг на графике функции $f(x)$ (см. рис. 36). Обозначим через s длину дуги $s = \cup NA$, где A — точка, имеющая абсциссу x. Длина дуги s является функцией абсциссы x конца этой дуги: $s = s(x)$. Угол наклона касательной φ также является функцией абсциссы точки касания: $\varphi = \varphi(x)$. Предположим, что обе функции $s(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные по x и поэтому непрерывны.

Параметрические уравнения $\varphi = \varphi(x)$, $s = s(x)$ определяют зависимость величины φ от s. Переменная x играет здесь роль параметра. Требуется найти φ'_s. По правилу дифференцирования функции, заданной параметрически, имеем

$$\varphi'_s = \varphi'_x / s'_x. \qquad (18)$$

Найдем числитель и знаменатель правой части формулы (18).

* Здесь мы пользуемся интуитивным представлением длины дуги кривой. Строгое определение этого понятия будет дано в главе IX.

1. Согласно геометрическому значению производной имеем $y' = \operatorname{tg}\varphi$. Следовательно, $\varphi = \operatorname{arctg} y'$ и

$$\varphi'_x = \frac{y''}{1+y'^2}. \tag{19}$$

2. При вычислении производной длины дуги s'_x мы используем следующую лемму, которую примем без доказательства: *предел отношения длины бесконечно малой дуги к стягивающей ее хорде равен единице*: $\lim \smile AB/AB = 1$ *при* $AB \to 0$.

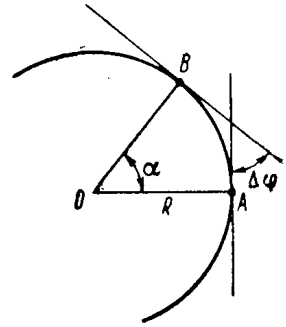

Рис. 37.

Из $\triangle ABC$ (см. рис. 36) по теореме Пифагора следует, что $AB^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ и $\frac{AB}{\Delta x} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$. Для нахождения s'_x рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\smile AB}{\Delta x} = \frac{\smile AB}{AB}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим согласно лемме

$$s'_x = \sqrt{1+y'^2}. \tag{20}$$

Из равенств (18)—(20) следует формула кривизны

$$k = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{21}$$

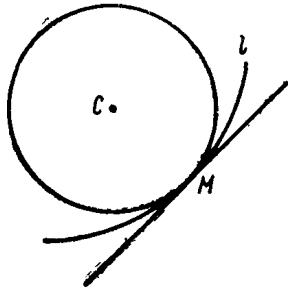

Рис. 38.

Кривизна (по определению) всегда положительна, поэтому знак в правой части формулы (21) выбирается согласно правила: плюс, если $y'' > 0$, т. е. если кривая вогнута; минус, если $y'' < 0$, т. е. если кривая выпукла.

Пример. Найти кривизну параболы $y = ax^2$ $(a > 0)$. Вычисляем первую и вторую производные $y' = 2ax$, $y'' = 2a$ и по формуле (21) получаем

$$k = \frac{2a}{(1+4a^2x^2)^{3/2}}. \tag{22}$$

При $x = 0$ имеем наибольшую кривизну $k = 2a$. При увеличении $|x|$ кривизна k уменьшается.

Введем несколько понятий. *Окружностью кривизны кривой l в точке M* называется окружность, которая обладает следующими свойствами: 1) проходит через точку M и имеет с кривой общую касательную, 2) имеет одинаковое направление вогнутости с

кривой l в окрестности точки M, 3) имеет ту же кривизну, что и кривая l, в точке M, т. е. $k_{\text{окр}} = k_l$ (рис. 38).

Радиусом кривизны R кривой l в точке M называется радиус соответствующей окружности кривизны.

Из формулы $k_{\text{окр}} = k_l$ следует $\frac{1}{R} = k$, т. е. радиус кривизны есть величина обратная кривизне:

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \tag{23}$$

Центром кривизны кривой l в точке M называется центр соответствующей окружности кривизны. Геометрическое место цент-

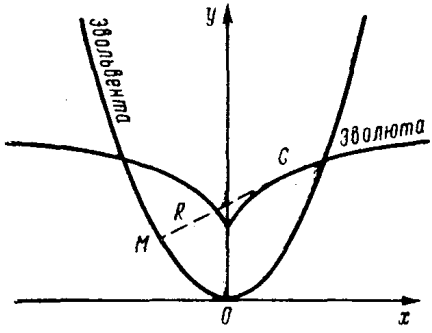

Рис. 39.

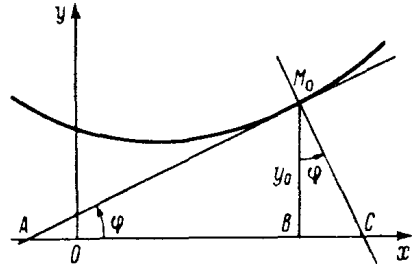

Рис. 40.

ров кривизны данной кривой называется ее *эволютой*. Сама кривая по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой*.

Пример. Радиус кривизны параболы $y = ax^2$ равен $R = (1 + 4a^2x^2)^{3/2}/2a$. Ее эволюта изображена на рис. 39.

46. Касательная, нормаль и связанные с ними отрезки.* Рассмотрим график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и точку $M_0(x_0, y_0)$ на нем (рис. 40). Проведем касательную (см. п. 27) к графику в точке M_0, а также нормаль к этой кривой в точке M_0. *Нормалью к кривой в данной точке* называют прямую, проходящую через M_0 перпендикулярно касательной в точке M_0. Составим уравнения этих прямых. Если в уравнении пучка прямых (см. п. 72) с центром в точке M_0 $y - y_0 = k(x - x_0)$ положить $k = f'(x_0) = y'_0$ то получим соответственно с определением касательной уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{24}$$

* Пункты 46 и 47 изучаются после п. 72.

Точно так же при $k = -\frac{1}{y'_0}$ получим уравнение нормали

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (25)$$

Пример 1. Если $y = \ln x$ и $x_0 = 1$, то имеем уравнение касательной $y = x - 1$ и уравнение нормали $y = -x + 1$.

Пусть касательная пересекает ось абсцисс в точке A, а нормаль — в точке C (см. рис. 40).

Длиной касательной T называется длина отрезка AM_0. *Длиной нормали* N называется длина отрезка M_0C. *Подкасательной* называется отрезок AB; его длина обозначается s_T. *Поднормалью* называется отрезок BC; его длина обозначается s_N.

Угол BM_0C (см. рис. 40) равен углу наклона касательной φ и тангенс его равен $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0) = y'_0$.

Отсюда следуют почти очевидные равенства

$$\begin{aligned} s_T &= |AB| = |y_0 \operatorname{ctg}\varphi| = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right|, \\ s_N &= |BC| = |y_0 \operatorname{tg}\varphi| = |y_0 y'_0|, \\ T &= \sqrt{(AB)^2 + (BM_0)^2} = \left|\frac{y_0}{y'_0}\right| \sqrt{1 + y'^2_0}. \\ N &= \sqrt{(M_0B)^2 + (BC)^2} = |y_0| \sqrt{1 + y'^2_0}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Пример 2. Если $y = e^x$, то $y' = e^x$ и $s_T = 1$.

Пример 3. Если $y^2 = 2px$, то $2yy' = 2p$ и $s_N = p$.

47. Приближенное вычисление вещественных корней уравнения. Число x_* называется *корнем функции* $f(x)$, если равно нулю значение этой функции при $x = x_*$. Это число x_* вместе с тем называется *корнем уравнения*

$$f(x) = 0. \qquad (27)$$

Постановка вопроса. Дано уравнение (27). Требуется вычислить действительные корни этого уравнения с заданной точностью. Это значит, что для каждого корня x_* требуется найти его приближенное значение x_n, удовлетворяющее условию $|x_n - x_*| < \Delta$, где Δ — данное число, называемое предельной абсолютной погрешностью вычисления (см. п. 50).

Задача решается в два этапа. На первом этапе, называемом этапом отделения корней, находят промежутки вещественной оси, в каждом из которых содержится только один корень данного уравнения. Отделение корней может быть выполнено, например, путем построения графика $f(x)$, который позволит найти нужные промежутки.

Пусть (a, b) — один из таких промежутков. Предположим, что внутри промежутка функция изменяется монотонно (возрастает

или убывает) и сохраняет направление вогнутости, а на концах промежутка функция принимает значения разных знаков

$$f(a)f(b)<0. \tag{28}$$

На втором этапе выполняют приближенное вычисление корней с заданной точностью. Ниже рассмотрены некоторые методы этих вычислений.

1. Способ проб. Корни уже отделены, рассматривается промежуток (a, b), с указанным выше свойством. Берем любое x_1 из промежутка (a, b), например $x_1 = (a + b)/2$, и вычисляем значение функции $f(x_1)$. В силу монотонности $f(x)$ в (a, b) в одном из промежутков (a, x_1) или (x_1, b) функция меняет знак, если

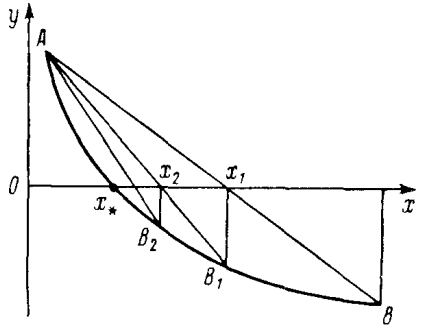

Рис. 41.

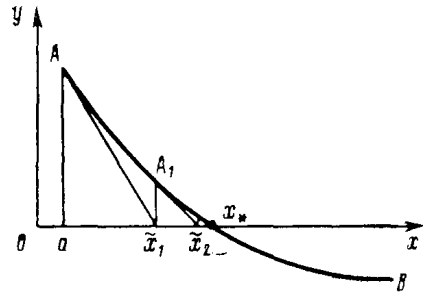

Рис. 42.

$f(x_1) \neq 0$. Пусть это будет (a, x_1). Тогда берем $x_2 = (a + x_1)/2$, вычисляем $f(x_2)$ и выбираем тот из промежутков (a, x_2) или (x_2, x_1), в котором $f(x)$ меняет знак. Продолжать этот процесс следует до тех пор, пока длина элементарного промежутка не станет меньше Δ.

2. Способ хорд. Рассмотрим промежуток (a, b), в котором $f(x)$ монотонна и выполнено условие (28). Геометрическое содержание идеи метода хорд таково: проводим хорду AB (рис. 41), находим точку x_1 пересечения хорды с осью абсцисс и соответствующую точку B_1 на кривой. Далее проводим хорду AB_1, находим x_2 и B_2 и т. д. Можно доказать, что $\lim x_n = x_*$ при $n \to \infty$.

Соответствующие аналитические выкладки таковы. Уравнение хорды AB имеет вид $y = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Решая его совместно с уравнением оси абсцисс $y = 0$, получим $x_1 = a - f(a) \times \times \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}$.

Предположим для определенности, что $f(a)>0$, $f(b)<0$ и $f''(x)>0$. Тогда, заменив в правой части последнего равенства b на x_1, получим x_2. Продолжая рассуждения, приходим к вычислительной формуле способа хорд

$$x_{n+1} = a - f(a)\frac{x_n - a}{f(x_n)-f(a)}. \tag{29}$$

3. Способ касательных (способ Ньютона). Пусть промежуток (a, b) столь мал, что выполнено условие (28) и $f''(x)$ сохраняет знак. Идея метода имеет следующее геометрическое содержание. Проводим касательную к графику функции в той из точек A или B, в которой выполнено условие $f(x)f''(x) > 0$. Касательная пересечет ось Ox в точке с абсциссой $\tilde{x}_1$ (рис. 42). Этой точке соответствует точка A_1 на кривой. Строим касательную в точке A_1, находим $\tilde{x}_2$ и A_2 и т. д. Можно доказать, что $\lim \tilde{x}_n = x_*$ при $n \to \infty$.

Геометрическому построению соответствуют такие аналитические выкладки. Уравнение касательной в точке A имеет вид $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Абсцисса точки пересечения касательной с осью абсцисс $\tilde{x}_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Если $f(a) > 0$, то, заменив a на $\tilde{x}_1$ получим $\tilde{x}_2$ и т. д. Таким образом, приходим к вычислительной формуле Ньютона

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - \frac{f(\tilde{x}_n)}{f'(\tilde{x}_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots, \tilde{x}_0 = a). \tag{30}$$

4. Комбинированный способ. Заметим, что точки x_n и $\tilde{x}_n$ всегда лежат по разные стороны от x_*. Поэтому ведем расчет по формулам метода хорд и метода касательных параллельно, увеличивая n до тех пор, пока не будет выполнено условие $|x_n - \tilde{x}_n| < \Delta$. Тогда $x_n \approx x_*$ или $\tilde{x}_n \approx x_*$.

Пример. $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Пусть $a = 0$, $b = 1$. Способ хорд приводит к следующим вычислениям:

1) $f(0) = 2$, $f(1) = -3$ и $x_1 = -\frac{2}{-3-2} = 0{,}4$, причем $f(0{,}4) = -0336$,

2) $a = 0$; $x_1 = 0{,}4$; $x_2 = 0{,}342$.

Способ касательных дает следующее: в точке a имеем $f(a) > 0$ и $f''(a) > 0$. Поэтому $\tilde{x}_1 = -\frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$, $f(\tilde{x}_1) > 0$. Следовательно, $0{,}333 < x_* < 0{,}342$.

5. Способ итераций.* Приведем уравнение (27) к виду $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ удовлетворяет в (a, b) условию $|\varphi'(x)| < 1$, если это приведение возможно. Вычислительная формула метода имеет вид

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{31}$$

где x_0 — любое число из промежутка (a, b), в котором содержится корень. Можно доказать, что $\lim x_n = x_*$ при $n \to \infty$.

---

* Подробное изложение см. в работе И. П. Мысовских «Лекции по методам вычислений». М., Физматгиз, 1962.

Пример. Уравнение $x^3 - 6x + 2 = 0$ можно записать в виде $x = \frac{1}{6}(x^3 + 2) \equiv \varphi(x)$. В промежутке $(0,1)$ имеем $0 < \varphi'(x) = \frac{1}{2}x^2 < 1$. Вычисления ведем по формуле $x_{n+1} = \frac{1}{6}(x_n^3 + 2)$. Положив $x_0 = 0$, получим $x_1 = \frac{1}{3}$, затем $x_2 = \frac{55}{162}$ и т. д.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

48. Понятие дифференциала функции. Пусть $y = f(x)$ — функция независимой переменной x дифференцируема в рассматриваемом промежутке. Фиксируем в этом промежутке точку x. Если дать аргументу x приращение Δx, то функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется произведение производной $f'(x)$, вычисленной в точке x_0, на приращение Δx независимой переменной x.* Он обозначается символом

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x. \tag{1}$$

Под дифференциалом независимой переменной понимают ее приращение

$$dx = \Delta x. \tag{2}$$

Заметим, что при $y = x$ формула (1) переходит в (2), так как $y' = 1$. Учитывая равенство (2), формулу (1) можно переписать в виде

$$dy = f'(x_0)\,dx. \tag{3}$$

Например, если $y = \cos x$, то $dy = -\sin x\,dx$.

Определение дифференциала носит формальный характер. Выясним содержание этого понятия. Функция $f(x)$ по условию дифференцируема, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Поэтому разность α между переменной $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и ее пределом $f'(x)$ есть величина бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда следует равенство

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x. \tag{4}$$

Эта формула связывает приращение функции и дифференциал функции. Она показывает, что приращение дифференцируемой функции всегда может быть представлено в виде суммы двух слагаемых dy и $\alpha\Delta x$, где α — бесконечно малая при стремлении Δx к нулю:

$$\Delta y = dy + \alpha\,\Delta x. \tag{5}$$

Если $f'(x) \neq 0$ в рассматриваемой точке x_0, то *дифференциал функции есть главная часть приращения функции* в том смысле, что 1) приращение функции Δy и дифференциал функции dy при стремлении Δx к нулю есть эквивалентные бесконечные малые

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\alpha}{y'}\right) = 1. \qquad (6)$$

Следовательно (см. п. 19), разность $\Delta y - dy$, т. е. $\alpha \Delta x$, есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с dy;

2) дифференциал функции dy есть величина, пропорциональная Δx; коэффициентом пропорциональности служит $f'(x)$. Это существенное свойство дифференциала важно в вычислительном отношении.

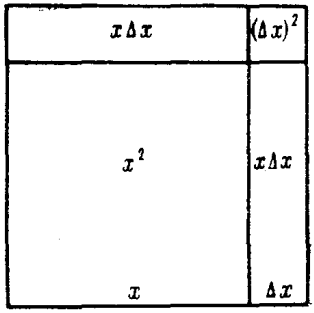

Рис. 43.

Пример. Если $y = x^2$, то $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. Здесь первое слагаемое правой части $2x\Delta x = dy$ есть дифференциал функции, а второе равно $(\Delta x)^2 = \alpha \Delta x$, где $\alpha = \Delta x$ (рис. 43).

Выше установлено, что при стремлении Δx к нулю дифференциал функции и приращение функции разнятся на бесконечно малую величину высшего порядка по сравнению с dy. Если пренебречь этой бесконечно малой, то придем к приближенному равенству

$$\Delta y \approx dy, \qquad (7)$$

которое тем точнее, чем меньше $|\Delta x|$. Суть этого равенства состоит в том, что при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ приращение функции с большой степенью точности можно заменить дифференциалом функции. Это положение лежит в основании многих приложений математического анализа при исследовании явлений природы.

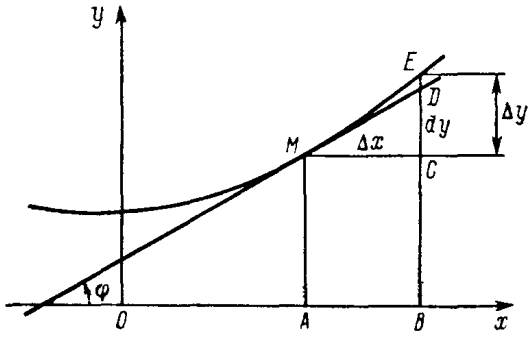

Рис. 44.

С физической точки зрения дифференциал функции равен тому приращению, которое получила бы функция, если бы на участке от x до $x + \Delta x$ она изменялась бы с постоянной скоростью, равной ее значению в точке x, т. е. со скоростью $f'(x)$.

Геометрическая интерпретация дифференциала функции. Рассмотрим график дифференцируемой функции

$y = f(x)$ и проведем касательную к графику в точке с абсциссой x (рис. 44). Здесь приращение независимой переменной представлено величиной отрезка $MC = AB = \Delta x$. Приращение функции есть величина отрезка $CE = BE - BC = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$. Дифференциал функции представлен величиной отрезка $CD = MC \operatorname{tg} \varphi = \Delta x \cdot y' = dy$. Формуле (5) соответствует геометрическое равенство $CE = CD + DE$. Следовательно, *дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции.*

49. Свойства дифференциала. Дифференциал функции лишь множителем dx отличается от производной. Поэтому имеют место свойства дифференциалов, аналогичные свойствам производных.

Дифференциал суммы двух дифференцируемых функций равен сумме дифференциалов этих функций:

$$d(u + v) = du + dv.$$

Дифференциал произведения двух дифференцируемых функций u и v определяется формулой

$$d(uv) = u\,dv + v\,du. \tag{8}$$

Докажем, например, формулу (8). Если $y = uv$, то

$$dy = y'dx = (u'v + uv')\,dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu,$$

потому что $v'dx = dv$, $u'dx = du$.

Аналогично доказываются и другие формулы, в частности формула, определяющая дифференциал частного:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Теорема (о дифференциале сложной функции). Пусть функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ образуют сложную функцию $y = f(\varphi(t))$, где t — независимая переменная. По определению дифференциала функции имеем $dy = y'_t\,dt$. Здесь $y'_t = y'_x x'_t$. Следовательно,

$$dy = y'_x x'_t\,dt = y'_x\,dx, \tag{9}$$

где $dx = x'_t\,dt$. Сравнивая формулы (3) и (9), приходим к следующему утверждению: *формула $dy = y'_x\,dx$ имеет место как в случае, когда x — независимая переменная (тогда $dx = \Delta x$), так и в случае, когда x является функцией независимой переменной t (тогда $dx = x'_t\,dt$).*

Таким образом, форма первого дифференциала одна в обоих случаях, но содержание ее различно. Это свойство неизменности формы выражения dy называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Из равенства (9) следует, что производная равна отношению соответствующих дифференциалов:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}. \tag{10}$$

50. Формулы приближенных вычислений. Перепишем формулу (7), положив в ней $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $dy = f'(x_0)(x - x_0)$. Получим

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{11}$$

Эта приближенная формула тем точнее, чем меньше $|x - x_0|$. Она является источником многих формул приближенных вычислений. Формула (11) позволяет вычислить приближенное значение $f(x)$ в точке x, близкой к x_0, если известно значение функции в точке x_0.

Пример 1. $\sin 31° = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} \approx$ $\approx 0{,}5150$.

Если в формуле (11) положить $x_0 = 0$, то получим ее частный случай

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x. \tag{12}$$

Равенство (12) тем точнее, чем меньше $|x|$. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2. Если $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$, то $f'(0) = \frac{1}{n}$ и согласно (12) имеем

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}. \tag{13}$$

В частности, $\sqrt{33} = 2\sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}} \approx 2\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}\right) = 2\frac{1}{80}$.

Пример 3. При $f(x) = \sin x$ получаем

$$\sin x \approx x. \tag{14}$$

Пример 4. При $f(x) = \ln(1 + x)$ получаем $\ln(1 + x) \approx x$.
Пример 5. При $f(x) = \operatorname{arctg} x$ получаем $\operatorname{arctg} x \approx x$.

Пусть некоторая величина имеет точное значение x_0 и приближенное значение x. *Абсолютной погрешностью приближенного значения* x называется абсолютная величина разности $x - x_0$ между x и ее точным значением x_0, т. е. $|x - x_0|$.

Предельной, или *максимальной*, *абсолютной погрешностью величины* x называется положительное число Δ_x, не меньшее $|x - x_0|$. Поэтому имеем

$$|x - x_0| \leqslant \Delta_x.$$

Пример 6. При измерении длины стержня при помощи масштабной линейки с миллиметровыми делениями предельная абсолютная ошибка измерения величины x_0 равна $\Delta_x = 1$ мм. При этом мы не знаем x_0 и $x - x_0$. Мы не знаем истинной ошибки измерения, но знаем ее верхнюю границу, а именно величину Δ_x.

Пример 7. При измерении напряжения электрического тока при помощи вольтметра класса 0,5 со стовольтовой шкалой прибора имеем $\Delta_E = 0{,}5$ В.

Задача. Найти предельную абсолютную погрешность Δ_y величины y, определяемой равенством $y = f(x)$, где $f(x)$ — данная дифференцируемая функция, если известно: x — приближенное значение величины x_0 и Δ_x — предельная абсолютная погрешность x.

Решение. Согласно определению предельной абсолютной погрешности имеем $\Delta_x \geqslant |\Delta x|$, где $\Delta x = x - x_0$, и $\Delta_y \geqslant |\Delta y|$, где $\Delta y = y - y_0$.

Если воспользоваться для нахождения Δy приближенной, но удобной для вычисления формулой (7), то получим приближенное равенство $\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x$. Желая найти величину Δ_y, заменим сомножители $f'(x)$ и Δx их наибольшими по абсолютной величине значениями и придем к неравенству $|\Delta y| \leqslant |f'(x)|\,\Delta_x$. Следовательно, можно принять правую часть этого неравенства за Δ_y:

$$\Delta_y \approx |f'(x)|\,\Delta_x. \tag{15}$$

Пример 8. Пусть $v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$, где $d = 10 \pm 0{,}2$, т. е. $\Delta_d = 0{,}2$. Тогда $v = \frac{1}{6}\pi \cdot 10^3 \approx 520$, $\Delta_v = |v'_d|\,\Delta_d = \frac{1}{2}\pi d^2\,\Delta_d \approx 31$. Окончательно имеем $v = 520 \pm 31$ и $409 < v < 551$.

51. Формула Тейлора.*

Лемма. *Всякий многочлен*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{16}$$

можно разложить по возрастающим степеням разности $x - x_0$, *где* x_0 — *любое фиксированное число.*

Доказательство. Обозначим $z = x - x_0$, тогда $x = x_0 + z$ и $f(x) = a_0 + a_1(x_0 + z) + \ldots + a_n(x_0 + z)^n$. Если в этом равенстве выполнить действие возведения в степень, перегруппировать члены по возрастающим степеням z и привести подобные члены, то получим выражение вида $f(x) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_n z^n$. Заменив здесь z на $x - x_0$, получим требуемое представление многочлена по возрастающим степеням разности $x - x_0$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots + b_n(x - x_0)^n. \tag{17}$$

Для нахождения коэффициентов b_k дифференцируем n раз тождество (17):

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + \ldots + nb_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2b_2 + 2 \cdot 3(x - x_0) + \ldots + (n-1)\,nb_n(x - x_0)^{n-2}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,b_n.$$

* Брук Тейлор (1685—1731) — английский математик.

При $x = x_0$ получим $f(x_0) = b_0$, $f'(x_0) = b_1$, $f''(x_0) = 2b_2$, . . .

Следовательно, коэффициенты разложения (17) определяются при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ формулой

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \tag{18}$$

где $k! = 1 \cdot 2 \ldots k$, $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Подставив эти выражения в равенство (17), получим *формулу Тейлора для многочлена*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{19}$$

Ее можно изобразить сокращенно так:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{20}$$

Формула (19) пригодна для изучения функции $f(x)$ в окрестности точки x_0, и в этом состоит ее значение. Если $|x - x_0|$ величина достаточно малая, то степени этой величины будут еще меньше, и формула Тейлора (19) дает разложение приращения функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ по возрастающим степеням приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k. \tag{21}$$

Пример. Требуется составить таблицу значений функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ при значениях x, близких к $x_0 = 1$. Для этого целесообразно представить $f(x)$ в виде соответствующего многочлена Тейлора (19): $f(x) = 1 + (x - 1)^3$. Положив, например, $x = 1, 2$, получим $f(1, 2) = 1 + (0, 2)^3 = 1{,}008$.

Формула Тейлора в общем случае. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, вообще не являющуюся многочленом. Предположим, что она имеет в некоторой точке x_0 производные всех порядков до n-го включительно. Тогда по образцу (19) составим многочлен

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{22}$$

и назовем его *многочленом Тейлора функции* $f(x)$. В частном случае, когда $f(x)$ есть многочлен степени n, согласно (19) получим $f(x) \equiv T_n(x)$. В общем случае это тождество не имеет места. Обозначим символом $R_n(x)$ разность

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x). \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ или

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x). \tag{24}$$

Формула (24) называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$, а величина $R_n(x)$, определяемая равенством (23), называется *остаточным членом формулы Тейлора.*

Если обозначить $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, то из (24) следует такое представление формулы Тейлора:

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k + R_n(x). \tag{25}$$

Произведение $f^{(k)}(x_0)(\Delta x)^k$ называется *дифференциалом k-го порядка функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и обозначается символом

$$d^k y = f^{(k)}(x_0)(\Delta x)^k. \tag{26}$$

С помощью этого обозначения формуле (25) можно придать вид

$$\Delta y = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k y}{k!} + R_n(x). \tag{27}$$

Во всех формах записи (24), (25) и (27) формула Тейлора дает разложение приращения функции Δy по возрастающим степеням приращения аргумента Δx.

Значение формулы Тейлора состоит в том, что многочлен $T_n(x)$ приближенно представляет функцию $f(x)$ для тех значений x, для которых величина $|R_n(x)|$ достаточно мала.

Выведем формулу остаточного члена формулы Тейлора. Предположим, что функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные всех порядков до $n+1$-го включительно. Введем в рассмотрение величину $q(x)$, положив

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}q(x). \tag{28}$$

Из (24) и (28) следует соотношение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}q(x). \tag{29}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(z)$, определив ее равенством

$$\varphi(z) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k - \frac{(x-z)^{n+1}}{(n+1)!}q(x) \tag{30}$$

в промежутке $x_0 \leqslant z \leqslant x$ (или $x \leqslant z \leqslant x_0$, если $x < x_0$). Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля в указанном промежутке. В частности, согласно (29) имеем $\varphi(x_0) = 0$, а согласно (30) имеем $\varphi(x) = 0$, поэтому $\varphi(x_0) = \varphi(x)$. Существует производная $\varphi(z)$ по переменной z; она равна

$$\varphi'(z) = -f'(z) + f'(z) - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n + \\ + \frac{(x-z)^n}{n!} q(x) = \frac{(x-z)^n}{n!}[q(x) - f^{(n+1)}(z)].$$

Согласно заключению теоремы Ролля применительно к $\varphi(z)$, в промежутке между x_0 и x существует число c такое, что $\varphi'(c) = 0$. Отсюда следует, что $q(x) = f^{(n+1)}(c)$. Заменим в (28) $q(x)$ найденным выражением, получим *формулу остаточного члена в форме Лагранжа*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{31}$$

где $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, потому что $0 < \frac{c-x_0}{x-x_0} < 1$. Структура формулы (31) такая же, как и у других членов формулы Тейлора (24), но там производная берется в точке x_0, а в остаточном члене она берется в точке c, не совпадающей с x_0 и зависящей от x.

Формула Тейлора (24) с остаточным членом в форме (31) является обобщением формулы конечных приращений Лагранжа, потому что последняя получается из (24) при $n = 0$.

Замечание. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные всех порядков, которые ограничены по модулю сверху $|f^{(n)}(x)| < M$, то имеет место формула

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Действительно, при стремлении n к бесконечности переменная $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ стремится к нулю (см. пример 2 п. 20, где рассмотрен случай $x_0 = 0$; при любом x_0 это утверждение доказывается аналогично). Величина $f^{(n+1)}(c)$ из формулы (31) по условию ограничена по модулю сверху. Произведение ограниченной $f^{(n+1)}(c)$ на бесконечно малую $\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$, как известно, есть величина бесконечно малая. Поэтому согласно равенству (31) величина $R_n(x)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

52. Примеры. Частным случаем формулы Тейлора, соответствующим условию $x_0 = 0$, является *формула Маклорена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x). \tag{32}$$

Разложим по этой формуле некоторые элементарные функции.

1. Пусть $f(x)=e^x$; тогда $f^{(k)}(x)=e^x$ при любом натуральном k и при любом x. В частности, при $x=0$ имеем $f(0)=1$ и $f^{(k)}(0)=1$. По формуле (32) получим разложение функции e^x:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}. \tag{33}$$

2. Если $f(x)=\sin x$, то $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$ и $f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}$. Поэтому $f^{(2s)}(0)=0$ и $f^{(2s-1)}(0)=(-1)^{s-1}$.

Положив в формуле (32) наибольшее $k=2n-1$, получим разложение $\sin x$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin(\theta x+n\pi). \tag{34}$$

3. Аналогично при $f(x)=\cos x$ имеем $f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0)=0$ при $k=2s-1$, $f^{(k)}(0)=(-1)^s$ при $k=2s$. По формуле (32) получим

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\theta x+n\pi+\frac{\pi}{2}\right). \tag{35}$$

4. Бином Ньютона. Пусть $f(x)=(1+x)^n$, где n — натуральное число. Последовательно дифференцируя $f(x)$, получим

$$f'(x)=n(1+x)^{n-1},\ \ldots,\ f^{(k)}(x)=n(n-1)\ldots$$

$$\ldots(n-k+1)(1+x)^{n-k},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=n!$$

Производные порядка выше n все равны нулю. По формуле (32) получим тождество

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k+\ldots+x^n, \tag{36}$$

называемое *биномом Ньютона*. С помощью обозначения п. 31 бином Ньютона можно записать так:

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+x^n.$$

Равенства (33)—(36) верны при всех значениях x.

53. Исследование функции на экстремум с помощью формулы Тейлора. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз (см. п. 31) в окрестности точки x_0 и ее первые n произ-

водных равны нулю в точке x_0, а $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Формула Тейлора (25) с остаточным членом в форме (31) примет вид

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f^{(n+1)}(c)\frac{(\Delta x)^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (37)$$

Заметим, что знаки величин $f^{(n+1)}(c)$ и $f^{(n+1)}(x_0)$ совпадают при достаточной близости точек x и x_0, так как $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна. Наличие или отсутствие экстремума функции $f(x)$ в точке x_0 зависит от знака величины Δy слева и справа от точки x_0. Известно, что если $\Delta y < 0$ при всех достаточно малых $|\Delta x|$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если $\Delta y > 0$, то — минимум, если же Δy принимает значения разных знаков в окрестности точки x_0, то в точке x_0 функция экстремума не имеет (см. п. 39).

Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. Если $n+1$ — число четное и $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то согласно (37) имеем $\Delta y > 0$. Следовательно, x_0 — точка минимума $f(x)$.

Случай 2. Если $n+1$ — число четное и $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, то $\Delta y < 0$ и x_0 — точка максимума $f(x)$.

Случай 3. Если $n+1$ — число нечетное, то Δy меняет знак (при переходе x через точку x_0) вместе с величиной $(\Delta x)^{n+1}$ и в точке x_0 нет экстремума.

Пример. Если $y = x^4$, то $y' = 4x^3$, $y'' = 12x^2$, $y''' = 24x$, $y^{(4)} = 24$. В точке $x_0 = 0$ функция имеет минимум, так как выполнены условия 1-го случая $n+1 = 4$ и $y^{(4)} > 0$.

Глава III

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

§ 8. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

54. Три формы комплексного числа. Формулы Эйлера. Из курса элементарной алгебры известно, что любое комплексное число z можно представить в *алгебраической форме* $z = x + iy$ и в *тригонометрической форме* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Здесь x есть реальная часть комплексного числа z (рис. 45), y — коэффициент при его мнимой части, $r = |z|$ — модуль z, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ — аргумент z, причем различные значения аргумента отличаются на $2k\pi$, где k — целое число. Под главным значением аргумента $\arg z$ понимается значение φ, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Таким образом, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$.

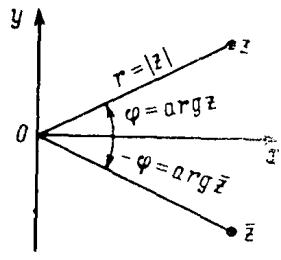

Рис. 45.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Из равенства $z_1 = z_2$ следует, что равны модули этих чисел $|z_1| = |z_2|$, а их аргументы могут отличаться слагаемым, кратным 2π, т. е. $\operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + 2k\pi$.

Покажем, что комплексное число z можно представить в так называемой *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi}, \tag{1}$$

где r и φ — те же, что и в тригонометрической форме.

Для этого ниже изложены лишенные строгости рассуждения, приводящие к так называемой *формуле Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{2}$$

Строгий вывод этой формулы содержится в теории рядов (см. п. 217).

Рассмотрим комплексную функцию вещественного аргумента $w(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$. По определению производная такой функции равна $w' = (\cos\varphi)' + i(\sin\varphi)' = -\sin\varphi + i\cos\varphi$. Поэтому имеем $w' = i(\cos\varphi + i\sin\varphi) = iw$. Функция w удовлетворяет дифференциальному уравнению $w' = iw$, из которого следует (так же, как в п. 35), что $w = ce^{i\varphi}$. При $\varphi = 0$ имеем по условию $w = 1$, поэтому $c = 1$, а $w = e^{i\varphi}$. Сравнив этот результат с исходным представлением $w(\varphi)$, получим формулу (2).

В сущности равенство (2) выражает естественное определение показательной функции $e^{i\varphi}$ с чисто мнимым показателем.

Представление комплексного числа в показательной форме (1) получается из тригонометрической формы путем замены $\cos\varphi + i\sin\varphi$ на $e^{i\varphi}$ согласно равенству (2). Таким образом, всякое комплексное число может быть представлено в трех формах:

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}. \tag{3}$$

Примеры. $z_1 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{\pi i}$,

$$z_2 = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}.$$

Если в (2) заменить φ на $-\varphi$, то получим формулу

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \tag{4}$$

Путем сложения, а затем вычитания равенств (2) и (4) последовательно получаем равенства

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi, \quad e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi,$$

из которых вытекают *формулы Эйлера* *

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{5}$$

Формулы Эйлера (2), (4) и (5) связывают тригонометрические функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ вещественного аргумента φ с показательными функциями $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$ чисто мнимого аргумента.

55. Примеры функций комплексного переменного. По определению под комплексной *функцией* $w(z)$ *комплексного аргумента* z на множестве A понимается закон соответствия, согласно которому каждому значению z из A отвечает определенное значение w. Пусть областью изменения функции w является множество B точек плоскости комплексной переменной $w = u + iv$.

Геометрически функция $w(z)$ есть отображение (преобразование) множества A комплексной переменной $z = x + iy$ на множество B комплексной переменной w. На рис. 46 изображены эти множества для функции $w = z^2$, определенной в секторе A единичного круга.

---

* Леонард Эйлер (1707—1783) — выдающийся швейцарский математик. Большую часть своей жизни работал в России.

В качестве примеров ниже рассмотрены три функции комплексной переменной.

1. *Показательная функция комплексного аргумента* $z = x + iy$ определяется равенством

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \tag{6}$$

Отсюда следует, что $|e^z| = e^x$, $\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi$.

Выведем формулу $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Известно, что при умножении комплексных чисел их модули переумножаются, а аргументы складываются. Поэтому согласно (6) имеем

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y)} = e^{z_1 + z_2}.$$

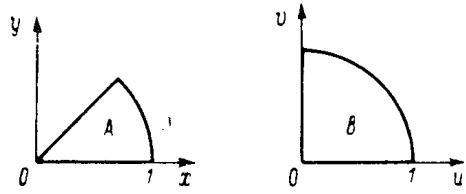

Рис. 46.

2. *Логарифмическая функция* $w = \operatorname{Ln} z$ *комплексного аргумента* z по определению есть показатель степени, в которую надо возвысить основание e, чтобы получить z, т. е.

$$w = \operatorname{Ln} z, \text{ если } e^w = z. \tag{7}$$

Положив в (7) $z = re^{i\varphi}$, $w = u + iv$, получим равенство $e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$, из которого следует, что 1) $e^u = r$ и $u = \ln r = \ln |z|$, 2) $v = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$

Поэтому логарифм комплексного аргумента имеет такое аналитическое выражение:

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i (\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Логарифм комплексного числа есть функция многозначная. Ее главное значение $\ln z$ соответствует условию $k = 0$.

Пример. Вычислить $\operatorname{Ln}(-1)$ и $\ln(-1)$. Для этого находим модуль и аргумент числа $z = -1$. Имеем $|z| = 1$, $\arg z = \pi$. По формуле (8) получаем

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i (\pi + 2k\pi) = \pi i (2k + 1).$$

При $k = 0$ имеем $\ln(-1) = \pi i$. Желая проверить последнее равенство, вычислим $e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. Следовательно, результат верен.

3. *Комплексная степень комплексного числа* определяется равенством

$$z^{z_1} = e^{z \operatorname{Ln} z}. \tag{9}$$

Пример. $(-1)^i = e^{i \operatorname{Ln}(-1)} = e^{-\pi(2k+1)}$.

В частности, если в равенстве (9) положить $z_1 = \frac{1}{n}$, то получим известную формулу корня степени n из комплексного числа

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{\frac{i \arg z + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{10}$$

56. Целые рациональные функции. *Целой рациональной функцией* (многочленом или полиномом) *комплексного аргумента* называется функция

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{11}$$

с комплексными коэффициентами a_0, a_1, ..., a_n, причем $a_0 \neq 0$.

Два многочлена $f(z)$ и $g(z)$ степени n называются равными, если равны их значения при любом z:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n.$$

Отсюда следует равенство соответствующих коэффициентов: $a_0 = b_0$, ..., $a_n = b_n$. Действительно, если в данном тождестве положить $z = 0$, то получим равенство $a_n = b_n$. Дифференцируя данное тождество (по правилу дифференцирования многочленов от вещественного аргумента) и полагая $z = 0$, последовательно получим $a_{n-1} = b_{n-1}$, ..., $a_0 = b_0$.

Числа $z = x + iy = re^{i\varphi}$ и $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$ называются *комплексно-сопряженными*. Они отличаются только знаком аргумента и поэтому изображаются точками, расположенными симметрично относительно вещественной оси (см. рис. 45).

Теорема 1. *Одинаковые арифметические действия над комплексно-сопряженными числами приводят к комплексно-сопряженным результатам.*

Действительно, пусть даны числа $z = a + ib$ и $z_1 = a_1 + ib_1$. Их сумма равна $z + z_1 = (a + a_1) + i(b + b_1) = z_2$, сумма комплексно-сопряженных слагаемых равна $\bar{z} + \bar{z}_1 = (a + a_1) - i(b + b_1) = \bar{z}_2$. Произведение чисел $z = re^{i\varphi}$ и $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ равно $zz_1 = rr_1 e^{i(\varphi+\varphi_1)} = z_3$. Произведение комплексно-сопряженных чисел равно $\bar{z}\bar{z}_1 = rr_1 e^{-i(\varphi+\varphi_1)} = \bar{z}_3$.

Аналогично доказывается теорема для разности и для частного.

Следствие 1. Многочлен (11) с вещественными коэффициентами a_0, a_1, ..., a_n в комплексно-сопряженных точках $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ принимает комплексно-сопряженные значения

$$f(z) = f(a + ib) = u + iv,\ f(\bar{z}) = f(a - ib) = u - iv. \tag{12}$$

Действительно, вычисление значений многочлена $f(z)$ в точках $a + ib$ и $a - ib$ состоит в последовательном выполнении опера-

ций умножения и сложения комплексных чисел, а также операции умножения комплексного числа на вещественные числа (именно на коэффициенты многочлена). Эти операции над z и $\bar{z}$ согласно теореме приведут к комплексно-сопряженным результатам.

Следствие 2. У многочленов с вещественными коэффициентами комплексные корни встречаются сопряженными парами.

Действительно, пусть число $a + ib$ есть корень многочлена (11) $f(a + ib) = 0$. Тогда согласно первой из формул (12) имеем $u = v = 0$. Поэтому в силу второй из формул (12) $f(a - ib) = 0$ и число $a - ib$ тоже является корнем $f(z)$.

Теорема 2 (теорема Безу *). *Остаток R от деления многочлена (11) на двучлен $z - z_0$, где z_0 — любое число, равен значению этого многочлена в точке z_0, т. е. $R = f(z_0)$.*

Доказательство. Обозначим $f_1(z)$ — частное от деления многочлена $f(z)$ на $z - z_0$; это многочлен степени $n - 1$ со старшим коэффициентом a_0. Известно, что делимое $f(z)$ равно делителю $z - z_0$, умноженному на частное $f_1(z)$, плюс остаток R; поэтому имеем тождество относительно z

$$f(z) = (z - z_0) f_1(z) + R, \tag{13}$$

где R не зависит от z. Положив в этом равенстве $z = z_0$, получим $R = f(z_0)$, и теорема доказана.

Следствие. Если z_0 — корень многочлена $f(z)$, то $f(z)$ делится (без остатка) на $z - z_0$, т. е. $f(z) = (z - z_0) f_1(z)$.

Действительно, это равенство следует из (13) при $R = f(z_0) = 0$.

Теорема 3 (основная теорема высшей алгебры). *Всякий многочлен имеет по крайней мере один корень.*

Мы примем эту теорему без доказательства. Заметим только, что не всякая функция имеет корни. Например, функция e^z корней не имеет, что следует из формулы (6).

Теорема 4 (теорема о разложении многочлена на линейные множители). *Всякий многочлен $f(z)$ степени n может быть представлен в виде произведения $n + 1$ сомножителей, из которых один есть старший коэффициент a_0, а остальные суть двучлены вида $z - z_k$:*

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n). \tag{14}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен (11). По теореме 3 он имеет по крайней мере один корень; обозначим его z_1. Согласно следствию из теоремы 2 многочлен $f(z)$ делится на $z - z_1$, и поэтому имеет место тождество

$$f(z) = (z - z_1)[a_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-1}].$$

---

* Этьен Безу (1730—1783) — французский математик.

Второй множитель правой части есть многочлен $f_1(z)$ степени $n-1$ со старшим коэффициентом a_0. Его корень (существование которого обеспечено теоремой 3) обозначим z_2 и разделим $f_1(z)$ на $z-z_2$. Это деление выполняется без остатка (в силу следствия из теоремы 2), и мы получим

$$f(z)=(z-z_1)(z-z_2)[a_0z^{n-2}+c_1z^{n-3}+\ldots+c_{n-2}].$$

Продолжая этот процесс выделения линейных множителей, получим формулу (14), называемую *формулой разложения многочлена на линейные множители.*

Следствие 1. Числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ являются корнями многочлена $f(z)$, потому что согласно (14) имеем $f(z_k)=0$ при всех k от 1 до n.

Следствие 2. Числа, отличные от z_k, не являются корнями $f(z)$, потому что из (14) вытекает $f(z)\neq 0$, если $z\neq z_k$.

Следовательно, *всякий многочлен степени n имеет ровно n корней*; они могут быть вещественными или комплексными, различными или равными.

Корень $z=c$ многочлена $f(z)$ называется *корнем кратности k* (или k-кратным корнем), если $f(z)$ делится на $(z-c)^k$ и не делится на $(z-c)^{k+1}$. В этом случае из (14) следует, что $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z-c)^k f_1(z),\ \text{где}\ f_1(c)\neq 0. \tag{15}$$

Корни кратности $k=1$ называются *простыми корнями* многочлена. В этом случае имеем

$$f(z)=(z-c)f_2(z),\ \text{где}\ f_2(c)\neq 0. \tag{16}$$

Объединив в правой части разложения (14) одинаковые множители, представим формулу (14) в виде

$$f(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{17}$$

где $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$, $k_1, \ldots, k_m$ — целые положительные числа. Каждое из чисел k_s равно кратности соответствующего корня z_s многочлена $f(z)$. Заметим, что если все n корней многочлена $f(z)$ простые, то в разложении (14) все линейные множители будут различными.

Многочлен (11) с вещественными коэффициентами называется *вещественным многочленом*

$$f(z)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n. \tag{18}$$

Теорема 5. *Любой вещественный многочлен можно разложить на вещественные множители вида*

$$(x-a)^k\ \text{и}\ (x^2+px+q)^e, \tag{19}$$

где a, p и q — вещественные числа, $q-\frac{p^2}{4}>0$, k и e — натуральные числа.

Доказательство. Пусть $x_0 = a + ib$ — корень вещественного многочлена (18). Тогда по следствию 2 теоремы 1 число $x_0 = a - ib$ будет корнем этого многочлена. Покажем, что произведение $(x - x_0)(x - \bar{x}_0)$ есть вещественный многочлен вида (19). Действительно,

$$(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = (x - a - ib)(x - a + ib) = (x - a)^2 + b^2 =$$

$$= x^2 + px + q,$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$, причем $q - \frac{p^2}{4} = b^2 > 0$.

Поэтому разложение вещественного многочлена (18) будет содержать только вещественные множители. Его можно получить путем объединения в (17) сомножителей, соответствующих сопряженным корням, и результат записать в виде

$$f(x) = a_0 (x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \ldots (x^2 + p_r x + q_r)^{s_r}. \tag{20}$$

Например, $x^7 + 2x^5 + x^3 = x^3 (x^2 + 1)^2$.

57. Дробные рациональные функции. *Дробной рациональной функцией* называется отношение двух целых рациональных функций: $g(z)$ степени m и $f(z)$ степени n. Если степень числителя m меньше n, то эта функция называется *правильной рациональной дробью*, *если же* $m \geqslant n$, то имеем *неправильную рациональную дробь*.

Определение. *Простейшими или простыми дробями* называются дробные рациональные функции вида

$$\frac{A}{(z - k)^k}, \tag{21}$$

где k — натуральное число.

Теорема 1. *Всякую неправильную дробную рациональную функцию можно представить в виде суммы целой рациональной функции и правильной рациональной дроби.*

Действительно, в результате деления многочлена $g(z)$ степени m на многочлен $f(z)$ степени n при $m \geqslant n$ (по правилу деления многочленов) получится частное $p(z)$ — многочлен степени $m - n$ и остаток $\varphi(z)$ — многочлен степени, меньшей n.

Имеем тождество $g(z) = f(z)\, p(z) + \varphi(z)$, разделив которое на $f(z)$, получим

$$\frac{g(z)}{f(z)} = p(z) + \frac{\varphi(z)}{f(z)},$$

и теорема доказана.

Пусть многочлен $f(z)$ имеет корень a кратности k; тогда этот многочлен можно представить в виде произведения

$$f(z) = (z - a)^k f_1(z), \text{ причем } f_1(a) \neq 0.$$

Лемма. *Всякую несократимую дробную рациональную функцию можно представить в виде суммы*

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{A}{(z-a)^k} + \frac{g_1(z)}{(z-a)^{k-1} f_1(z)}, \tag{22}$$

где A — некоторая постоянная.

Для доказательства составим тождество относительно z и A

$$\frac{g(z)}{f(z)} - \frac{A}{(z-a)^k} = \frac{g(z) - Af_1(z)}{(z-a)^k f_1(z)}. \tag{23}$$

Выберем A при условии $g(a) - Af_1(a) = 0$. Здесь $g(a) \neq 0$, так как исходная дробь несократимая, $f_1(a) \neq 0$, так как число a является корнем кратности k (и не выше) многочлена $f(z)$. Поэтому число A единственно и $A \neq 0$.

При таком выборе A в силу следствия из теоремы 2 п. 56, числитель правой части (23) можно представить в виде $g(z) - Af_1(z) = (z-a)\,g_1(z)$. После сокращения правой части (23) на $z-a$ получим равенство, из которого непосредственно следует тождество (22).

Таким образом, доказано, что из всякой несократимой дробной рациональной функции можно выделить в качестве слагаемого простейшую дробь.

Следствие. Если $k > 1$, то, применяя лемму ко второму слагаемому правой части равенства (22) (предварительно сократив его в случае надобности), получим равенство

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{A_k}{(z-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(z-a)^{k-1}} + \frac{g_2(z)}{(z-a)^{k-2} f_1(z)},$$

где $A_k = A$. Продолжая этот процесс выделения простейших дробей (если $k > 2$), придем к равенству

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{A_k}{(z-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(z-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{z-a} + \frac{g_k(z)}{f_1(z)}. \tag{24}$$

Формула (24) показывает, что *каждому k-кратному корню знаменателя $f(z)$ дробной рациональной функции соответствует в правой части равенства* (24) *сумма k простых дробей.* Процесс выделения простых дробей может быть продолжен с помощью леммы применительно к дроби $\frac{g_k(z)}{f_1(z)}$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть $f(z) = a_0(z-a)^k(z-b)^p \ldots (z-c)^q$, где a, b, $\ldots$, c — различные корни $f(z)$ соответственно кратности k, p, $\ldots$, q. Всякую правильную дробную рациональную функцию можно представить, и притом единственным образом, в виде суммы простых дробей следующего вида:*

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_s}{(z-a)^s} + \sum_{s=1}^{p} \frac{B_s}{(z-b)^s} + \ldots + \sum_{s=1}^{q} \frac{c_s}{(z-c)^s}. \tag{25}$$

Приведение правильной дробной рациональной функции к виду суммы (25) называется *разложением этой функции на простейшие.*

Частным случаем теоремы является следующее утверждение. Если все корни $f(z)$ простые, то разложение $f(z)$ на линейные множители имеет вид (14) с различными множителями в правой части, а формула * разложения соответствующей правильной рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \ldots + \frac{A_n}{z-z_n}. \tag{26}$$

Дробная рациональная функция называется вещественной, если она представляет отношение двух вещественных целых рациональных функций.

Вещественными простейшими или простыми дробями называются вещественные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{и} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}, \tag{27}$$

где k и l — целые положительные числа и $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Вопрос о разложении правильной вещественной рациональной дроби на вещественные простейшие рассмотрен в теореме 3, которую мы примем без доказательства.

Теорема 3. *Всякую правильную вещественную дробную рациональную функцию* $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ *можно представить в виде конечной суммы вещественных простейших дробей. При этом, если* $f(x)$ *разложить на вещественные множители вида* $(x-a)^k$ *и* $(x^2+px+q)^l$ *при условии* $4q - p^2 > 0$, *то в указанной сумме каждому множителю знаменателя вида*

1) $(x-a)^k$ *соответствует сумма* k *слагаемых вида* $\sum_{s=1}^{k} \frac{A_s}{(x-a)^s}$,

2) $(x^2+px+q)^l$ *соответствует сумма* l *слагаемых вида*

$$\sum_{s=1}^{l} \frac{B_s x + C_s}{(x^2+px+q)^s}, \tag{28}$$

где A_s, B_s *и* C_s — *вещественные числа.*

В частном случае, когда все корни $x_1, \ldots, x_n$ многочлена $f(x)$ вещественные и простые, формула разложения правильной рациональной вещественной дроби имеет вид

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-x_n}. \tag{29}$$

Пример. Если $f(x) = (x-1)(x+1)^3(x^2+2x+3)$, то формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие такова:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{B_3}{(x+1)^3} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}. \tag{30}$$

* В общем случае *формулой* называется всякая символическая запись (алгебраическое выражение, а также равенство), содержащая какое-либо утверждение (предложение, суждение).

Сформулируем правило разложения правильной вещественной дробной рациональной функции на вещественные простейшие. Для этого надо

1) разложить знаменатель $f(x)$ на вещественные множители,

2) составить согласно теореме 3 формулу разложения дроби на простейшие с неопределенными коэффициентами A_s, B_s, C_s,

3) привести обе части формулы разложения к общему знаменателю и приравнять числители,

4) в полученном тождестве приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x; получим систему уравнений относительно A_s, B_s, C_s,

5) решить эту систему (система имеет единственное решение) и подставить найденные коэффициенты в формулу разложения.

Пример. Разложить на вещественные простейшие дроби функцию $\frac{x^2-1}{x^3+x}$.

Следуя правилу, разложим знаменатель данной дроби на вещественные простейшие множители $x^3 + x = x(x^2 + 1)$. Формула разложения данной дроби на вещественные простейшие имеет вид

$$\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Отсюда следует тождество $x^2 - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$. Путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x получим систему $A + B = 1$, $C = 0$, $A = -1$, имеющую решение $A = -1$, $B = 2$, $C = 0$. Поэтому имеем окончательно $\frac{x^2-1}{x^3+x} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$.

§ 9. СОЕДИНЕНИЯ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

58. Элементы теории соединений. Пусть имеем n нумерованных элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n. \tag{1}$$

Из элементов множества (1) будем составлять различные подмножества, содержащие каждое k элементов, где $1 \leqslant k \leqslant n$. Эти подмножества называются соединениями; они бывают трех видов: сочетания, перестановки и размещения.

Сочетаниями из n элементов по k называются соединения, которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом и содержат каждое k элементов из данных n элементов (1). Порядок расположения элементов в сочетании во внимание не принимается. Например, из трех элементов a_1, a_2, a_3 можно составить только такие сочетания по два элемента: a_1a_2, a_2a_3, a_1a_3.

Число различных сочетаний из n элементов по k обозначается символом C_n^k. Например, $C_3^2 = 3$.

Выведем формулу

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots((n-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

Если $k = 1$, то по определению имеем сочетания $a_1, a_2, \ldots, a_n$, число которых равно n, поэтому $C_n^1 = n$. Сочетания из n элементов по 2 можно образовать так: возьмем любое сочетание из n

по 1: $a_1, a_2, \ldots,$ или a_n и объединим выбранное сочетание с каждым из остальных элементов множества (1). Например, объединение a_1 с остальными элементами дает такие сочетания по два элемента: a_1a_2, a_1a_3, $\ldots$, a_1a_n. Объединение a_2 с остальными элементами дает a_2a_1, a_2a_3, $\ldots$, a_2a_n. Всего получится $n(n-1)$ таких объединений. Но этот результат надо разделить на два, так как каждое сочетание встречается два раза. Поэтому

$$C_n^2 = C_n^1 \cdot \frac{n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Сочетания из n элементов по 3 образуем так: к каждому сочетанию из n элементов по 2 присоединим третий элемент из тех n элементов множества (1), которые не входят в рассматриваемое сочетание по 2. Получим, таким образом, $C_n^2(n-2)$ таких подмножеств; но среди них каждое сочетание встретится три раза. Поэтому

$$C_n^3 = C_n^2 \frac{n-2}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

Можно доказать, что $C_n^k = C_n^{k-1} \frac{n-k+1}{k}$. Отсюда следует согласно методу математической индукции формула (2).

Перестановками из данных k элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются соединения, каждое из которых содержит все k элементов и которые отличаются лишь порядком элементов. Например, из трех элементов a, b, c можно составить только такие перестановки: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Число различных перестановок из k элементов обозначается символом $P(k)$. Например, $P(3) = 6$.

Выведем формулу

$$P(k) = k! \tag{3}$$

Если $k = 2$, то имеется всего две перестановки: a_1a_2 и a_2a_1. Поэтому $P(2) = 2!$. Все перестановки из трех элементов a_1, a_2, a_3 можно получить из перестановок двух элементов a_1a_2, a_2a_1 путем присоединения к ним элемента a_3. Это присоединение можно осуществить трояко: поместив a_3 до первого элемента, после второго элемента или между первым и вторым элементами. Поэтому $P(3) = P(2) \cdot 3$. Аналогично получим

$$P(m+1) = P(m)(m+1), \tag{4}$$

потому что в перестановке из m элементов имеется $m-1$ промежутков между элементами, куда можно поместить элемент a_{m+1}. Но его можно поместить еще до или после всей перестановки из m элементов. Из (4) следует согласно методу математической индукции формула (3), потому что $P(1) = 1$.

Размещениями из n элементов по k называются такие соединения (содержащие каждое k элементов из данных n элементов), которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Из каждого сочетания из n элементов по k путем перемещения элементов, входящих в это сочетание, можно получить $P(k)$

различных перестановок. Всего имеется C_n^k различных сочетаний из n элементов по k. Поэтому общее число различных размещений из n элементов по k равно произведению C_n^k на $P(k)$:

$$A_n^k = C_n^k P(k) = n(n-1)\ldots(n-k+1). \tag{5}$$

Пример 1. Имеется 10 кандидатов на 3 одинаковых вакантных места. Найти число вариантов замещения трех одинаковых вакантных мест выборкой из десяти кандидатов.

Решение. Каждая выборка является сочетанием из 10 элементов по 3. В ней места одинаковы и поэтому порядок расположения кандидатов в выборке не имеет значения. По формуле (2) получаем

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Пример 2. Найти число вариантов замещения трех различных вакантных мест выборкой из десяти кандидатов. В этом примере вакантные места различны, поэтому каждая выборка есть размещение из 10 кандидатов по три и $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

При вычислении числа сочетаний полезна формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{6}$$

Выведем формулу (6). Путем умножения числителя и знаменателя формулы (2) на $(n-k)!$ получим формулу (6). Действительно,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \cdot \frac{(n-k)\cdots 2 \cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Из (6) непосредственно следует с помощью (2), что

$$C_n^{n-k} = C_n^k. \tag{7}$$

59. Элементы теории определителей.

Определение 1. *Матрицей* называется совокупность чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы. Числа этой совокупности называются *элементами* матрицы.

Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ имеет две строки и четыре столбца.

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Определение 2. *Определителем второго порядка, соответствующим матрице* A_2, называется число, определяемое равенством

$$D(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{9}$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

В обозначении ее элемента a_{ik} первый индекс i показывает номер строки, а второй k — номер столбца матрицы, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

Определение 3. *Определителем третьего порядка, соответствующим матрице* A_3 называется число определяемое равенством

$$D(A_3)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (11)$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 18-8-12=-2.$

Основные свойства определителей. Здесь сформулированы свойства определителей n-го порядка, где $n=2$ или $n=3$; одни из этих свойств доказаны, а другие иллюстрированы примерами. Строгое доказательство всех свойств читатель найдет в главе XV.

1°. *Величина определителя не меняется при замене его строк соответствующими столбцами.** Это так называемое свойство равноправности строк и столбцов определителя. Доказательство (при $n=2$):

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

2°. *При перестановке двух строк (столбцов) определителя между собой определитель меняет лишь знак.* Доказательство (при $n=2$)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = -(bc-ad) = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

3°. *Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.* Действительно, $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab-ab=0.$

4°. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя:*

$$\begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = a\lambda d-\lambda bc = \lambda(ad-bc) = \lambda\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

4а. *Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.* Для доказательства достаточно в предыдущей формуле положить $\lambda=0$.

5°. *Если элементы некоторой строки (столбца) определителя суть суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух*

* См. примечание на стр. 447.

определителей, в которых элементы упомянутой строки (столбца) заменены отдельными слагаемыми. Например,

$$\begin{vmatrix} a+\alpha & b \\ c+\beta & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}.$$

Формула проверяется прямым вычислением.

О п р е д е л е н и е 4. *Минором определителя n-го порядка, соответствующим элементу* a_{ik}, называется определитель $n-1$-го порядка, получающийся из основного определителя путем вычеркивания i-й строки и k-го столбца. Он обозначается символом Δ_{ik}.

О п р е д е л е н и е 5. *Алгебраическим дополнением элемента* a_{ik} *определителя* называется минор Δ_{ik}, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$; он обозначается символом A_{ik}:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik}. \tag{12}$$

П р и м е р. Элементам первой строки определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ соответствуют миноры

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 32, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

и алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot 5 = 5, \quad A_{12} = (-1)^3 \cdot 32 = -32, \quad A_{13} = (-1)^4 \cdot 1 = 1.$$

Составим сумму парных произведений элементов первой строки на соответствующие алгебраические дополнения:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-32) + 4 \cdot 1 = -82.$$

Вычислим данный определитель по формуле (11), получим $\Delta = -82$. Это совпадение результатов $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \Delta$ не случайно. Имеет место свойство 6.

6°. *Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на соответствующие элементам этой строки (столбца) алгебраические дополнения равна величине определителя.* Например, в случае определителя третьего порядка имеют место формулы

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \\ \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ \Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{13}$$

Формулы (13) представляют р а з л о ж е н и я определителя по элементам первой, второй и третьей строк определителя соответственно.

Разложение определителя $D(A_3)$ по элементам k-го столбца имеет вид

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} \quad (k = 1,\ 2,\ 3). \tag{14}$$

7°. *Сумма произведений элементов любого ряда определителя на алгебраические дополнения, соответствующие элементам параллельного ряда, равна нулю.* При $n = 3$ имеем

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + a_{i3}A_{j3} = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + a_{3k}A_{3l} = 0 \text{ при } k \neq l.$$

8°. *Величина определителя не изменится, если к элементам любого его ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель.* Например,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \lambda b & b \\ c + \lambda d & d \end{vmatrix}.$$

Понятие определителя любого порядка (в простейшем изложении). Свойство определителя третьего порядка, выраженное формулой (13), допускает обобщение, которое может быть принято за определение определителя любого порядка. Так, если дана квадратная матрица 4-го порядка, то соответствующий ей определитель определяется равенством

$$D(A_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14},$$

где A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}.

Таким образом, определитель 4-го порядка выражен через определители 3-го порядка.

В общем случае *определителем n-го порядка можно назвать сумму парных произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения*:

$$D(A_n) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \tag{15}$$

Заметим, что определители любого порядка n обладают всеми сформулированными выше свойствами 1°—8°.

Пример. По формуле (15) при $n = 5$, а затем $n = 4$ последовательно получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$$

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \quad A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{16}$$

Составим три определителя:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1B_1 \\ A_2B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1=\begin{vmatrix} B_1C_1 \\ B_2C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} C_1A_1 \\ C_2A_2 \end{vmatrix}, \tag{17}$$

первый из них Δ называется *определителем системы* (16).

Докажем, что из системы (16) следует система

$$\Delta\cdot x=\Delta_1, \quad \Delta\cdot y=\Delta_2. \tag{18}$$

Для доказательства умножим первое из уравнений системы (16) на B_2, второе на $-B_1$ и сложим результаты; затем умножим первое из уравнений (16) на $-A_2$, второе — на A_1 и сложим эти результаты. Получим систему (18).

При условии $\Delta\neq 0$ из системы (18) следует система (16). Действительно, если умножить первое из уравнений (18) на A_1, а второе на B_1 и сложить полученные результаты, то получим равенство $\Delta(A_1x+B_1y)=-\Delta C_1$, из которого следует первое из уравнений (16). Аналогично выводится второе из уравнений (16).

При условии $\Delta\neq 0$ системы (16) и (18) эквивалентны и имеют единственное решение, которое выражается формулами

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{19}$$

Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема Крамера *. *Если определитель системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными не равен нулю, то система имеет единственное решение; причем каждая из неизвестных величин может быть представлена в виде дроби, у которой в знаменателе стоит определитель системы, а в числителе — определитель, получающийся из определителя системы путем замены коэффициентов при определяемом неизвестном свободными членами системы.*

Следствие 1. Если система (16) однородна (т. е. $C_1=C_2=0$), то $\Delta_1=\Delta_2=0$, и поэтому в случае $\Delta\neq 0$ однородная система имеет только нулевое решение.

Следствие 2. Если система (16) однородна и имеет решение, отличное от нулевого, то ее определитель равен нулю. Действительно, если бы $\Delta\neq 0$, то система имела бы только нулевое решение, а по условию она имеет еще и ненулевое решение; поэтому $\Delta=0$.

Как сама теорема Крамера, так и оба ее следствия справедливы и для системы n линейных уравнений с n неизвестными (см. гл. XV).

---

* Габриель Крамер (1704—1752) — швейцарский математик.

Глава IV

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Аналитическая геометрия есть та часть математики, которая исследует геометрические объекты (точки, линии, поверхности и их совокупности) средствами алгебры с помощью метода координат.

В основании метода координат лежит возможность установления взаимооднозначного соответствия между множеством точек прямой, плоскости и пространства и множеством некоторых систем вещественных чисел. *Системой координат* называется совокупность условий, определяющих положение точек линии, поверхности или пространства с помощью систем чисел. Эти числа называются *координатами соответствующей точки в данной системе координат*. Значение метода координат состоит в том, что с его помощью задачи геометрии могут быть истолкованы на языке анализа и, обратно, факты анализа могут приобрести геометрическое толкование.

§ 10. КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

60. Вектор. Одним из основных понятий аналитической геометрии является понятие направленного отрезка. Любые две точки A и B пространства, если они упорядочены (например, A является первой, а B — второй точкой), определяют отрезок вместе с данным на ней направлением (а именно направлением от A к B). *Направленный отрезок* короче *называют вектором*. Вектор с началом в A и концом в B обозначается через $\overrightarrow{AB}$, или, например, $\mathbf{a}$. *Длина вектора* (расстояние между его концом и началом) обозначается соответственно $|\overrightarrow{AB}|$ или a и называется также *модулем вектора*.

В естествознании встречаются величины скалярные и векторные. Каждая скалярная величина вполне характеризуется одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответст-

вующей единице измерения. Примеры скалярных величин — температура тела в данной его точке, работа, энергия, потенциал. Векторная величина характеризуется числом и направлением. Примеры векторных величин — скорость, ускорение, перемещение движущейся точки, напряженность электрического поля.

Каждую векторную величину можно представить геометрически в виде направленного отрезка, который имеет соответствующие длину, направление и точку приложения. Таким образом, мы приходим к понятию *геометрического вектора*, который называется также вектором. Векторы служат для отвлеченного выражения конкретных векторных величин.

По своему смыслу конкретные векторные величины и вместе с ними абстрактные (т. е. геометрические) векторы подразделяются на свободные, скользящие и связанные. Свободные векторы не зависят от точки приложения, их можно переносить параллельно с сохранением направления в любое место пространства без изменения их значения. Начало скользящего вектора можно переместить в любую точку прямой, на которой лежит этот вектор. Начало связанного вектора совпадает с фиксированной точкой. В дальнейшем мы будем иметь дело преимущественно со свободными векторами и будем называть их просто векторами.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они, будучи приведены к общему началу, лежат на одной прямой. Такие векторы до приведения к общему началу могли быть расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. Факт равенства векторов записывается символически $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Таким образом, для равенства свободных векторов совпадение точек приложения не обязательно.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *противоположными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и противоположные направления: $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$.

Суммой двух данных *векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, который имеет началом начало вектора $\mathbf{a}$ и концом конец вектора $\mathbf{b}$ при условии, что начало вектора $\mathbf{b}$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}$ (рис. 47). Для суммы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ принято обозначение $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, при этом $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются составляющими суммы, или ее *слагаемыми*. Таким образом, сложение векторов определяется по тому же правилу параллелограмма, согласно которому складываются силы и скорости.

По определению *разность векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равна сумме $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

В результате сложения противоположных векторов получается вектор, длина которого равна нулю, а направление не определено; такой вектор называется *нулевым вектором* и обозначается $\mathbf{0}$.

Пусть даны вектор a и число λ. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на число* λ называется вектор, длина которого равна $|\lambda|\, a$ и направление которого совпадает с направлением вектора $\mathbf{a}$, если $\lambda > 0$,

или противоположно направлению **a**, если $\lambda < 0$. Произведение вектора **a** на число λ обозначается $\lambda\mathbf{a}$.

61. Направленный отрезок оси. Прямая, на которой выбрано направление, называется *осью*. Пусть на прямой выбрана линейная единица, служащая для измерения длин отрезков.

Числовой осью называется всякая прямая, на которой выбраны положительное направление (любое из двух возможных), начало — точка O (любая из точек прямой может быть принята за начало) и линейная единица (отрезок, длина которого принята за единицу длины). Рассмотрим на числовой оси две произвольно фиксированные точки A и B.

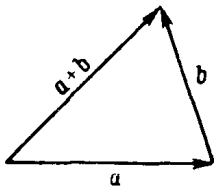

Рис. 47.

Вектор, лежащий на числовой оси, называется направленным отрезком оси. Он имеет длину и величину.

Величиной AB направленного отрезка оси $\overrightarrow{AB}$ называется его длина, взятая со знаком плюс, если направления оси и отрезка совпадают, или со знаком минус, если эти направления противоположны. Из этого определения следует, что величины противоположных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ отличаются только знаком

$$BA = -AB. \tag{1}$$

62. Координаты на прямой. Рассмотрим способ определения положения точек на прямой с помощью чисел. Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней положительное направление, начало O и линейную единицу. Получим числовую ось. Рассмотрим на числовой оси произвольную точку M. *Координатой точки M на числовой оси* называется величина направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ этой оси; она обозначается символом x_M:

$$x_M = OM. \tag{2}$$

Из этого определения следует, что каждая точка числовой оси имеет определенную координату, причем разным точкам соответствуют разные координаты. Каждому вещественному числу x можно поставить в соответствие ту точку числовой оси, которая имеет координату x. Поэтому имеет место взаимно-однозначное соответствие между множеством точек числовой оси и множеством вещественных чисел.

Теорема. *Величина направленного отрезка оси $\overrightarrow{AB}$ равна разности между координатами его конца и начала*

$$AB = x_B - x_A. \tag{3}$$

Формула (3) имеет место при любом расположении точек A, B и O на числовой оси. Основными являются случаи расположения точек в таком порядке: OAB, OBA, AOB, ABO, BOA, BAO. Возможны также случаи, когда некоторые из этих точек совпадают.

Докажем теорему для случая BOA (в других случаях теорема доказывается аналогично). Величины отрезков $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BA}$ положительны и связаны соотношением $BA = BO + OA$, которое с помощью формулы (1) может быть записано в виде равенства $-AB = -OB + OA$. Отсюда следует формула (3).

Следствие. Длина направленного отрезка оси $\overrightarrow{AB}$ равна абсолютному значению разности между координатами конца и начала отрезка: $|\overrightarrow{AB}| = |x_B - x_A|$.

63. Основные теоремы теории проекций. Рассмотрим в пространстве произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$ и произвольную ось l.

Проекцией точки A на ось l называется основание перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l. Следовательно, проекция точки A на ось l есть точка A_1 пересечения оси l и плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно оси l.

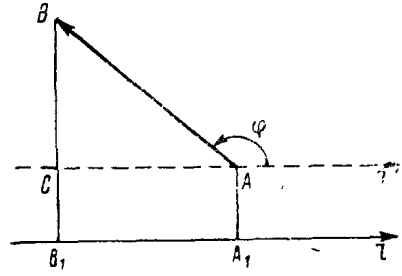

Рис. 48.

Пусть A_1 и B_1 суть проекции соответственно начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l. *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l* называется величина направленного отрезка A_1B_1 оси l, заключенного между проекциями начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось:

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = A_1B_1. \qquad (4)$$

Проекцию вектора $\mathbf{a}$* на ось l обозначим символом a_l.

Теорема 1. *Проекция вектора* $\mathbf{a}$ *на ось l равна произведению длины вектора на косинус угла φ между вектором и осью*

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = a \cos \varphi. \qquad (5)$$

Выведем формулу (5) для случая $\pi/2 < \varphi < \pi$ (рис. 48). По определению, проекция вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ на ось l в рассматриваемом случае есть число отрицательное, равное величине отрезка $\overrightarrow{A_1B_1}$: $\text{пр}_l \mathbf{a} = A_1B_1 = AC$. Здесь AC — величина направленного отрезка $\overrightarrow{AC}$ оси l_1, параллельной l, одинаково с нею направленной и проходящей через точку A. Из ΔABC находим длину отрезка $\overline{AC}$. Это положительное число равно $CA = a \cos(\pi - \varphi) = -a \cos \varphi$. Следовательно, $\text{пр}_l \mathbf{a} = AC = -CA = a \cos \varphi$. В остальных случаях теорема доказывается аналогично.

* Иногда под проекцией вектора на ось (или на плоскость) понимают вектор, начало и конец которого совпадают соответственно с проекциями начала и конца данного вектора на эту ось (плоскость). В этом случае вводится понятие алгебраической величины проекции, которое совпадает с нашим понятием проекции вектора.

Примечание. Теорема 1 и вместе с нею рассмотренные ниже три теоремы имеют место при произвольном расположении векторов и оси в пространстве. Рисунки же к этим теоремам выполнены при условии, что векторы и ось лежат в одной плоскости.

Теорема 2. *Проекция вектора на числовую ось равна разности координат проекций конца и начала вектора на эту ось*

$$\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = x_{B_1} - x_{A_1}, \tag{6}$$

где A_1 и B_1 — проекции соответственно точек A и B на ось l, а x_{A_1} и x_{B_1} — координаты этих точек.

Доказательство. Формула (6) следует непосредственно из формул (3) и (4). Действительно, $\text{пр}\overrightarrow{AB} = A_1B_1 = x_{B_1} - x_{A_1}$.

Теорема 3. *Проекция геометрической суммы векторов на любую ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых на ту же ось*

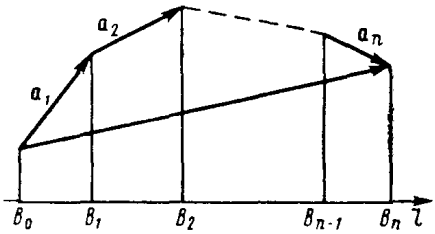

Рис. 49.

$$\text{пр}_l(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n) = \text{пр}_l\mathbf{a}_1 + \text{пр}_l\mathbf{a}_2 + \ldots + \text{пр}_l\mathbf{a}_n. \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим n векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, . . ., $\mathbf{a}_n$ и их сумму $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n$. Спроектируем каждый из этих векторов на ось l и обозначим проекции концов этих векторов соответственно B_0, B_1, . . ., B_n (рис. 49), а их координаты — соответственно x_0, x_1, . . ., x_n. В силу теоремы 2 имеем $\text{пр}\,\mathbf{a}_1 = x_1 - x_0$, . . ., $\text{пр}\,\mathbf{a}_n = x_n - x_{n-1}$, $\text{пр}\,\mathbf{a} = x_n - x_0$. Суммируя первые n равенств, получим с помощью последнего равенства формулу (7)

$$\text{пр}\,\mathbf{a}_1 + \ldots + \text{пр}\,\mathbf{a}_n = x_n - x_0 = \text{пр}\,\mathbf{a}.$$

Теорема 4. *Проекция произведения вектора на число на не которую ось равна произведению этого числа на проекцию вектора на ту же ось*:

$$\text{пр}_l(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\text{пр}_l\,\mathbf{a}. \tag{8}$$

Доказательство заключается в проверке формулы (8). Ее правую часть на основании теоремы 1 можно представить в виде произведения $\lambda\,\text{пр}\,\mathbf{a} = \lambda a\cos(\mathbf{a}, l)$. Левая часть формулы (8) может быть представлена в виде такого же произведения. Действительно, при $\lambda > 0$ имеем $\text{пр}\,(\lambda\mathbf{a}) = |\lambda a|\cos(\lambda\mathbf{a}, l) = \lambda a\cos(\mathbf{a}, l)$, при $\lambda < 0$ имеем $\text{пр}\,(\lambda\mathbf{a}) = |\lambda a|\cos(\lambda\mathbf{a}, l) = -\lambda a\cos[\pi + (\mathbf{a}, l)] = \lambda a\cos(\mathbf{a}, l)$.

64. Координаты на плоскости. *Система координат* — это совокупность условий, определяющих положения точек на прямой,

на плоскости или в пространстве с помощью чисел. Эти числа и называются *координатами точек* в рассматриваемой системе координат. Чаще других применяются две системы координат на плоскости — декартова и полярная.

*Декартова * прямоугольная система координат на плоскости* определяется заданием двух взаимно перпендикулярных числовых осей с общим началом и с общей линейной единицей. Оси упорядочены, т. е. указано, какая из осей считается первой (она называется осью *абсцисс* и обозначается Ox) и какая второй (ось *ординат* обозначается Oy). Точка пересечения осей O называется *началом координат* (рис. 50).

Определение. Пусть M — произвольная точка плоскости, A и B — ее проекции соответственно на оси абсцисс и ординат. *Декартовыми координатами точки* M в заданной системе координат называются проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на соответствующие координатные оси; при этом проекция на первую координатную ось называется *абсциссой точки* M и обозначается x, проекция вектора на вторую координатную ось называется *ординатой точки* M и обозначается y:

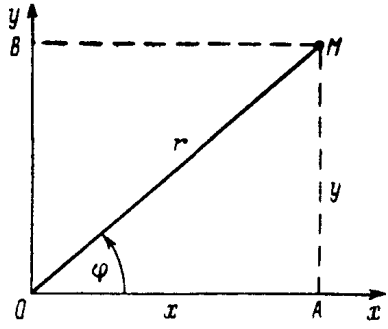

Рис. 50.

$$x = \text{пр}_{Ox}\,\overrightarrow{OM},\ y = \text{пр}_{Oy}\,\overrightarrow{OM}. \quad (9)$$

Желая кратко указать, что точка M имеет асбциссу x и ординату y, пользуются символом $M(x, y)$.

Примечание. Угол между координатными осями может быть отличным от прямого и тогда декартова система координат оказывается косоугольной. Однако в нашем курсе этот угол предполагается равным прямому, декартова система координат всегда прямоугольная.

Оси координат разделяют всю координатную плоскость на четыре части, называемые *квадрантами*. Знаки декартовых координат точек в различных квандрантах указаны ниже.

	I	II	III	IV
x	+	−	−	+
y	+	+	−	−

Между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар вещественных чисел $\{x, y\}$ имеет место взаимно-

* Рене Декарт (1595—1650) — французский философ и математик.

однозначное соответствие, что следует из определения декартовой системы координат.

Полярная система координат определяется заданием 1) точки O, называемой *полюсом*, 2) полуоси, исходящей из точки O, имеющей определенное направление и линейную единицу; эта полуось называется *полярной осью*. Полярными координатами точки M в рассматриваемой системе координат называются *полярный радиус* r, т. е. расстояние между точками O и M, и *полярный угол* φ, т. е. угол, на который надо повернуть полярную ось против часовой стрелки до совпадения с лучом OM (см. рис. 50). Каждая точка плоскости, за исключением полюса, имеет определенный положительный полярный радиус r и определенный полярный угол * φ из промежутка $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Если точка совпадает с полюсом, то ее полярный радиус равен нулю, а полярный угол не имеет определенного значения.

Установим формулы связи между полярными и декартовыми координатами. В некоторых случаях приходится пользоваться в одном исследовании декартовой и полярной системами координат. В таких случаях возникает задача: зная координаты произвольной точки в одной системе координат, найти ее координаты в другой системе. Формулы связи между координатами имеют особенно простой вид при условии, что полюс полярной системы совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс, Для любой точки M на плоскости по теореме 1 п. 63 имеем

$$x = \text{пр}\,\overrightarrow{OM} = OA = r\cos\varphi,\quad y = OB = r\sin\varphi. \tag{10}$$

Формулы (10) называются *формулами перехода* от полярных координат к декартовым.

Для получения формул обратного перехода из (10) находим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}. \tag{11}$$

Второе из равенств (11) недостаточно для определения полярного угла φ. Для определения величины φ необходимо учитывать знаки величин x и y. Например, если $x = y = 1$, то $\operatorname{tg}\varphi = 1$ и $\varphi = \pi/4$, если же $x = y = -1$, то $\operatorname{tg}\varphi = 1$, но $\varphi = 5\pi/4$.

В общем случае $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ при $y \geqslant 0$ и $\pi < \varphi < 2\pi$ при $y < 0$.

65. Расстояние между двумя точками. Рассмотрим задачу: найти расстояние между двумя данными точками $A\ (x_1,\ y_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2)$. Обозначим искомое расстояние буквой d. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$ и его проекции на координатные оси. По теореме 2 п. 63 имеем (рис. 51)

$$\text{пр}_{Ox}\,\overrightarrow{AB} = A_1B_1 = x_2 - x_1,\quad \text{пр}_{Oy}\,\overrightarrow{AB} = A_2B_2 = y_2 - y_1.$$

* Иногда полярный угол определяется с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k— любое целое неотрицательное число.

Обозначим через AC и BC величины направленных соответствующих отрезков $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$ осей x' и y', которые соответственно параллельны осям x и y и одинаково с ними направлены. Поэтому $AC = A_1B_1 = x_2 - x_1$, $CB = A_2B_2 = y_2 - y_1$. По теореме Пифагора имеем

$$d^2 = (AC)^2 + (CB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Отсюда следует окончательный результат

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (12)$$

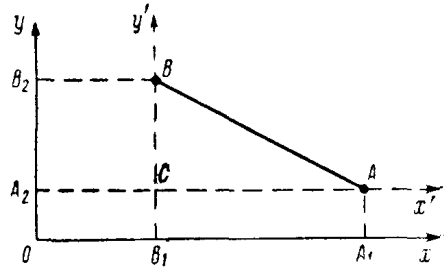

Рис. 51.

т. е. *расстояние между двумя данными точками равно арифметическому значению корня квадратного из суммы квадратов разностей одноименных координат.* В частности, если одна из точек совпадает с началом координат, а другая имеет координаты x и y, то из (12) следует $d = \sqrt{x^2 + y^2}$.

66. Преобразование декартовых координат. Возможны три случая.

А. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей. Даны две системы декартовых координат с соответственно параллельными и одинаково направленными осями и одинаковыми единицами измерения длин отрезков. Одну из координатных систем назовем старой, пусть это будет система (x, y). Вторую систему (x', y') назовем новой (рис. 52). Каждая точка M плоскости имеет свои координаты: в старой системе это x и y, в новой системе — x' и y'. Координаты нового начала O' в старой системе a и b будем считать заданными.

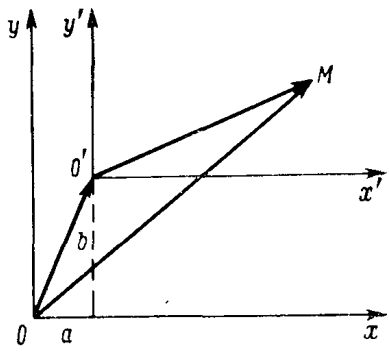

Рис. 52.

Требуется установить зависимость между координатами произвольной точки M плоскости в старой и новой системах координат (при параллельном переносе осей). Для этого рассмотрим три вектора: $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'M}$, связанные соотношением $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, которое имеет место при любом расположении точек O, O' и M на плоскости. Проекции этих векторов на ось абсцисс суть

$$\text{пр}\,\overrightarrow{OM} = x, \quad \text{пр}\,\overrightarrow{OO'} = a, \quad \text{пр}\,\overrightarrow{O'M} = x'.$$

Поэтому в результате проектирования геометрической суммы $\overrightarrow{OM}$ на ось абсцисс в соответствии с теоремой 3 п. 63 получим $x = a + x'$; аналогично получим $y = b + y'$. Формулы

$$x = a + x', \quad y = b + y' \tag{13}$$

называются *формулами перехода* от новых координат к старым при параллельном переносе осей и формулируются так: старая координата равна соответствующей новой координате, сложенной с координатой нового начала в старой системе.

Формулы перехода от старых координат к новым могут быть получены непосредственно из формул (13). Они имеют вид

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{14}$$

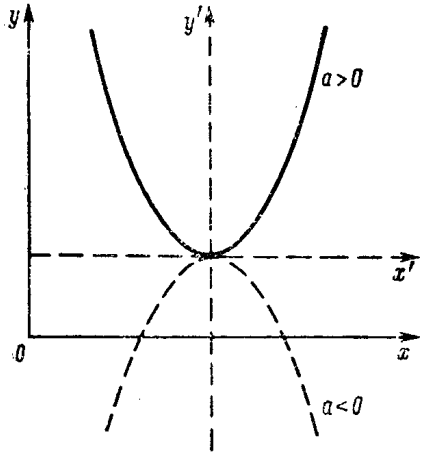

Рис. 53.

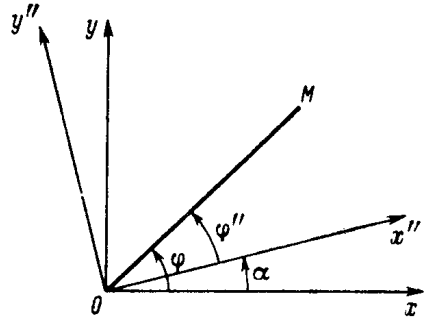

Рис. 54.

Пример. Преобразуем уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$ к простейшему виду. Для этого выделим полный квадрат в правой части данного уравнения

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

и введем обозначения $x_0 = -b/2a$; $y_0 = c - b^2/4a$.

В новой системе координат (с соответственно параллельными и одинаково направленными осями и с началом в точке x_0, y_0) имеем $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$. Уравнение данной параболы в новой системе координат примет вид $y' = ax'^2$ (рис. 53).

Б. Преобразование декартовых координат при повороте осей. Даны две декартовы системы координат — старая система (x, y) и новая система (x'', y''), полученная из старой путем вращения ее вокруг начала координат против часовой стрелки на данный угол α (рис. 54).

Требуется установить зависимость между старыми x, y и новыми x'', y'' координатами любой точки M плоскости (при повороте осей). Для этого введем полярные координаты точки M в ка-

честве вспомогательных величин. Полюс выберем в точке O. Если полярную ось направить вдоль оси Ox, то получим полярную систему координат, в которой точка M будет иметь координаты r и φ. Если же полярную ось совместить с положительной полуосью Ox'', то в новой полярной системе точка M будет иметь координаты r и φ''. Величины φ, φ'' и α связаны равенством $\varphi = \varphi'' + \alpha$. Зависимость между декартовыми и полярными координатами выражается известными формулами (10) п. 64

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ x'' = r\cos\varphi'',\ y'' = r\sin\varphi''. \qquad (15)$$

Каждое из равенств (15) может быть преобразовано с помощью остальных формул (15):

$$x = r\cos\varphi = r\cos(\varphi'' + \alpha) = r\cos\varphi''\cos\alpha - r\sin\varphi''\sin\alpha =$$

$$= x''\cos\alpha - y''\sin\alpha,$$

$$y = r\sin(\varphi'' + \alpha) = r\sin\varphi''\cos\alpha + r\cos\varphi''\sin\alpha = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha,$$

$$x'' = r\cos(\varphi - \alpha) = r\cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$

$$y'' = r\sin(\varphi - \alpha) = r\sin\varphi\cos\alpha - r\cos\varphi\sin\alpha = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Таким образом, получены формулы перехода от новых координат к старым

$$x = x''\cos\alpha - y''\sin\alpha,\ y = x''\sin\alpha + y''\cos\alpha \qquad (16)$$

и формулы перехода от старых координат к новым

$$x'' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y'' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \qquad (17)$$

Пример. Преобразуем уравнение гиперболы $y = a/x$ путем поворота координатных осей на угол $\alpha = \pi/4$. Формулы преобразования (16) в этом случае будут $x = (x'' - y'')/\sqrt{2}$, $y = (x'' + y'')/\sqrt{2}$. Поэтому из данного уравнения следует $(x'' - y'')(x'' + y'')/2 = a$ и окончательно $x''^2 - y''^2 = 2a$. Это и есть уравнение той же гиперболы относительно новых осей.

В. Общий случай преобразования декартовых координат. Даны: старая система координат (x, y), новая система координат (x'', y''), угол α между осями Ox и Ox'', a и b — координаты нового начала O' в старой системе. Рассмотрим произвольно выбранную точку M плоскости и обозначим через x и y ее координаты в старой системе и x'' и y'' — ее координаты в новой системе (см. рис. 55).

Требуется установить зависимость между координатами любой точки плоскости в старой и новой системах координат (в общем случае преобразования координат). Для этого введем вспомогательную систему координат (x', y'), оси которой соответственно параллельны осям системы (x, y) и совпадают с ними по направлению. Координаты точки M в этой системе обозначим x' и y' (рис. 55). Вспомогательные величины x' и y' связаны со старыми координатами x и y формулами (13) и (14). Новые координаты x''

и y'' связаны с x' и y' формулами (16) и (17), если в последних заменить x на x' и y на y' (потому что в условиях случая Б мы имели x и y, а теперь x' и y'). Поэтому имеем

$$x' = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \quad y' = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha, \tag{18}$$

$$x'' = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha, \quad y'' = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \tag{19}$$

Из формул (13) и (18) следуют формулы перехода от новых координат к старым в общем случае преобразования декартовых координат

$$x = a + x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \quad y = b + x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha. \tag{20}$$

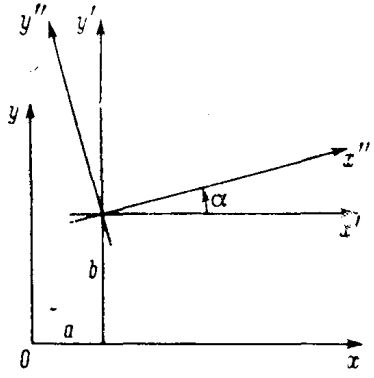

Рис. 55.

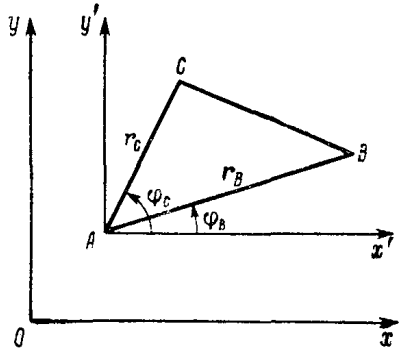

Рис. 56.

Из формул (14) и (19) следуют формулы перехода от старых координат к новым в общем случае преобразования декартовых координат

$$x'' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha,$$

$$y'' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \tag{21}$$

67. Площадь треугольника. Требуется найти площадь треугольника, зная координаты его вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Для решения задачи введем вспомогательную декартову систему координат (x', y') (рис. 56), направление осей которой совпадает с направлением осей основной системы (x, y), а начало координат совпадает с точкой A. Тогда новые координаты точек B и C в соответствии с формулами (14) будут

$$x'_B = x_2 - x_1, \quad y'_B = y_2 - y_1, \quad x'_C = x_3 - x_1, \quad y'_C = y_3 - y_1. \tag{22}$$

Введем полярную систему координат с полюсом в точке A и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью Ox'. Полярные и декартовые координаты точек B и C связаны соотношениями

$$x'_B = r_B \cos\varphi_B, \quad y'_B = r_B \sin\varphi_B, \quad x'_C = r_C \cos\varphi_C, \quad y'_C = r_C \sin\varphi_C. \tag{23}$$

Из курса элементарной геометрии известна формула площади треугольника, которая в наших обозначениях имеет вид $F = \frac{1}{2} r_B r_C \sin|\varphi_C - \varphi_B|$. Здесь $\varphi_C > \varphi_B$, если обход сторон треугольника от A к B и далее к C происходит против часовой стрелки, и тогда $|\varphi_C - \varphi_B| = \varphi_C - \varphi_B$. Если же этот обход происходит по часовой стрелке, то $\varphi_C < \varphi_B$ и $|\varphi_C - \varphi_B| = \varphi_B - \varphi_C$. Поэтому формула площади треугольника может быть представлена в виде

$$F = \pm \frac{1}{2} r_B r_C \sin(\varphi_C - \varphi_B). \tag{24}$$

если условиться выбрать в ней знак «+» при обходе от A к B и далее к C против часовой стрелки, и знак «—» при обходе по часовой стрелке. Правая часть формулы (24) с помощью формул (22) и (23) может быть приведена к виду

$$F = \pm \frac{1}{2} (r_B \cos\varphi_B r_C \sin\varphi_C - r_B \sin\varphi_B r_C \cos\varphi_C) =$$

$$= \pm \frac{1}{2} (x'_B y'_C - x'_C y'_B) = \pm \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)].$$

Окончательный результат в удобной для запоминания форме может быть представлен с помощью определителя (см. п. 59) второго или третьего порядков. Таким образом, получим

$$F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{25}$$

Пример. Найти площадь треугольника $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$, $C(2, 3)$.

Решение. $F = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Следовательно, данные точки лежат на одной прямой и площадь треугольника равна нулю.

Из формулы (25) следует, что для того чтобы три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

§ 11. УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

Идея соответствия между линиями на плоскости и уравнениями с двумя переменными состоит в том, что каждому уравнению с двумя переменными, вообще говоря, соответствует на плоскости

некоторая линия и, обратно, плоской линии можно поставить в соответствие некоторое уравнение. Здесь речь идет о прямом и обратном соответствии между двумя множествами. Поэтому ниже рассмотрены две стороны этого вопроса.

68. Геометрическое значение уравнения с двумя переменными. Рассмотрим уравнение с двумя переменными x и y

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi(x, y)$ — функция двух независимых переменных, определенная на всей плоскости. Любое уравнение с двумя переменными можно привести к виду (1) путем переноса всех его членов в левую часть.

Замечательная идея Декарта состоит в том, чтобы *считать переменные x и y* в уравнении (1) *координатами точек на плоскости.* Выберем на плоскости какую-либо декартову систему координат. Поставим вопрос: каково множество точек плоскости, координаты которых в выбранной системе координат удовлетворяют уравнению (1), т. е. обращают равенство (1) в численное равенство в результате подстановки вместо x и y координат соответствующих точек.

В некоторых случаях ответ на этот вопрос очевиден. Например, уравнению $x - y = 0$ удовлетворяют координаты всех точек биссектрисы первого и третьего координатных углов. Уравнению $x + y = 0$ удовлетворяют координаты всех точек биссектрисы второго и четвертого координатных углов. Уравнению $x^2 - y^2 = 0$ соответствуют обе упомянутые биссектрисы. Уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют координаты лишь одной точки $x = y = 0$. Уравнению $x^2 + y^2 - 4 = 0$ удовлетворяют координаты всех точек окружности радиусом 2 с центром в начале координат. Координаты ни одной точки плоскости не удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

В общем случае для уравнения (1) ответ на поставленный вопрос таков: *каждое уравнение с двумя переменными определяет, вообще говоря, на плоскости в выбранной системе координат некоторую линию, а именно геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.* Именно в этом и состоит геометрическое значение уравнения с двумя переменными.

Примечание 1. Оборот речи «уравнение (1) определяет линию L» следует понимать в том смысле, что уравнению (1) соответствует линия L.

Примечание 2. *Геометрическим местом точек*, обладающих данным свойством C, называется все множество точек, каждая из которых обладает этим свойством. Например, геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, есть окружность, но не полуокружность. В приведенной выше общей формулировке свойство C состоит в том, что координаты

точек удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, линия L, определяемая уравнением (1), есть все множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (1).

Примечание 3. Выражение «вообще говоря» означает, что относящееся к этому выражению слово «определяет» допускает исключения. Например, уравнению $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не соответствует на плоскости никакой геометрический образ, потому что не существует вещественных чисел x и y, удовлетворяющих этому уравнению.

Упомянутая идея Декарта позволяет геометрически интерпретировать алгебраические задачи. Например, решить систему $x - y = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ на языке геометрии — значит найти координаты точек пересечения прямой, определяемой уравнением $x - y = 0$, и окружности, соответствующей уравнению $x^2 + y^2 = 4$. Геометрически ясно, что задача имеет два решения.

69. Понятие уравнения линии. Понятие уравнения линии является основным в аналитической геометрии.

Определение. *Уравнением данной линии на плоскости в выбранной системе координат называется такое уравнение с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки данной линии и только они:*

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Здесь речь идет о соответствии — линии соответствует уравнение вида (2). Именно в этом смысле следует понимать выражение «линия изображена или представлена уравнением (2)». В уравнении линии величины x и y являются координатами переменной точки, поэтому их называют *текущими координатами.*

Пусть дана линия L, т. е. задано некоторое свойство С, которым обладают все точки линии L и только они. Выберем любую систему координат (x, y). Рассмотрим какую-нибудь фиксированную точку M_1 линии L и обозначим ее координаты в выбранной системе x_1 и y_1. Если выразить аналитически тот факт, что точка M_1 обладает свойством С, то придем к некоторой зависимости между координатами этой точки $\varphi(x_1, y_1) = 0$. Всякая другая точка $M(x, y)$ линии L обладает тем же свойством C и поэтому ее координаты связаны той же зависимостью, и равенство

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{3}$$

выполнено для координат каждой точки линии L. Вместе с тем любая точка, не принадлежащая линии L, свойством С не обладает, и поэтому ее координаты уравнению (3) не удовлетворяют. Уравнение (3) есть уравнение данной линии L в выбранной системе координат.

Понятие уравнения линии позволяет свести геометрические задачи к алгебраическим. Например, задача нахождения точек пересечения двух линий, представленных уравнениями $x - y = 0$

и $x^2 + y^2 = 4$, сводится к алгебраической задаче совместного решения этих уравнений.

Выведем уравнение окружности. *Окружностью* называется геометрические место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром окружности. Свойство С, определяющее окружность, состоит в постоянстве расстояний между центром M_0 и произвольной точкой M окружности: $d(M_0, M) = R$. Для того чтобы это условие выразить аналитически, выберем какую-либо декартову систему координат и обозначим координаты центра M_0 в этой системе (x_0, y_0), а координаты точки M — x и y. Согласно формуле (12) п. 65 получаем $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$ и после возведения в квадрат имеем окончательно

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{4}$$

Это и есть уравнение данной окружности в декартовых координатах. Действительно, уравнению (4) удовлетворяют координаты любой точки окружности и только они, потому что равенство (4) является аналитическим выражением условия С.

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

В полярных координатах (r, φ) окружность радиуса R с центром в полюсе изображается уравнением $r = R$.

В тех же координатах (r, φ) окружность радиусом R с центром в точке $r_0 = R$, $\varphi_0 = 0$ на оси (рис. 57) изображается уравнением $r = 2R \cos \varphi$.

В заключение сформулируем две основные задачи аналитической геометрии. Дана линия. Требуется 1) составить ее уравнение, 2) выяснить геометрические свойства линии путем исследования ее уравнения.

70. Алгебраическая линия и ее порядок. Линия называется *алгебраической*, если ее можно изобразить в декартовой системе координат уравнением вида

$$P_n(x, y) = 0, \tag{5}$$

где $P_n(x, y)$ — многочлен степени n относительно x и y, и нельзя изобразить уравнением $P_k(x, y) = 0$, где $k < n$. Порядком алгебраической линии называется степень n многочлена P_n.

Примеры алгебраических линий. Окружность есть алгебраическая кривая второго порядка, потому что левая часть уравнения (4) есть многочлен второй степени относительно x и y. Прямая есть алгебраическая линия первого порядка, потому что всякую прямую можно изобразить уравнением первой степени относительно x и y (см. п. 71). Линия, определяемая уравнением $\ln x + \ln y = \ln C$, алгебраическая, потому что это уравнение можно привести к виду (5). Действительно, из данного уравнения следует $xy = C$.

Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной линией*. Например, линии, определяемые уравнениями $y = \ln x$ и $y = \sin x$, суть трансцендентные кривые.

Теорема. *Порядок алгебраической кривой не зависит от выбора декартовой системы координат.*

Доказательство. Пусть данная алгебраическая кривая изображается уравнением (5) в выбранной системе координат (x, y). При переходе к другой декартовой системе координат (x', y') в уравнении (5) следует заменить величины x и y их выражениями через x' и y', которые, как известно (см. п. 66), носят линейный характер. Поэтому в результате перехода к новой системе координат получим уравнение $P_{n'}(x', y') = 0$, в левой части которого содержится многочлен относительно x' и y' степени n', причем $n' \leqslant n$. Таким образом, при переходе к новой системе координат степень уравнения не увеличивается.

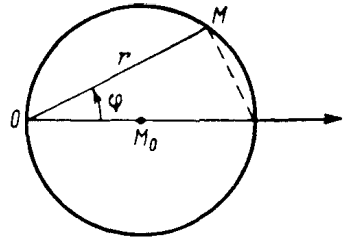

Рис. 57.

Докажем, что эта степень не может и уменьшиться. Действительно, в результате обратного перехода от системы (x', y') к (x, y) уравнение $P_{n'}(x', y') = 0$ перейдет в уравнение (5). При этом в силу первой части доказательства теоремы $n \leqslant n'$. Из неравенств $n' \leqslant n$ и $n \leqslant n'$ следует, что $n' = n$. Теорема доказана.

Примечание. Теорема делает корректным введенное выше понятие порядка алгебраической кривой. Если бы утверждение теоремы не было известно, то было бы не ясно, зависит порядок алгебраической кривой от выбора системы координат или нет. И тогда следовало бы ввести понятие порядка алгебраической кривой в выбранной системе координат. Теорема позволяет ввести единое понятие порядка алгебраической кривой независимо от выбора системы координат.

§ 12. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

71. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пусть на плоскости задана некоторая прямая. *Углом наклона* φ *прямой* называется наименьший положительный угол, на который надо повернуть против часовой стрелки ось абсцисс вокруг начала координат, чтобы она стала параллельной данной прямой или совпала с ней (рис. 58). Из этого определения следует, что величина угла наклона прямой принадлежит промежутку $0 \leqslant \varphi < \pi$.

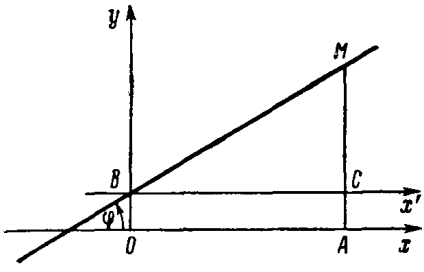

Рис. 58.

Угловым коэффициентом k *прямой* называется число, равное тангенсу угла наклона прямой, т. е. $k = \operatorname{tg} \varphi$. Из этого определения следует, что 1) величина k может принимать любые вещественные значения; 2) прямая, параллельная оси ординат, не имеет углового коэффициента, потому что такая прямая имеет угол наклона $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тангенс которого не выражается числом; 3) всякая прямая, не перпендикулярная оси абсцисс, имеет единственный угловой коэффициент, потому что ее углу наклона

соответствует единственное значение тангенса; 4) каждому числу k соответствует в промежутке $0 \leqslant \varphi < \pi$ единственное значение угла наклона φ.

З а д а ч а 1. Вывести уравнение прямой, проходящей через данную точку B (0, b) и имеющей данный угловой коэффициент k.

Данная величина b имеет простой геометрический смысл — это величина направленного отрезка OB оси ординат, отсекаемого прямой от начала координат; она называется *начальной ординатой*. Итак, даны начальная ордината b и угловой коэффициент k. Эти данные определяют единственную прямую, и эта прямая не перпендикулярна оси абсцисс.

Выберем декартову систему координат. Рассмотрим на прямой произвольную точку M и обозначим ее координаты x и y. Опустим из точки M перпендикуляр MA на ось абсцисс, а из точки B проведем перпендикуляр BC к линии MA. Точка M т о г д а и т о л ь к о т о г д а находится на прямой, когда выполнено соотношение

$$\frac{CM}{BC} = \operatorname{tg} \varphi, \tag{1}$$

где CM — величина отрезка $\overrightarrow{CM}$ оси y', одинаково направленной с осью ординат, а BC — величина отрезка $\overrightarrow{BC}$ оси x', одинаково направленной с осью абсцисс. Здесь в силу теоремы 2 п. 63 $CM = y - b$ и $BC = x$. Поэтому соотношение (1) можно записать в алгебраической форме $(y - b)/x = k$, или

$$y = kx + b. \tag{2}$$

Уравнению (2) удовлетворяют координаты любой точки данной прямой и только они, потому что соотношение (1) выполняется для точек данной прямой и только для них. Поэтому в силу определения понятия уравнения линии (см. п. 69) уравнение (2) является уравнением данной прямой. Уравнение (2) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. В уравнении (2) величины x и y суть текущие координаты, т. е. координаты любой точки прямой, k—угловой коэффициент прямой, b — ее начальная ордината.

Заметим, что если дано уравнение вида (2), то оно определяет единственную прямую в выбранной системе координат. Это следует из геометрического смысла уравнения (см. п. 68).

П р и м е р 1. Если $\varphi = \pi/4$, $b = -2$, то уравнение данной прямой имеет вид $y = x - 2$.

П р и м е р 2. Если $y = -x + 1$, то $b = 1$, $\varphi = 3\pi/4$.

П р и м е р 3. Если в уравнении (2) $k = 0$, то имеем уравнение прямой, параллельной оси Ox: $y = b$.

П р и м е р 4. Если в уравнении (2) $b = 0$, то имеем уравнение $y = kx$ прямой, проходящей через начало координат.

З а д а ч а 2. Составить уравнение прямой, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку A (a, 0).

Здесь дана величина отрезка, отсекаемого прямой на оси абсцисс от начала координат (рис. 59). Задача имеет единственное решение. Уравнение искомой прямой имеет вид

$$x = a, \tag{3}$$

что непосредственно следует из условий задачи и понятия уравнения линии (см. п. 69).

Уравнения (2) и (3) являются уравнениями первой степени относительно декартовых координат x и y. Отсюда следует утверждение.

Теорема 1. *Всякая прямая изображается уравнением первой степени относительно декартовых координат переменной точки прямой.*

72. Общее уравнение прямой. Рассмотрим уравнение первой степени с двумя переменными x и y

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

где A, B и C — вещественные постоянные и $A^2 + B^2 > 0$. Это уравнение алгебраических линий первого порядка (см. п. 70). Выберем декартову прямоугольную систему координат и будем понимать под x и y координаты точки на плоскости в выбранной системе.

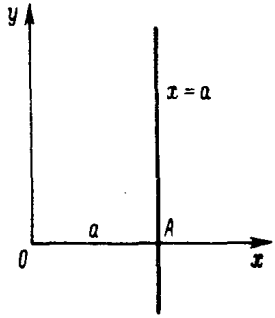

Рис. 59.

Теорема 2. *Всякое уравнение первой степени относительно x и y определяет на плоскости в данной системе координат прямую линию.*

Доказательство. Вспомним, что линией, соответствующей данному уравнению, называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Надо доказать, что уравнению (4) соответствует именно прямая линия.

Возможны только два случая: $B = 0$ и $B \neq 0$. В случае $B \neq 0$ из уравнения (4) следует что $y = -Ax/B - C/B$; это уравнение вида (2), оно определяет прямую, имеющую угловой коэффициент $k = -A/B$ и начальную ординату $b = -C/B$. В случае $B = 0$, $A \neq 0$ из уравнения (4) следует, что $x = -C/A$; это уравнение вида (3), оно определяет прямую, перпендикулярную оси абсцисс. В обоих случаях уравнение (4) определяет прямую. Теорема доказана.

Вместе с тем установлено, что уравнением (4) можно изобразить любую прямую. Уравнение (4) называется *общим уравнением прямой.*

Рассмотрим три частных случая общего уравнения прямой.

1. $C = 0$. Уравнение (4) принимает вид $Ax + By = 0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат. Это следует из того, что координаты начала удовлетворяют уравнению.

2. $B = 0$, $A \neq 0$. Уравнение (4) принимает вид $Ax + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy. Действительно, уравнение можно привести к виду $x = a$, где $a = -C/A$. В частности, при $C = 0$ имеем уравнение оси ординат $x = 0$.

3. $A = 0$, $B \neq 0$. Уравнение (4) принимает вид $By + C = 0$ и определяет прямую, параллельную оси Ox. Действительно, это уравнение можно привести к виду $y = b$, где $b = -C/B$. Это уравнение вида (2), где $k = 0$ и $\varphi = 0$. В частности, если $C = 0$, то прямая совпадает с осью Ox. Следовательно, уравнение $y = 0$ определяет ось абсцисс.

73. Уравнение пучка прямых. Выведем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющую данный угловой коэффициент k.

Ответ ищем в форме уравнения с угловым коэффициентом (2). Здесь неизвестна только величина b, потому что k — данная величина, а текущие координаты x и y не являются неизвестными и войдут в окончательный ответ. Для нахождения величины b напишем условие прохождения прямой через точку M, т. е. подставим координаты точки M_1 вместо текущих координат в уравнение (2). Получим равенство $y_1 = kx_1 + b$, из которого следует, что $b = y_1 - kx_1$. Найденное значение b подставим в уравнение (2), получим

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{5}$$

— *уравнение прямой, проходящей через данную точку* M_1 *в данном направлении* φ, определяемом равенством $\operatorname{tg}\varphi = k$.

В уравнении (5) постоянная k может быть любым вещественным числом. Если в уравнении (5) величину k считать параметром, произвольным вещественным числом, то получим уравнение множества прямых, проходящих через точку M_1. Такое семейство прямых называется *пучком прямых*, а уравнение (5) может быть названо *уравнением пучка прямых с центром в точке* M_1. Заметим, что прямая, определяемая уравнением $x = x_1$, перпендикулярна оси абсцисс и входит в состав пучка прямых с центром в точке M_1, но не изображается уравнением вида (5) ни при каком значении k.

74. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Составим уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Возможны только два случая: $x_1 = x_2$ и $x_1 \neq x_2$. Если $x_1 = x_2$, то прямая перпендикулярна оси абсцисс и ее уравнение есть $x = x_1$.

Если $x_1 \neq x_2$, то задача тоже имеет единственное решение. Составим уравнение пучка прямых с центром в одной из данных точек, например M_1. В уравнении (5) неизвестна только величина k. Для ее определения напишем условие прохождения прямой через точку M_2, т. е. подставим в уравнение (5) координаты точки

M_2 вместо текущих координат; получим равенство $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, из которого следует, что

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

Эта формула определяет угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 при условии $x_1 \neq x_2$. Если подставить найденное значение k в уравнение (5), то получим окончательный ответ, и его можно записать в форме пропорции

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{7}$$

Это и есть искомое *уравнение прямой, проходящей через две данные точки* M_1 и M_2 при условии $x_1 \neq x_2$. В случае $x_1 \neq x_2$ и $y_1 = y_2$ искомая прямая параллельна оси абсцисс, ее уравнение $y = y_1$ следует из уравнения (5) при $k = 0$, что соответствует формуле (6).

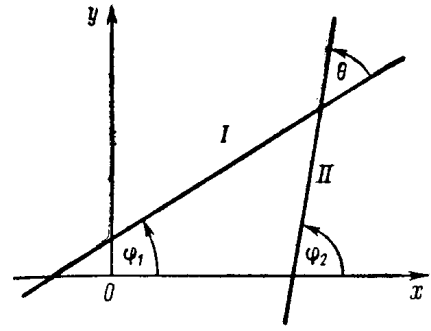

Рис. 60.

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(a, 0)$ и $M_2(0, b)$, находящиеся на осях координат, при условии $ab \neq 0$. Величины a и b имеют такой геометрический смысл — это величины отрезков, отсекаемых данной прямой на осях координат от начала координат.

Положим в равенстве (7) $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = b$ и приведем его к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{8}$$

Имеем так называемое *уравнение прямой в отрезках* на осях. Здесь x и y — текущие координаты, a и b — величины отрезков на осях. Этот вид уравнения удобен для построения прямой.

Пример 2. Чтобы построить прямую, определяемую уравнением $2x - 3y - 6 = 0$, преобразуем его к виду $2x - 3y = 6$ и путем деления на правую часть получим уравнение в отрезках на осях $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$. Следовательно, $a = 3$, $b = -2$.

75. Угол между двумя прямыми. Найдем угол между прямыми, заданными уравнениями

$$y = k_1 x + b_1 \quad \text{(I)} \quad \text{и} \quad y = k_2 x + b_2 \quad \text{(II)}. \tag{9}$$

Если прямые пересекаются, то они образуют две пары равных углов. Обозначим один из углов через θ (рис. 60). Тогда по теореме о внешнем угле треугольника имеем $\varphi_2 = \varphi_1 + \theta$, где φ_1 — угол наклона прямой (I), имеющей угловой коэффициент k_1,

а φ_2 — угол наклона прямой (II). Если $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, то тангенс угла θ найдем по формуле для тангенса разности углов. Положив $\operatorname{tg} \varphi_1 = k_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = k_2$, получим

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \quad \left(\theta \neq \frac{\pi}{2}\right). \tag{10}$$

Формула (10) определяет тангенс того угла, который образован вращением против часовой стрелки прямой с угловым коэффициентом k_1 (вокруг точки пересечения прямых) до совмещения со второй прямой. Тангенс смежного угла равен $\operatorname{tg} (\pi - \theta) = -\operatorname{tg} \theta$.

Рассмотрим условие параллельности прямых. Если прямые параллельны или совпадают, то равны углы наклона прямых, а следовательно, равны и тангенсы этих углов (здесь φ_1 и φ_2 отличны от $\pi/2$, потому что прямые изображаются уравнениями с угловыми коэффициентами). Следовательно, $k_1 = k_2$.

Если $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$. Следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2$, так как $0 \leqslant \varphi < \pi$, и прямые параллельны или совпадают.

Итак, доказано, что *равенство угловых коэффициентов*

$$k_1 = k_2 \tag{11}$$

есть условие необходимое и достаточное для параллельности (или совпадения) прямых, не перпендикулярных оси абсцисс.

Рассмотрим условие перпендикулярности прямых. Если прямые перпендикулярны, т. е. $\theta = \frac{\pi}{2}$, то зависимость между k_1 и k_2 найдем с помощью равенства $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$. Получим

$$k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} (\varphi_1 + \pi/2) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -1/k_1.$$

Следовательно, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку:

$$k_2 = -1/k_1 \text{ и } k_1 k_2 = -1. \tag{12}$$

Если выполнено условие (12), то $\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = -1$. Следовательно, $\cos (\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ и $\theta = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$.

Итак, *условие* (12) *есть необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых.*

Примечание. Из условий задачи непосредственно не видно пересекаются прямые (I) и (II) или нет. Поэтому можно попытаться найти $\operatorname{tg} \theta$ по формуле (10). Если при этом окажется, что числитель правой части равен нулю, то прямые параллельны (или совпадают), так как выполнено условие (11). Если же окажется, что знаменатель правой части формулы (10) равен нулю, то прямые перпендикулярны, так как выполнено условие (12). В остальных случаях прямые пересекаются не под прямым углом; формула (10) дает величину тангенса одного из углов между прямыми.

Найдем угол между прямыми, заданными общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{(I)} \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{(II)}.$$

В случае $B_1B_2 \neq 0$ эта задача сводится к предыдущей задаче, потому что из данных уравнений можно найти угловые коэффициенты прямых

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{и} \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2} \tag{13}$$

и воспользоваться формулами (10)—(12). Угол между пересекающимися прямыми найдем по формуле (10), заменив k_1 и k_2 по формулам (13). Таким образом, получим

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{14}$$

Условие параллельности (или совпадения) прямых следует из (11) и (13), и его можно записать в виде равенства

$$A_1B_2 = A_2B_1. \tag{15}$$

Условие перпендикулярности прямых следует из равенств (12) и (13) и имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{16}$$

Пример 1. Прямые, определяемые уравнениями $2x + 3y + C = 0$ и $4x + 6y + D = 0$, параллельны или совпадают, так как выполнено условие (15).

Пример 2. Прямые $2x + 3y + C = 0$ и $3x - 2y + D = 0$ взаимно перпендикулярны, так как выполнено условие (16).

76. Задача о взаимном расположении двух прямых. Пусть прямые заданы общими уравнениями (I) и (II). Выясним, имеют ли прямые общие точки, сколько их и где они находятся.

Логически возможны только три случая — либо данные прямые не имеют общих точек (т. е. прямые параллельны), либо имеют только одну общую точку (т. е. прямые пересекаются), либо они имеют более одной общей точки (т. е. прямые совпадают всеми своими точками). Требуется установить соотношения между коэффициентами данных уравнений в этих случаях.

Исследуем для этого систему уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим матрицу коэффициентов и свободных членов системы $\begin{pmatrix} A_1B_1C_1 \\ A_2B_2C_2 \end{pmatrix}$ и составим три определителя второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}.$$

Первый из этих определителей Δ называется *определителем системы* (17). Возможны только три случая:

$$1)\ \Delta \neq 0,\quad 2)\ \Delta = 0,\ \Delta_1 \neq 0,\quad 3)\ \Delta = \Delta_1 = 0.$$

Случай 1. $\Delta \neq 0$. Путем исключения неизвестных система (17) может быть заменена эквивалентной системой (см. п. 59)

$$\Delta x = \Delta_1,\ \Delta y = \Delta_2, \tag{18}$$

которая имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \tag{19}$$

Дадим геометрическую интерпретацию результата. Условие $\Delta \neq 0$ можно записать в виде $A_1B_2 \neq A_2B_2$. Отсюда следует, что данные прямые имеют различные угловые коэффициенты, и поэтому эти прямые пересекаются. Формулы (19) определяют координаты единственной точки пересечения этих прямых.

Случай 2. $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$. В этом случае, так же как в первом, система (18) является следствием системы (17). Первое уравнение системы (18) не имеет решения, потому что его левая часть равна нулю при любом значении x, а правая часть от нуля отлична. Поэтому система (18) не имеет решения, она называется *несовместной*. Система (17) тоже несовместна, потому что если бы она имела решение, то оно было бы вместе с тем решением системы (18). Но система (18) решений не имеет.

Условие $\Delta = 0$ геометрически означает, что данные прямые параллельны или совпадают. Но поскольку система (17) не имеет решения, то прямые не имеют общих точек; следовательно, в случае 2 данные прямые параллельны.

Случай 3. $\Delta = \Delta_1 = 0$. Отсюда следует, что $\Delta_2 = 0$. Действительно, исходные равенства можно записать в виде $A_1/A_2 = B_1/B_2$ и $B_1/B_2 = C_1/C_2$, поэтому $A_1/A_2 = C_1/C_2$. Следовательно, в случае 3 выполнено соотношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \tag{20}$$

В равенстве (20) отдельные члены отношений могут быть равны нулю причем, если один из членов какого-либо из трех отношений равен нулю то и второй член этого отношения тоже равен нулю.

При условии (20) система (17) сводится к одному уравнению. Действительно, если обозначить через a каждое из трех отношений (20) и положить согласно (20) в первом из уравнений системы (17) $A_1 = A_2a$, $B_1 = B_2a$, $C_1 = C_2a$, то получим уравнение $a(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ (где $a \neq 0$, так как $A_k^2 + B_k^2 \neq 0$), эквивалентное второму из уравнений (17). Поэтому система (17) сводится к одному уравнению с двумя неизвестными. Такая система имеет бесчисленное множество решений. Вместе с тем доказано, что первое уравнение системы (17) сводится ко второму и что оба уравнения определяют одну и ту же прямую. Прямые в этом случае совпадают.

Следствие. *Соотношения* (20) *есть необходимое и достаточное условие того, что два уравнения системы* (17) *определяют одну и ту же прямую.* Достаточность этого условия доказана при рассмотрении случая 3. Для доказательства необходимости предположим, что прямые, заданные уравнениями (17), совпадают; требуется доказать, что выполнено условие (20), т. е. $\Delta = \Delta_1 = 0$. Докажем это утверждение способом от противного. Если $\Delta \neq 0$ (случай 1), то прямые имеют только одну общую точку, что противоречит предположению о совпадении прямых. Если же $\Delta = 0$, но $\Delta_1 \neq 0$ (случай 2), то прямые не имеют общих точек, что опять противоречит условию совпадения прямых. Поэтому остается случай 3, т. е. выполнено соотношение (20).

77. Нормальное уравнение прямой. Положение прямой на плоскости вполне определяется заданием двух параметров α и p, где α — угол между осью Ox и нормалью к прямой, p — расстояние от начала координат до прямой (рис. 61). Только в случае $p = 0$ величина α двузначна, так как за положительное направление нормали можно принять любое из двух возможных.

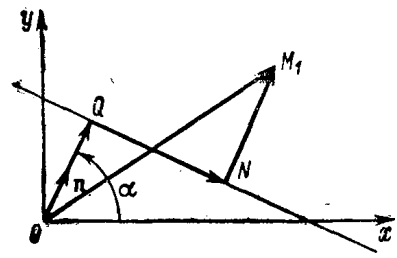

Рис. 61.

Пусть даны величины α и p. Выведем уравнение прямой, определяемой этими величинами. Для этого рассмотрим произвольную точку $N(x, y)$ плоскости. Для того чтобы точка N принадлежала прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{пр}_n \overrightarrow{ON} = p. \tag{21}$$

Этим свойством обладают точки прямой и только они. Если ввести в рассмотрение полярные координаты r и φ точки N (полярная ось совпадает с положительной полуосью Ox, а полюс с началом координат), то условие (21) можно записать так: $p = r\cos(\alpha - \varphi)$ или

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha. \tag{22}$$

Отсюда следует уравнение

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{23}$$

которое называется *нормальным уравнением прямой*. Вместе с тем доказано, что всякую прямую можно изобразить нормальным уравнением. Уравнение (23) линейно относительно x и y; оно имеет вид $ax + by + c = 0$, где $a^2 + b^2 = 1$ и $c < 0$. Например, уравнение $-0{,}6x + 0{,}8y - 2 = 0$ есть уравнение прямой в нормальной форме, а уравнение $0{,}6x - 0{,}8y + 2 = 0$ — нет.

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Составим нормальное уравнение этой прямой.

Выше было установлено, что каждую прямую можно изобразить как уравнением общего вида, так и нормальным уравнением. Поэтому между коэффициентами этих уравнений должна существовать зависимость. Поскольку оба уравнения — общее и нормальное — определяют одну и ту же прямую, то в соответствии с формулой (20) должно выполняться соотношение между коэффициентами уравнений

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C}. \tag{24}$$

Если обозначить каждый член отношения (24) через μ, то получим

$$\cos\alpha = A\mu, \quad \sin\alpha = B\mu, \quad -p = C\mu. \tag{25}$$

Из первых двух равенств (25) путем возведения в квадрат и сложения выводим

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{26}$$

Число μ называется *нормирующим множителем*. Для определения знака нормирующего множителя используем третье из равенств (25), согласно которому $C\mu$ есть число отрицательное, так как $p > 0$. Поэтому знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения. Отсюда следует п р а в и л о: для того чтобы привести общее уравнение прямой к нормальному виду, достаточно умножить все члены данного уравнения на нормирующий множитель. Действительно, при этом получим уравнение $A\mu x + B\mu y + C\mu = 0$, которое является, принимая во внимание соотношения (25), нормальным уравнением этой же прямой.

Геометрический смысл коэффициентов A и B общего уравнения прямой виден из первых двух равенств (25). A и B — числа пропорциональные (коэффициент пропорциональности μ^{-1}) соответственно косинусу и синусу угла наклона нормали к данной прямой.

П р и м е р. Найти $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ прямой, заданной уравнением $3x - 4y - 5 = 0$. Для этого вычисляем $\mu = 1/5$ и по формулам (25) находим $\cos\alpha = 3/5$, $\sin\alpha = -4/5$. Следовательно, угол α тупой. Нормальное уравнение данной прямой имеет вид $0{,}6x - 0{,}8y - 1 = 0$.

78. Расстояние от точки до прямой. Найдем расстояние d от данной точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой, заданной уравнением (23). Для этого проведем перпендикуляры M_1N и OQ к данной прямой. Имеет место векторное равенство $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NM_1}$ (см. рис. 61). Проектируем каждый член этого равенства на нормаль: пр $\overrightarrow{OM_1} = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha$ (это равенство выводится так же, как и формула (22)), пр. $\overrightarrow{OQ} = p$, пр $\overrightarrow{QN} = 0$, пр $\overrightarrow{NM_1} = \pm d$ (здесь знак минус соответствует случаю, когда точки M_1 и O находятся по одну сторону прямой). По теореме о проекции геометрической суммы векторов получаем $x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha = p \pm d$. Отсюда следует, что

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|. \tag{27}$$

Итак, *расстояние d от данной точки до данной прямой равно абсолютному значению результата подстановки в левую часть нормального уравнения прямой координат данной точки вместо текущих координат.*

Пример. Для определения расстояния от точки M (1,1) до прямой $3x - 4y + 10 = 0$ приводим уравнение прямой к нормальному виду $-0{,}6x + 0{,}8y - 2 = 0$ и по формуле (27) получаем $d = 1{,}8$.

§ 13. ЛИНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линией второго порядка называется линия, которую можно изобразить уравнением второй степени относительно декартовых координат

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D, E и F — вещественные постоянные, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Уравнение (1) называется общим уравнением линии второго порядка.

79. Окружность. В п. 69 дано определение окружности и выведено уравнение окружности радиусом R с центром в точке (x_0, y_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (2)$$

В частности, если $x_0 = y_0 = 0$, то имеем уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$. Если в уравнении (2) раскрыть скобки и перегруппировать члены, то получим уравнение вида (1)

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0,$$

в котором $A = C$ и $B = 0$. При этом условии преобразуем уравнение (1) путем выделения полных квадратов к виду

$$\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}(D^2 + E^2 - AF). \qquad (3)$$

Следовательно, для того чтобы уравнение (1) определяло окружность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$A = C, \quad B = 0, \quad D^2 + E^2 - AF > 0. \qquad (4)$$

В этом случае координаты центра и радиус будут соответственно равны

$$x_0 = -\frac{D}{A}, \quad y_0 = -\frac{E}{A}, \quad R = \frac{1}{A}\sqrt{D^2 + E^2 - AF}. \qquad (5)$$

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Путем выделения полных квадратов приводим данное уравнение к виду $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$. Отсюда следует, что $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $R = \sqrt{5}$.

80. Эллипс и его уравнение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 плоскости (называемых фокусами эллипса) есть величина постоянная (равная $2a$).

Обозначим через $2c$ расстояние между фокусами F_1 и F_2 (рис. 62). Рассмотрим произвольную точку эллипса M и треугольник F_1F_2M. Известно, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны $F_1M + F_2M > F_1F_2$, поэтому

$$a > c. \tag{6}$$

Неравенство (6) называется условием существования эллипса.

Для вывода канонического уравнения эллипса выберем декартову систему координат так, чтобы ее ось Ox проходила через фокусы от F_1 к F_2, начало координат выберем в середине отрезка F_1F_2. Координаты произвольной точки M эллипса обозначим через x и y. По определению эллипса имеем *

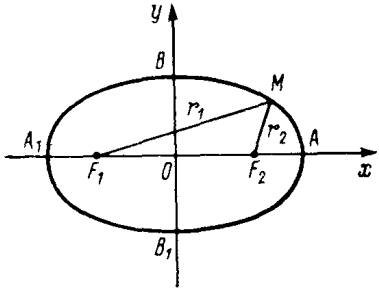

Рис. 62.

$$d(F_1, M) + d(F_2, M) = 2a. \tag{7}$$

Величины F_1M и F_2M называются фокальными радиусами эллипса и обозначаются соответственно r_1 и r_2. Найдем выражение их длин через координаты концов фокальных радиусов:

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{8}$$

Подставив эти выражения в равенство (7), получим уравнение эллипса

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{9}$$

Для приведения его к канонической форме надо освободиться от радикалов путем цепи тождественных преобразований, включающих дважды возведение во вторую степень. Выполним эти преобразования:

1) $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,

2) $x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$,

3) $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$,

4) $a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$,

---

* Символ $d(A, B)$ означает расстояние между точками A и B.

5) $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$,

6) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$.

В соответствии с условием (6) обозначим

$$a^2-c^2=b^2. \tag{10}$$

Теперь уравнению (9) можно придать вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{11}$$

Уравнение (11) называется *каноническим уравнением эллипса*. В соответствии с общим понятием уравнения линии равенство (11), равносильное равенству (9), есть уравнение эллипса, потому что ему удовлетворяют координаты каждой точки эллипса и только они.

81. Исследование формы эллипса. Если уравнение линии содержит переменную x только в четных степенях, т. е. имеет вид $F(x^2, y)=0$, то линия, определяемая этим уравнением, симметрична относительно оси ординат. Действительно, если точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит линии, определяемой этим уравнением, то и симметричная точка $M_2(-x_1, y_1)$ тоже принадлежит этой линии, потому что ее координаты удовлетворяют данному уравнению.

Аналогично доказывается, что линия, определяемая уравнением $F(x, y^2)=0$, симметрична относительно оси абсцисс.

А. Уравнение эллипса (11) содержит текущие координаты x и y только в четных степенях, поэтому эллипс симметричен относительно координатных осей. Следовательно, достаточно исследовать изучаемую линию лишь в первой четверти, а затем построить ее зеркальное изображение в координатных осях. Для этого решим уравнение (11) относительно y и получим уравнение эллипса в виде двух равенств

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \tag{12}$$

одно из которых соответствует верхней полуплоскости ($y\geqslant 0$), а второе соответствует нижней полуплоскости.

Б. В первой четверти $y\geqslant 0$, и поэтому $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Область допустимых значений x в первой четверти $0\leqslant x\leqslant a$. При $x=0$ функция имеет наибольшее значение $y=b$. С ростом x величина y убывает в соответствии с зависимостью (12) и при $x=a$ достигает наименьшего (в первой четверти) значения $y=0$. В первой четверти график функции представлен на рис. 62 дугой BA.

В. Строим зеркальное отображение дуги BA в координатных осях и получаем эллипс. Эллипс есть замкнутая кривая,

симметричная относительно координатных осей (см. рис. 62). Точки пересечения эллипса с его осями симметрии A, A_1, B и B_1 называются *вершинами эллипса*. *Осями эллипса* называются отрезки A_1A и B_1B. Величины a и b в каноническом уравнении (12) эллипса имеют следующий геометрический смысл: a есть *длина большой полуоси эллипса*, b — *длина его малой полуоси*.

В частном случае, когда $a = b$, уравнение (11) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$ и определяет окружность. В этом случае $c = 0$, т. е. два фокуса эллипса сливаются в один, который является центром окружности. Таким образом, окружность является предельной формой эллипса, когда величина c стремится к нулю; при этом величина b стремится к a.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси, т. е.

$$\varepsilon = c/a. \qquad (13)$$

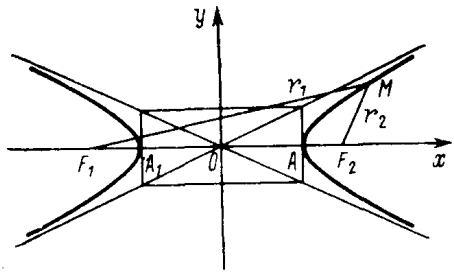

Рис. 63.

Из (6) и (13) следует, что эксцентриситет эллипса принадлежит промежутку $0 < \varepsilon < 1$. Эксцентрисистет характеризует степень сжатия эллипса, отношение его малой полуоси b к большой полуоси a. Действительно, из (10) и (13) следуют равенства

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \qquad (14)$$

которые показывают, что чем больше ε, тем меньше отношение b/a и тем больше вытянут эллипс.

Пример 1. Найти параметры эллипса, заданного уравнением $3x^2 + 4y^2 = 12$. Для этого приведем данное уравнение к каноническому виду $x^2/4 + y^2/3 = 1$. Отсюда следует, что $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

Пример 2. Найти параметры эллипса, заданного уравнением $4x^2 + 3y^2 = 12$ или $x^2/3 + y^2/4 = 1$.

Этот эллипс вытянут вдоль оси ординат, его фокусы находятся на оси ординат. Если оси координат (x, y) повернуть вокруг начала на угол $\pi/2$, то получим систему координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$, причем $x = -\tilde{y}$, $y = \tilde{x}$. В новой системе координат данное уравнение имеет вид $\tilde{x}^2/4 + \tilde{y}^2/3 = 1$, следовательно, $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

82. Гипербола и ее уравнение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 плоскости (называемых фокусами гиперболы) есть величина постоянная (равная $2a$). Обозначим $d(F_1, F_2) = 2c$ (рис. 63).

Пусть M — произвольная точка гиперболы, тогда по определению $d(F_1, M) - d(F_2, M) = 2a$ или $d(F_2, M) - d(F_1, M) = 2a$.

Эти условия, определяющие гиперболу, можно записать в виде равенства

$$d(F_1,\ M)-d(F_2,\ M)=\pm 2a. \tag{15}$$

Разность сторон любого треугольника, в частности треугольника F_1F_2M, меньше третьей стороны, поэтому

$$a<c. \tag{16}$$

Это неравенство называется у с л о в и е м с у щ е с т в о в а н и я гиперболы.

Для вывода канонического уравнения гиперболы проведем ось абсцисс декартовой системы координат через фокусы в направлении от F_1 к F_2, а начало координат выберем в середине отрезка F_1F_2. Тогда координаты вершин треугольника F_1F_2M будут F_1 $(-c,\ 0)$, F_2 $(c,\ 0)$, M $(x,\ y)$. Длины фокальных радиусов гиперболы F_1M и F_2M имеют те же выражения (8), что и для эллипса. Из (15) и (8) следует уравнение гиперболы

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a. \tag{17}$$

Для приведения его к канонической форме надо освободиться от радикалов путем двукратного возведения в квадрат. Выполним преобразования равенства (17), аналогичные рассмотренным в п. 80 преобразованиям равенства (9). Обозначим

$$b^2=c^2-a^2 \tag{18}$$

и получим так называемое *каноническое уравнение гиперболы*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{19}$$

Равенство (19) является уравнением гиперболы, потому что ему, так же как и равносильному равенству (17), удовлетворяют координаты точек гиперболы и только они.

83. Исследование формы гиперболы по ее уравнению.

1. Уравнение (19) содержит текущие координаты только в четных степенях, поэтому (см. п. 81) гипербола симметрична относительно координатных осей.

2. Решим уравнение (19) относительно y, получим

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \tag{20}$$

В первой четверти $y>0$, и поэтому перед корнем выбираем знак «плюс». Подкоренное выражение положительно при условии $x>a$, если $x>0$. При $x=a$ имеем $y=0$. С возрастанием x возрастает и y; при $x\to+\infty$ имеем $y\to+\infty$.

3. Находим наклонные асимптоты гиперболы; их уравнение $y = kx + m$. По формулам п. 43 находим

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{b}{ax} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} = \frac{b}{a},$$

$$m = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 - a^2} - x\right] = 0.$$

Следовательно, бесконечная ветвь гиперболы, находящаяся в первой четверти, имеет асимптоту, уравнение которой $y = bx/a$.

4. Из симметрии гиперболы относительно координатных осей следует, что гипербола имеет четыре бесконечных ветви с асимптотами

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{21}$$

Для построения асимптот гиперболы целесообразно предварительно построить прямоугольник с полуосями $2a$ и $2b$, стороны которого параллельны координатным осям и центр которого совпадает с началом координат. Диагонали этого прямоугольника, продолженные неограниченно, представляют асимптоты гиперболы (см. рис. 63). Ось Ox пересекает гиперболу в точках A_1 и A, называемых вершинами гиперболы. Оси симметрии гиперболы называют ее осями. Отрезок A_1A называется *вещественной осью* гиперболы.

Две гиперболы, которые определяются уравнениями $x^2/a^2 - y^2/b^2 = \pm 1$ в одной и той же системе координат при одних и тех же значениях параметров a и b, называются *взаимно сопряженными гиперболами*. Гипербола с равными полуосями $a = b$ называется *равносторонней гиперболой*. Ее каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{22}$$

Выведем каноническое уравнение равносторонней гиперболы (22) относительно ее асимптот. Для этого примем асимптоты (их уравнения $y = \pm x$) за оси новой системы координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$. По формулам (16) п. 66 при $\alpha = -\pi/4$ получим $x = (\tilde{x} + \tilde{y})/\sqrt{2}$, $y = (\tilde{y} - \tilde{x})/\sqrt{2}$. Заменив по этим формулам величины x и y в равенстве (22), получим (после очевидных упрощений) уравнение равносторонней гиперболы относительно асимптот $\tilde{x}\tilde{y} = a^2/2$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами гиперболы к длине ее вещественной оси

$$\varepsilon = c/a. \tag{23}$$

Отсюда согласно (16) следует, что эксцентриситет гиперболы всегда больше единицы: $\varepsilon > 1$. Обозначим через φ угол между осью абсцисс и асимптотой ветви гиперболы, лежащей в первой

четверти; тогда $\operatorname{tg}\varphi = b/a$. Эксцентриситет ε связан с φ соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \tag{24}$$

вытекающим из равенств (18) и (23). Следовательно, эксцентриситет гиперболы характеризует угол 2φ между ее асимптотами, причем чем больше ε, тем больше и этот угол. У равносторонней гиперболы $a = b$ и поэтому $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Пример. Найти параметры гиперболы, заданной уравнением $3x^2 - 4y^2 = 12$. Для этого приводим данное уравнение к каноническому виду $x^2/4 - y^2/3 = 1$, из которого получаем $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Следовательно, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$ и $\varepsilon = \sqrt{7}/2$. Уравнение асимптот гиперболы $y = \pm\sqrt{3}x/2$.

84. Парабола. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки F (называемой фокусом параболы) и от данной прямой D (называемой директрисой параболы).

Если M — произвольная точка параболы (рис. 64), то по определению имеет место равенство

$$d(M, F) = d(M, A). \tag{25}$$

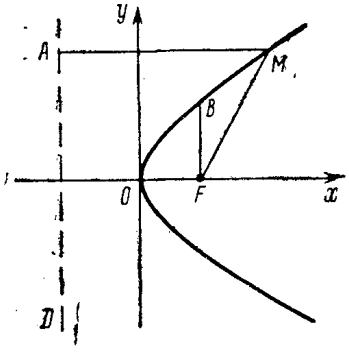

Рис. 64.

Для вывода канонического уравнения параболы выберем декартову систему координат. Пусть ось абсцисс направлена перпендикулярно директрисе от D в сторону фокуса F и проходит через фокус. Начало координат O выберем в точке оси абсцисс, равноудаленной от директрисы и фокуса. Обозначим буквой p расстояние между фокусом и директрисой. Тогда уравнение директрисы будет $x = -p/2$, а фокус будет иметь координаты $F(p/2, 0)$. Пусть точка M параболы имеет координаты x и y. Тогда $d(M, F) = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}$, $d(M, A) = x + p/2$ и из (25) следует уравнение параболы

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Для приведения его к каноническому виду возводим обе его части в квадрат и после упрощений получаем

$$y^2 = 2px. \tag{26}$$

Уравнение (26) называется *каноническим уравнением параболы*. Величина p называется *параметром параболы*; она характеризует величну так называемого фокального радиуса FB, т. е. ординаты точки B параболы. Из уравнения (26) при $x = p/2$ получим $y_B = p$.

Следовательно, та из парабол имеет больший фокальный радиус, которая имеет большую величину параметра p.

Исследуем форму параболы по ее каноническому уравнению.

Парабола симметрична относительно оси абсцисс, потому что уравнение (26) содержит величину y в четной степени. При увеличении x величина y увеличивается в соответствии с условием (26) (при $y > 0$). Асимптот парабола не имеет. *Осью параболы* называется ее ось симметрии. Парабола, определяемая уравнением (26), имеет ось, совпадающую с осью абсцисс. *Вершиной параболы* называется точка пересечения параболы с ее осью симметрии (см. рис. 64).

Одна и та же парабола изображается различными уравнениями в разных системах координат. Так, уравнения $y^2 = 2px$, $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$ и $x^2 = 2py$, где всюду $p > 0$, определяют одну и ту же параболу, но различно расположенную на плоскости относительно координатных осей. Парабола, ось которой параллельна оси ординат, рассмотрена в п. 66; она имеет уравнение $y = ax^2 + bx + c$. Вершину этой параболы можно найти по правилу исследования функции на экстремум. Для этого приравняем нулю производную функции $2ax + b = 0$ и найдем абсциссу вершины $x_0 = -b/2a$. Ординату вершины получим в результате подстановки $x = x_0$ в уравнение параболы.

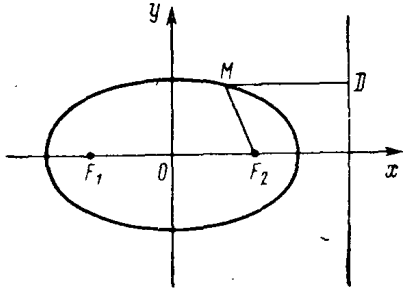

Рис. 65.

85. Директрисы кривых второго порядка. Рассмотрим эллипс и гиперболу, определяемые соответственно каноническими уравнениями (11) и (19).

Директрисами эллипса (гиперболы) называются две прямые, перпендикулярные большой оси эллипса (оси гиперболы), проходящие от его (ее) центра на расстоянии a/ε. Их уравнения суть

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \tag{27}$$

Теорема. *Отношение расстояния r от произвольной точки M эллипса (гиперболы) до фокуса к расстоянию d от точки M до соответствующей этому фокусу директрисе есть величина постоянная, равная эксцентриситету кривой*

$$r/d = \varepsilon. \tag{28}$$

Докажем теорему для эллипса. Воспользуемся обозначениями п. 80 и рис. 65. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса, определяемого уравнением (11). Расстояние от точки M до правой директрисы равно разности абсцисс точек D и M $d = MD = a/\varepsilon - x$. По определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$. С помощью

(8) последовательно получаем $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, $r_1 - r_2 = 2\varepsilon x$; поэтому

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x. \tag{29}$$

Следовательно, отношение r_2 к d действительно равно ε: $r_2/d = (a - \varepsilon x)/(a/\varepsilon - x) = \varepsilon$.

Для гиперболы схема доказательства такая же. Пользуясь обозначениями п. 82, так же как и для эллипса, получаем $d = DM = x - a/\varepsilon$. Величины фокальных радиусов связаны соотношениями $r_1 - r_2 = \pm 2a$ и определяются равенствами (8). Отсюда следует, что

$$r_1 = \pm(\varepsilon x + a), \quad r_2 = \pm(\varepsilon x - a) \tag{30}$$

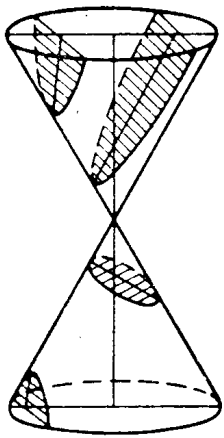

Рис. 66.

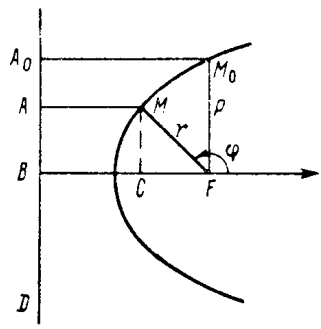

Рис. 67.

(знак «+» относится к правой ветви гиперболы, а знак «—» — к ее левой ветви). Следовательно, отношение r_2 к d постоянно:

$$r_2/d = (\varepsilon x - a)/(x - a/\varepsilon) = \varepsilon. \tag{31}$$

Эта теорема выявляет важное свойство эллипса и гиперболы и позволяет сформулировать о б щ е е о п р е д е л е н и е эллипса, гиперболы и параболы. *Геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние r до некоторой фиксированной точки (фокуса) и расстояние d до некоторой фиксированной прямой (директрисы) находятся в постоянном отношении $r/d = \varepsilon$, есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, гипербола, если $\varepsilon > 1$, парабола, если $\varepsilon = 1$.*

П о н я т и е о к о н и ч е с к и х с е ч е н и я х. Рассмотрим круговую коническую поверхность, образованную вращением прямой вокруг оси. Пусть эта прямая образует с осью вращения угол α. Рассмотрим сечение конической поверхности плоскостью, наклоненной к оси вращения под углом φ (рис. 66). Можно доказать, что в сечении получится окружность при $\varphi = \pi/2$,

парабола при $\varphi = \alpha$, эллипс при $\alpha < \varphi < \pi/2$, гипербола при $0 < \varphi < \alpha$.

86. Полярное уравнение кривых второго порядка. Пусть дана линия L (эллипс, гипербола или парабола), директриса D этой линии и соответствующий фокус F (рис. 67). Введем полярную систему координат (r, φ) с полюсом в точке F и полярной осью, которая перпендикулярна директрисе D и направлена от D. Произвольная точка M линии L имеет координаты r и φ, между которыми нужно установить зависимость. По теореме п. 85 для точек линии L выполнено условие (28). Здесь $d = AM = BF - CF$. Найдем величины BF и CF.

1) Точка M_0 имеет полярные координаты p и $\pi/2$, где $p = FM_0$ — данное число, называемое фокальным параметром линии L. По условию (28) $p/A_0M_0 = \varepsilon$, поэтому $BF = A_0F_0 = p/\varepsilon$.

2) Из $\triangle CFM$ следует $CF = r\cos(\pi - \varphi) = -r\cos\varphi$. Поэтому разность величин BF и CF равна $d = r\cos\varphi + p/\varepsilon$. Отсюда и из равенства (28) следует полярное уравнение кривых второго порядка $r = \varepsilon(r\cos\varphi + p/\varepsilon)$ или

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{32}$$

где p — фокальный параметр кривой; ε — ее эксцентриситет; r и φ — текущие координаты.

87. Исследование общего уравнения линий второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка в декартовой системе координат (X, Y) имеет вид

$$A_1X^2 + B_1XY + C_1Y^2 + 2D_1X + 2E_1Y + F_1 = 0. \tag{33}$$

Нужно выяснить, какую линию определяет уравнение (33) при каждом сочетании численных значений его коэффициентов, определить местоположение этой линии в системе (X, Y) и составить ее каноническое уравнение. Для этого приведем уравнение (33) к простейшему виду путем последовательного преобразования координат, которое выполняется в два этапа — сначала поворот осей, затем параллельный перенос новых осей.

1. Упрощение уравнения линии второго порядка путем поворота координатных осей. Обозначим новые координаты x и y. Формулы преобразования координат при вращении системы (X, Y) на угол α (см. п. 66) таковы:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{34}$$

Заменим в уравнении (33) величины X и Y по формулам (34) и после раскрытия скобок и приведения подобных членов получим уравнение той же линии в системе координат (x, y):

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{35}$$

где

$$A = A_1\cos^2\alpha + B_1\cos\alpha\sin\alpha + C_1\sin^2\alpha,$$
$$B = 2(C_1 - A_1)\sin\alpha\cos\alpha + B_1(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$
$$C = A_1\sin^2\alpha - B_1\sin\alpha\cos\alpha + C_1\cos^2\alpha, \qquad (36)$$
$$D = D_1\cos\alpha + E_1\sin\alpha, \quad E = -D_1\sin\alpha + E_1\cos\alpha, \quad F = F_1.$$

Из формул (36) непосредственно следует, что $4A_1C_1 - B_1^2 = 4AC - B^2$.

Формулы (36) имеют место при любом угле поворота осей α. Выберем угол α таким, чтобы в уравнении (35) коэффициент B был равен нулю. Покажем, что такой выбор угла α всегда возможен. Для этого рассмотрим выражение

$$B = (C_1 - A_1)\sin 2\alpha + B_1\cos 2\alpha. \qquad (37)$$

Возможны только два случая: 1) если $A_1 \neq C_1$, то B обращается в нуль при условии

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{B_1}{A_1 - C_1}; \qquad (38)$$

2) если $A_1 = C_1$, то B обращается в нуль при условии $\alpha = \pi/4$. При таком выборе угла поворота осей α приходим к уравнению исследуемой линии

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (39)$$

в котором коэффициенты определяются формулами (36).

Итак, доказано, что *уравнение* (33) *путем преобразования вращения* (34) *всегда может быть приведено к уравнению* (39), *в котором нет произведения переменных.*

Классифицируем уравнение линий второго порядка. Уравнение (33) называется эллиптическим, если $AC > 0$, гиперболическим, если $AC < 0$, параболическим, если $AC = 0$. В первых двух случаях линия, определяемая уравнением (33), называется центральной.

2. Упрощение уравнения (39) путем параллельного переноса осей. Обозначим новые координаты $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$. Формулы преобразования координат при параллельном переносе осей имеют вид $\tilde{x} = x - x_0$, $\tilde{y} = y - y_0$, где x_0 и y_0 — координаты нового начала в системе (x, y).

Если линия второго порядка центральная и, следовательно, величины A и C отличны от нуля, то путем выделения полных квадратов преобразуем уравнение (39)

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{A}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$$

и получим

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = H, \qquad (40)$$

где

$$x_0 = -\frac{D}{A}, \quad y_0 = -\frac{E}{C}, \quad H = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F. \tag{41}$$

Если в формулах преобразования координат величины x_0 и y_0 выбрать в соответствии с равенствами (41), то в системе координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ уравнение (40) примет вид

$$A\tilde{x}^2 + C\tilde{y}^2 = H. \tag{42}$$

Исследуем эллиптическое уравнение. Пусть $AC > 0$. Возможны только такие три случая. 1) $H = 0$. Тогда из равенства (40) следует, что оно определяет точку $x = x_0$, $y = y_0$. Эту же точку определяет уравнение (33). Координаты этой точки в системе (X, Y) определяются формулами (36) и (41).

2) $AH > 0$. Следовательно, $CH > 0$, тогда из (42) выводим

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a = \sqrt{\frac{H}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{C}}. \tag{43}$$

В этом случае уравнение (42), а вместе с ним и уравнения (40), (39) и (33) определяют эллипс.

3) $AH < 0$. Ни одна точка плоскости не удовлетворяет уравнению (42), а вместе с тем и уравнению (33). Действительно, знаки левой и правой частей равенства (42) различны.

Итак, *уравнение* (33) *при условии* $AC > 0$ *определяет либо эллипс либо точку.*

Исследуем гиперболическое уравнение. Пусть $AC < 0$. Возможны только три случая. 1) $H = 0$. Тогда уравнение (42) можно записать в виде $\tilde{y}^2 - k^2\tilde{x}^2 = 0$, где $k^2 = -A/C$. В этом случае уравнение (33) определяет пару пересекающихся прямых, уравнения которых в системе $(\tilde{x}, \tilde{y})$ суть $\tilde{y} = k\tilde{x}$ и $\tilde{y} = -k\tilde{x}$.

2) $AH > 0$ и поэтому $CH < 0$. Из (42) получаем уравнение гиперболы

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad a = \sqrt{\frac{H}{A}}, \quad b = \sqrt{-\frac{H}{C}}. \tag{44}$$

3) $AH < 0$, и, следовательно, $CH > 0$. Из (42) следует опять уравнение гиперболы

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = -1, \quad \text{где} \quad a = \sqrt{-\frac{H}{A}}, \quad b = \sqrt{\frac{H}{c}}.$$

Итак, *уравнение* (33) *при условии* $AC < 0$ *определяет либо гиперболу либо пару пересекающихся прямых.*

Исследуем параболическое уравнение. Пусть $AC = 0$, т. е. $A = 0$, $C \neq 0$ или $A \neq 0$, $C = 0$. Рассмотрим случай $A \neq 0$, $C = 0$ (случай $A = 0$, $C \neq 0$ рассматривается аналогично). При этом условии уравнение (39) принимает вид

$$Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{45}$$

Возможны только два случая. 1) $E = 0$. Тогда уравнение (45) запишем в виде $A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 = \frac{D^2}{A} - F$ или

$$x - x_0 = \pm \sqrt{\frac{H}{A}}, \quad \text{где} \quad x_0 = -\frac{D}{A}, \quad H = \frac{D^2}{A} - F. \qquad (46)$$

Уравнение (33) определяет в этом случае пару прямых — либо действительных (при $AH > 0$), либо мнимых (при $AH < 0$), либо совпадающих (при $H = 0$).

2) $E \neq 0$. Уравнение (39) можно записать в виде

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{где} \quad a = -\frac{A}{2E}, \quad b = -\frac{D}{E}, \quad c = -\frac{F}{2E}. \qquad (47)$$

Оно определяет параболу, ось которой параллельна оси ординат (см. п. 66).

Итак, *уравнение* (33) *при условии* $AC = 0$ *определяет либо параболу, либо пару прямых* (параллельных или совпадающих). Результаты исследования сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Уравнение* (33) *определяет эллипс, гиперболу, параболу, пару прямых, точку или оно не определяет ни одной точки плоскости.*

Пример 1. Исследовать уравнение $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y = 0$. Для этого преобразуем уравнение к виду $(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 = 6$ и $\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$.

Данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$ и центром в точке (2,1). Оси эллипса параллельны координатным осям.

Пример 2. Исследовать уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 1$. Запишем данное уравнение в виде $(x - y)^2 = 1$ или $y = x \pm 1$. Следовательно, данное уравнение определяет пару параллельных прямых.

Глава V

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 14. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

88. Линейные операции и их свойства. Здесь и всюду ниже рассматриваются свободные векторы. Под *линейными операциями* понимаются действия — сложение векторов, вычитание векторов и умножение вектора на число. Определение этих действий дано в п. 60.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами.

1°. Переместительным (коммутативным) свойством сложения $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

2°. Сочетательным (ассоциативным) свойством сложения

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

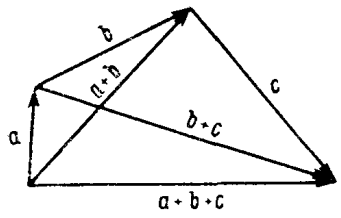

Рис. 68.

3°. Распределительным (дистрибутивным) свойством по отношению к скалярному множителю $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

4°. Распределительным свойством по отношению к векторному множителю $(\lambda + \mu)\,\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$.

5°. Сочетательным свойством по отношению к скалярному множителю

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\,\mathbf{a}.$$

Докажем, например, свойство 2°. Из построения (рис. 68) следует, что векторы $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ равны между собой и равны вектору $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Аналогично доказываются остальные равенства.

Любое направление в пространстве можно охрактеризовать с помощью вектора единичной длины, имеющего это направление.

Такой вектор называется *единичным вектором*, или *ортом данного направления*.

Лемма 1. *Каждый вектор* $\mathbf{a}$ *может быть представлен в виде произведения его длины* a *на орт* $\mathbf{a}_0$, *имеющий направление данного вектора*:

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0. \tag{1}$$

Утверждение леммы прямо следует из определения операции умножения вектора на число.

Напомним, что два вектора называются коллинеарными, если после приведения их к общему началу они лежат на одной прямой.

Лемма 2. *Для того чтобы векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *были коллинеарными, необходимо и достаточно существование такого числа* λ, *чтобы выполнялось равенство*

$$\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}. \tag{2}$$

Действительно, если данные векторы связаны равенством (2), то по определению операции умножения вектора $\mathbf{a}$ на число λ вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен $\mathbf{a}$. Этим доказана достаточность.

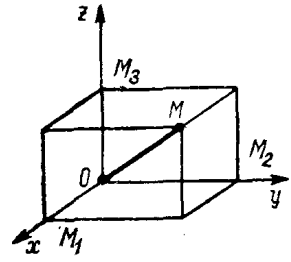

Рис. 69.

Доказательство необходимости. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. По формуле (1) имеем $\mathbf{a} = a\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b} = b\mathbf{b}_0$. Возможны только два случая: 1) $\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0$, тогда $\mathbf{b} = b\mathbf{b}_0 = b\mathbf{a}_0 = \lambda\mathbf{a}$, где $\lambda = b/a$; 2) $\mathbf{b}_0 = -\mathbf{a}_0$, тогда $\mathbf{b} = b\mathbf{b}_0 = -b\mathbf{a}_0 = \lambda\mathbf{a}$, где $\lambda = -b/a$.

89. Декартова система координат в пространстве. Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием трех взаимно перпендикулярных числовых осей, имеющих общую точку пересечения O (начало координат) и общую линейную единицу. Оси упорядочены, т. е. указано, какая из осей считается первой (она называется осью абсцисс и обозначается Ox), какая второй (ось ординат Oy) и какая третьей (ось аппликат Oz).

Пусть M — произвольная точка пространства, M_1, M_2, M_3 — проекции точки M соответственно на оси абсцисс, ординат и аппликат (рис. 69).

Определение. *Декартовыми* координатами точки* M в заданной системе координат называются проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на соответствующие координатные оси; проекция на первую координатную ось называется абсциссой точки M, на вторую координатную ось — ординатой, а на третью — аппликатой:

$$x = \text{пр}_x \overrightarrow{OM}, \quad y = \text{пр}_y \overrightarrow{OM}, \quad z = \text{пр}_z \overrightarrow{OM}. \tag{3}$$

* Слово «прямоугольными» мы здесь опускаем потому, что декартовы косоугольные координаты в курсе не встречаются.

Символ $M(x, y, z)$ означает, что точка M имеет координаты x, y и z. Различают правую и левую системы декартовых координат. В нашем курсе принята за основную правая система координат (см. рис. 69).

Координатные плоскости (плоскости, проходящие через пары координатных осей) делят все пространство на восемь частей, называемых *октантами*. Приведем таблицу знаков координат в различных октантах:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

Между множеством точек пространства и множеством упорядоченных троек вещественных чисел (x, y, z) имеет место взаимно-однозначное соответствие.

90. Разложение вектора по координатному базису. Общая задача разложения вектора на слагаемые, обратная задаче сложения векторов, всегда имеет бесчисленное множество решений. Однако при некоторых дополнительных условиях о числе слагаемых и их направлении задача разложения вектора на слагаемые имеет единственное решение.

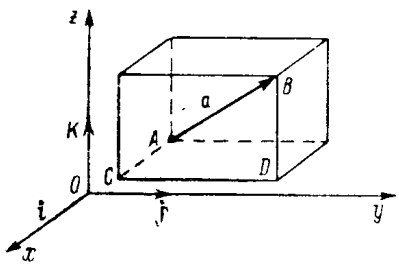

Рис. 70.

Выберем правую декартову прямоугольную систему координат и обозначим символами **i**, **j**, **k** орты координатных осей Ox, Oy и Oz соответственно. Можно сказать, что векторы **i**, **j**, **k** образуют координатный базис (они линейно независимы и их число равно числу измерений пространства). Рассмотрим в пространстве произвольный вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ и обозначим его проекции на координатные оси соответственно a_x, a_y, a_z. Построим параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям и диагональю которого служит вектор **a** (рис. 70). Из построения следует, что вектор **a** можно рассматривать как геометрическую сумму векторов

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB},$$

где $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DB}$ — векторы, коллинеарные ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно. Поэтому на основании леммы 2 имеют место равенства $\overrightarrow{AC} = m\mathbf{i}$, $\overrightarrow{CD} = n\mathbf{j}$, $\overrightarrow{DB} = p\mathbf{k}$. Следовательно,

$$\mathbf{a} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}. \tag{4}$$

Для выяснения геометрического смысла чисел m, n и p проектируем равенство (4) на координатные оси. Получим

$$a_x = \text{пр}_x \mathbf{a} = m\,\text{пр}_x \mathbf{i} + n\,\text{пр}_x \mathbf{j} + p\,\text{пр}_x \mathbf{k} = m.$$

Аналогично устанавливаем $a_y = n$, $a_z = p$. Следовательно, числа m, n и p в формуле (4) являются проекциями вектора $\mathbf{a}$ на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно. Поэтому имеет место соотношение

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{5}$$

Равенство (5) принято называть *разложением вектора* $\mathbf{a}$ *по базису* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, а его проекции a_x, a_y, a_z — координатами вектора $\mathbf{a}$ относительно этого базиса. Величины $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ называются слагаемыми вектора $\mathbf{a}$, или его *компонентами*.

Единственность представления вектора $\mathbf{a}$ в виде суммы (5) следует из единственности его проекций на координатные оси.

Итак, любой вектор может быть единственным образом разложен по данному координатному базису.

Для вектора $\mathbf{a}$, имеющего проекции a_x, a_y, a_z, принято обозначение $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$. Поэтому равенство (5) можно записать так:

$$\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}. \tag{6}$$

91. Длина вектора, его направляющие косинусы и соотношения между ними.

Задача 1. Найти длину вектора $\mathbf{a}$, заданного своими проекциями a_x, a_y, a_z.

Решение. Известно, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений. Поэтому в соответствии с рис. 70 и равенствами $AC = a_x$, $CD = a_y$, $DB = a_z$, установленными в п. 90, имеем

$$a^2 = (AC)^2 + (CD)^2 + (DB)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Следовательно, длина вектора равна арифметическому значению корня квадратного из суммы квадратов его проекций на оси декартовой прямоугольной системы координат (это обобщенная теорема Пифагора)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{7}$$

Обозначим через α, β и γ углы, образованные данным вектором $\mathbf{a}$ с координатными осями Ox, Oy, Oz соответственно. Условимся при этом углы отсчитывать от положительных координатных полуосей. Тогда каждый из этих углов будет принадлежать

промежутку $[0, \pi]$. Углы эти однозначно определяют направление вектора; косинусы этих углов называют *направляющими косинусами вектора*. Заметим, что данному косинусу соответствует определенное значение угла в промежутке $[0, \pi]$.

З а д а ч а 2. Найти направляющие косинусы вектора **a**, заданного своими проекциями a_x, a_y, a_z.

Согласно теореме 1 п. 63 имеем

$$a_x = a\cos\alpha, \quad a_y = a\cos\beta, \quad a_z = a\cos\gamma. \tag{8}$$

Эти формулы позволяют найти проекции вектора с помощью его направляющих косинусов и его длины.

Из формул (8) следует

$$\cos\alpha = a_x/a, \quad \cos\beta = a_y/a, \quad \cos\gamma = a_z/a. \tag{9}$$

Эти формулы позволяют найти направляющие косинусы вектора, заданного своими проекциями. При этом длина вектора определяется формулой (7).

П р и м е р. Дан вектор **a** (1, 2, — 2). Его длина согласно (7) равна $a = 3$, и по формулам (9) получим $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = 2/3$, $\cos\gamma = -2/3$.

Теорема. *Сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице*:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{10}$$

Действительно, из формул (7) и (9) вытекает соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)/a^2 = 1.$$

Следовательно, из трех углов α, β и γ, во-первых, два независимы, во-вторых, эти два независимых угла не произвольны, так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta \leqslant 1$ (и не может быть, например, $\alpha = \beta = 0$). Например, если $\alpha = \beta = \pi/3$, то $\cos^2\gamma = 1 - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = 1/2$, а $\gamma = \pi/4$ или $\gamma = 3\pi/4$.

П р и м е ч а н и е. Из единственности решения задач 1 и 2 следует, что вектор вполне определяется своими проекциями на оси координат. Действительно, зная проекции вектора, можно найти его длину и направление по формулам (7) и (9). Наоборот, зная длину вектора и его направление, можно однозначно определить его проекции по формулам (8). Следовательно, имеет место взаимно-однозначное соответствие между свободными направленными отрезками и упорядоченными тройками вещественных чисел. Поэтому под вектором в трехмерном пространстве можно понимать упорядоченную тройку вещественных чисел. Такой подход к понятию вектора допускает обобщение и позволяет ввести понятие вектора в четырехмерном, n-мерном и даже бесконечномерном пространстве, что и делается в геометрии, химии, физике, в функциональном анализе и других науках.

92. Линейные операции над векторами, заданными своими проекциями. Пусть векторы **a** и **b** заданы своими проекциями на оси координат. Напишем их разложения в данном координат-

ном базисе: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ и, используя свойства линейных операций, получим

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_x \pm b_x)\,\mathbf{i} + (a_y \pm b_y)\,\mathbf{j} + (a_z \pm b_z)\,\mathbf{k}, \tag{11}$$

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda a_x\mathbf{i} + \lambda a_y\mathbf{j} + \lambda a_z\mathbf{k}. \tag{12}$$

Следовательно, *при сложении векторов складываются их соответствующие проекции, а при умножении вектора на число умножаются на это число все проекции вектора.* Таким образом, мы приходим к выводу: линейные операции над векторами можно выполнять по правилам алгебры скалярных величин. Например, если **a** (1, 0, 2) и **b** (2, 3, 4), то **a** + **b** = **c** (3, 3, 6).

Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов **a** и **b**, установленное в п. 88 в виде равенства $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, может быть теперь записано с помощью соотношений $b_x = \lambda a_x$, $b_y = \lambda a_y$, $b_z = \lambda a_z$, из которых в свою очередь следует пропорция

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \tag{13}$$

Условие (13) является необходимым и достаточным у с л о в и е м к о л л и н е а р н о с т и векторов **a** и **b**. Равенство (13) надо понимать в том смысле, что если один из членов какого-нибудь из отношений равен нулю, то и второй член того же отношения должен быть нулем. Геометрически это значит, что в этом случае оба вектора перпендикулярны координатной оси (например, в случае $a_x = b_x = 0$ векторы перпендикулярны оси Ox).

Замечательная идея Лагранжа, предложенная в его «Аналитической механике» в 1788 г., состоит в том, чтобы представлять векторы (у самого Лагранжа только перемещения, силы, скорости и ускорения) тройками чисел, т. е. арифметизировать векторы. Это позволяет действия над векторами сводить к арифметическим действиям над их проекциями, что показывают формулы (11) и (12).

§ 15. НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

93. Скалярное произведение и его основные свойства. Рассмотрим два нулевых вектора **a** и **b**.

О п р е д е л е н и е. *Скалярным произведением двух векторов* называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Скалярное произведение обозначается символами **ab** и (**a**, **b**)

$$\mathbf{ab} = ab\cos\varphi. \tag{1}$$

П р и м е р. В физике скалярное произведение встречается, например, при нахождении работы A постоянной силы **F** на прямолинейном участке пути **s**. Если силу **F** разложить на два

слагаемых, одно из которых $\mathbf{F}_2$ перпендикулярно $\mathbf{s}$, а другое $\mathbf{F}_1$ коллинеарно $\mathbf{s}$, то, как известно, $A = F_1 s = F \cos \varphi$. $s = \mathbf{Fs}$, т. е. работа равна скалярному произведению силы на путь (рис. 71).

Свойства скалярного умножения.

1°. *Скалярное произведение обладает переместительным свойством*

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}. \tag{2}$$

Действительно, если угол отсчитывать против часовой стрелки от первого сомножителя ко второму и обозначить через φ угол $\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}$, то получим $\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}} = 2\pi - \varphi$. Косинусы этих углов равны. Отсюда следует равенство (2).

2°. *Скалярное произведение равно произведению длины одного сомножителя на проекцию другого на направление первого*:

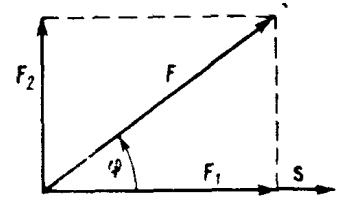

Рис. 71.

$$\mathbf{ab} = a\,\mathrm{пр}_a \mathbf{b} = b\,\mathrm{пр}_b \mathbf{a}. \tag{3}$$

Действительно, правая часть формулы (1) содержит три сомножителя, причем по теореме 1 п. 63 произведение двух из них равно $b \cos \varphi = \mathrm{пр}_a \mathbf{b}$ и $a \cos \varphi = \mathrm{пр}_b \mathbf{a}$; отсюда следует равенство (3).

3°. *Имеет место распределительный закон скалярного умножения на векторный множитель*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}. \tag{4}$$

Действительно, согласно (3) имеем

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c} = c\,\mathrm{пр}_c (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\,\mathrm{пр}_c \mathbf{a} + c\,\mathrm{пр}_c \mathbf{b} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

4°. *Скалярный множитель можно вынести за знак скалярного произведения*: $(\lambda \mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \lambda\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$.

Действительно, согласно свойству 2° имеем

$$(\lambda \mathbf{a},\ \mathbf{b}) = b\,\mathrm{пр}_b (\lambda \mathbf{a}) = b\lambda\,\mathrm{пр}_b \mathbf{a} = \lambda\,(\mathbf{a},\ \mathbf{b}).$$

Заключение. Векторы можно перемножать скалярно по правилам алгебры скалярных величин — многочленов. Это заключение следует из свойств 1°, 3° и 4° скалярного умножения и свойств линейных операций над векторами.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны, то согласно формуле (1) их скалярное произведение равно нулю. Наоборот, если $\mathbf{ab} = 0$ и $ab \neq 0$, то $\cos \varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$.

Следовательно, для того чтобы два ненулевых вектора были взаимно перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю:

$$\boldsymbol{ab} = 0. \tag{5}$$

Если $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и $a \neq 0$, то $\cos\varphi = 1$ и $\mathbf{aa} = a^2$. Принято обозначение $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2$. Поэтому имеем $\mathbf{a}^2 = a^2$.

Составим таблицу скалярного умножения координатных ортов. Из определения скалярного произведения следует, что

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ki} = 0. \tag{6}$$

Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы своими проекциями. Напишем их разложения в координатном базисе $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ и составим их скалярное произведение по правилу умножения многочленов. С помощью формул (6) получим

$$\mathbf{ab} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z, \tag{7}$$

т. е. *скалярное произведение векторов равно сумме парных произведений одноименных проекций сомножителей.*

Пример. Если $\mathbf{a}$ (2, 3, — 1), $\mathbf{b}$ (1, 0, 4), то по формуле (7) имеем $\mathbf{ab} = -2$. Знак минус в результате показывает, что угол между данными векторами тупой.

94. Угол между векторами. Условие ортогональности векторов. Пусть два вектора заданы своими проекциями $\mathbf{a}$ (a_x, a_y, a_z) и $\mathbf{b}$ (b_x, b_y, b_z). Угол между этими векторами обозначим буквой φ. Из формулы (1) следует

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{ab}, \tag{8}$$

т. е. косинус угла между векторами равен скалярному произведению векторов, деленному на произведение длин сомножителей. В формуле (8) числитель определяется равенством (7), а знаменатель — равенством (7) п. 91.

Пример. Дан треугольник A (1, 2, 3), B (3, 2, 1), C (1, 0, 1). Найти угол при вершине B. Для этого находим $\overrightarrow{BA}$ (—2, 0, 2), $\overrightarrow{BC}$ (—2, —2, 0). Затем по формуле (8) получаем $\cos\varphi = 1/2$. Следовательно, $\varphi = \pi/3$.

С помощью равенства (7) формула (8) может быть преобразована следующим образом:

$$\cos\varphi = \frac{a_x}{a}\cdot\frac{b_x}{b} + \frac{a_y}{a}\cdot\frac{b_y}{b} + \frac{a_z}{a}\cdot\frac{b_z}{b}. \tag{9}$$

Имеем

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \tag{10}$$

т. е. косинус угла между векторами равен сумме парных произведений соответствующих направляющих косинусов этих векторов.

Установим условие ортогональности векторов. В п. 93 было выведено необходимое и достаточное условие ортогональности векторов в виде равенства (5). Согласно формуле (7) это условие можно представить в форме

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0. \tag{11}$$

Примечание. С помощью векторной алгебры многие теоремы геометрии и тригонометрии могут быть доказаны проще, чем это делается в элементарной математике. Например, теорема косинусов легко доказывается путем скалярного умножения векторов (рис. 72). Здесь $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Таким образом, получаем $a^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = b^2 + c^2 + 2bc = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$.

95. Векторное произведение и его основные свойства. Рассмотрим два ненулевых вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Определение. *Векторным произведением вектора* $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{d} = d\mathbf{d}_0$, удовлетворяющий трем условиям: 1) его длина равна площади параллелограмма, который построен на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, приведенных к общему началу (рис. 73), т. е. $d = ab\sin\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; 2) его направление перпендикулярно плоскости этого параллелограмма (поэтому $\mathbf{d} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{d} \perp \mathbf{b}$); 3) вектор $\mathbf{d}$ направлен так, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}$ образуют тройку векторов, одноименную с основной $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ (т. е. образуют правую тройку векторов). Векторное произведение вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ обозначается символом $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ или $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

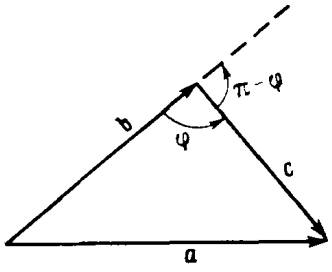

Рис. 72.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то под $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ понимается нулевой вектор.

Из определения следует таблица векторного произведения координатных ортов:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{i}=0, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{j}=0, \\ &\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{k}=0, \end{aligned} \tag{12}$$

Пример. Если к точке M твердого тела приложена сила $\mathbf{F}$, то момент этой силы относительно некоторой точки O по определению есть векторное произведение $\overrightarrow{OM} \times \mathbf{F}$.

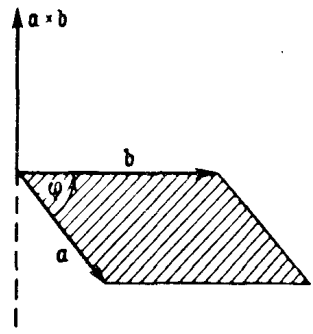

Рис. 73.

Свойства векторного произведения. 1°. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то по определению $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. Если $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ и $ab \neq 0$, то $\sin\varphi = 0$ и векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Следовательно, *для коллинеарности векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю*:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0. \tag{13}$$

2°. *При перемене мест сомножителей векторное произведение меняет знак*:

$$[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \tag{14}$$

Это свойство прямо следует из определения векторного произведения.

3°. *Постоянный множитель может быть вынесен за знак векторного произведения* $[m\mathbf{a}, \mathbf{b}] = m[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Доказательство основано на том, что 1) равны площади параллелограммов, соответствующих левой и прямой частям доказываемого равенства, 2) совпадают направления векторов $[m\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $m[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4°. *Имеет место распределительный закон*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

Для доказательства рассмотрим единичный вектор $\mathbf{c}_0$. Проведем через его начало O плоскость p, перпендикулярную $\mathbf{c}_0$. Пусть вектор $\mathbf{a}$ (не коллинеарный $\mathbf{c}_0$) имеет начало тоже в точке O. Спроектируем $\mathbf{a}$ на p; получим OA_1 (рис. 74). Повернем вектор $\overrightarrow{OA_1}$ на 90° по часовой стрелке (если смотреть с конца вектора $\mathbf{c}_0$); получим вектор $\overrightarrow{OA_2}$. Длина этого вектора $OA_2 = OA_1 = a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = a\sin\varphi$. Вектор $\overrightarrow{OA_2}$ направлен перпендикулярно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}_0$, причем тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}_0$ и $\overrightarrow{OA_2}$ правая. Следовательно, имеем $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}_0$.

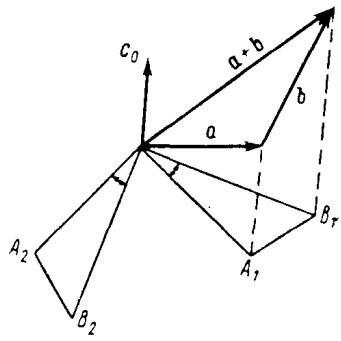

Рис. 74.

Рассмотрим векторный треугольник со сторонами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (рис. 74). Спроектируем его на плоскость p; получим треугольник OA_1B_1. Повернем его по часовой стрелке на 90°; получим треугольник OA_2B_2. По доказанному имеем

$$\overrightarrow{OA_2}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}_0,\quad \overrightarrow{OB_2}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}_0,\quad \overrightarrow{A_2B_2}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}_0.$$

Из $\triangle OA_2B_2$ следует, что $\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$, поэтому

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}_0=\mathbf{a}\times\mathbf{c}_0+\mathbf{b}\times\mathbf{c}_0.$$

Умножим это равенство на c и согласно свойству 3° получим

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}.$$

З а к л ю ч е н и е. Из свойств 2°, 3° и 4° векторного произведения и свойств линейных операций над векторами следует, что векторы можно перемножать векторно по правилам алгебры скалярных величин, но при этом надо с о х р а н я т ь п о р я д о к векторных сомножителей.

Перемножим векторно как многочлены с сохранением порядка сомножителей векторы $\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k}$. Согласно формулам (12) получим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k}. \qquad (15)$$

Если воспользоваться понятием определителя третьего порядка, то этот результат можно записать в следующей удобной для запоминания форме:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Пример. Найти площадь $\triangle ABC$, если A (1, 2, 3), B (3, 2, 1), C (1, 0, 1).

Решение. Найдем проекции векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ на координатные оси. $\overrightarrow{AB}$ (2, 0, — 2), $\overrightarrow{AC}$ (0, —2, —2). Составим векторное произведение $\mathbf{d}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-4\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$. Найдем длину этого вектора $d=4\sqrt{3}$. Площадь треугольника равна $S_{\triangle}=d/2=2\sqrt{3}$.

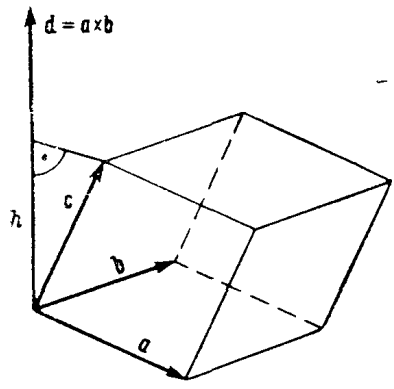

Рис. 75.

96. Смешанное произведение и его основные свойства. Дана упорядоченная тройка ненулевых векторов **a**, **b**, **c**.

Определение. Если перемножить **a** на **b** векторно и полученный результат **a** × **b** умножить на вектор **c** скалярно, то получим число v, которое называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением векторов **a**, **b** и **c** и обозначается символом ([**a**, **b**], **c**) или **abc**;

$$v=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=([\mathbf{a},\ \mathbf{b}],\ \mathbf{c}). \qquad (17)$$

Смешанное произведение векторов обладает следующими свойствами.

1°. Для того чтобы выяснить геометрический смысл смешанного произведения, построим параллелепипед на векторах **a**, **b** и **c**, приведя их к общему началу (рис. 75). Обозначим **a** × **b** = **d**; длина вектора **d** численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. Смешанное произведение равно

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=(\mathbf{d},\ \mathbf{c})=d\,\mathrm{пр}_{d}\,\mathbf{c}=\pm dh=\pm v, \qquad (18)$$

где $\mathrm{пр}_d\,\mathbf{c}=\pm h$, а h — высота параллелепипеда. Заметим, что получается $+v$, если угол $\widehat{\mathbf{d},\mathbf{c}}$ острый, и $-v$, если угол $\widehat{\mathbf{d},\mathbf{c}}$ тупой. Таким образом, установлено: *смешанное произведение* **a** · **b** · **c** *численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах* **a**, **b**, **c**, *приведенных к общему началу*, взятому со знаком «плюс», если **a**, **b** и **c** образуют тройку векторов, одноименную с основной (т. е. правую), и со знаком минус в противном случае.

2°. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке сомножителей **a** · **b** · **c** = **b** · **c** · **a** = **c** · **a** · **b**, так как при этом получаются равновеликие параллелепипеды, ребра которых сохраняют взаимную ориентацию.

3°. Смешанное произведение меняет знак при перестановке любых двух сомножителей, например $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}=-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, так как при этом получаются равновеликие параллелепипеды, но ориентация ребер меняется.

Три вектора **a**, **b**, **c** называются *компланарными*, если будучи приведенными к общему началу они лежат в одной плоскости.

4°. Смешанное произведение равно нулю $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})=0$ в том и только в том случае, когда сомножители компланарны.

Пусть три вектора заданы своими проекциями на координатные оси: **a** (a_x, a_y, a_z), **b** (b_x, b_y, b_z) и **c** (c_x, c_y, c_z). Составим смешанное произведение (**a**, **b**, **c**). Для этого умножим **a** на **b** векторно и получим вектор **d**, определяемый равенством $\mathbf{d}=d_x\mathbf{i}+d_y\mathbf{j}+d_z\mathbf{k}$, где согласно (16)

$$d_x=a_yb_z-a_zb_y,\quad d_y=a_zb_x-a_xb_z,\quad d_z=a_xb_y-a_yb_x. \tag{19}$$

Смешанное произведение векторов **a**, **b**, **c** равно скалярному произведению векторов **d** и **c**, т. е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=d_xc_x+d_yc_y+d_zc_z$.

Правую часть этого равенства можно рассматривать как разложение написанного ниже определителя по элементам последней строки. Поэтому имеем

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Пример. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах **a** (1, 2, 3), **b** (0, 1, 1), **c** (2, 1, −1).

Решение.

$$v=\pm\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\pm\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что векторы **a**, **b** и **c** компланарны тогда и только тогда, когда равно нулю их смешанное произведение. Таким образом, заключаем, что *условие*

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0 \tag{21}$$

необходимо и достаточно для компланарности векторов **a**, **b** и **c**.

Глава VI

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 16. КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Начальные сведения по аналитической геометрии в пространстве изложены выше: понятие системы координат — в начале гл. IV, декартова система координат — в п. 89.

97. Цилиндрическая и сферическая системы координат. *В цилиндрической системе координат* положение точки в пространстве определяется тремя числами ρ, φ и z. На рис. 76 изображены

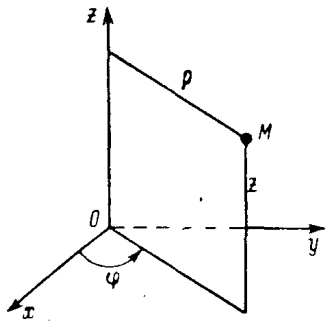

Рис. 76.

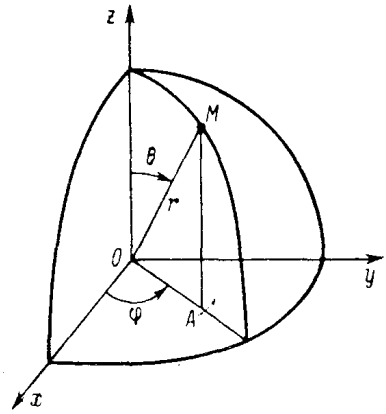

Рис. 77.

декартова и цилиндрическая системы координат. Координата z у них общая. Координата ρ — это расстояние от точки M до оси Oz, а координата φ — это величина угла между плоскостью xOz и плоскостью, проходящей через точку M и ось Oz. Отсюда следует, что цилиндрические координаты принимают значения в промежутках $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Формулы связи между декартовыми и цилиндрическими координатами прямо следуют из их определения (см. рис. 76):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \tag{1}$$

В сферической системе координат положение точки M определяется тремя числами r, φ и θ (рис. 77). Координата r — это расстояние от начала координат O до точки M. Координата φ та же, что и в цилиндрической системе. Координата θ — это величина угла между осью Oz и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Отсюда следует, что сферические координаты принимают значения в промежутках $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Для получения зависимостей между сферическими и декартовыми координатами заметим, что проекция радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на плоскость xOy равна $\text{пр}\,\overrightarrow{OM} = OA = r \sin \theta$. Теперь легко установить, что

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \tag{2}$$

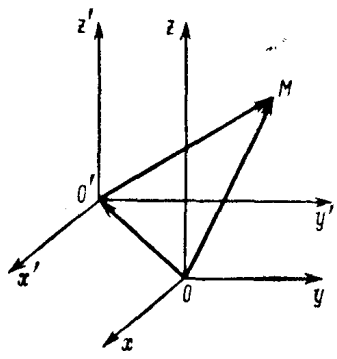

Рис. 78.

98. Задачи. Задача 1. Найти расстояние между двумя данными точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

Решение. Согласно теореме 2 п. 63 вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Длина этого вектора равна искомому расстоянию между данными точками. В соответствии с формулой (7) п. 91 она равна

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{3}$$

Задача 2. Вывести формулы преобразования декартовых координат в пространстве.

А. Преобразование декартовых координат при параллельном переносе осей. Пусть x, y, z — координаты точки M в старой системе координат, x', y', z' — координаты той же точки в новой системе координат, оси которой соответственно параллельны осям старой системы и одинаково с ними направлены, a, b, c — координаты нового начала в старой системе. Линейная единица в этих системах предполагается одной и той же (рис. 78).

Если спроектировать векторное равенство $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ на координатные оси, то получим формулы связи между старыми и новыми координатами

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z' \tag{4}$$

и

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c. \tag{4а}$$

Б. Преобразование декартовых координат при повороте осей. Пусть x, y, z — координаты точки M в старой системе координат, x', y', z' — координаты той же точки в новой системе координат, оси которой образуют с осями старой системы следующие углы: $\mathbf{i}$ образует с $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ соответственно углы α_1, α_2 и α_3; $\mathbf{j}$ образует с теми же осями новой системы углы β_1, β_2 и β_3, а $\mathbf{k}$ — углы γ_1, γ_2, γ_3. Здесь независимы не все девять углов, а лишь три из них. Обе системы имеют общее начало. Вектор $\overrightarrow{OM}$ допускает разложение в базисах одной и другой систем координат, поэтому имеет место равенство

$$x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'. \tag{5}$$

Проектируя векторное равенство (5) на координатные оси старой, а затем новой системы координат, получим формулы связи между старыми и новыми координатами

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3, \\ y &= x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3, \\ z &= x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1, \\ y' &= x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2, \\ z' &= x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3. \end{aligned} \tag{6a}$$

В. Общее преобразование декартовых координат. Пусть x, y, z — старые координаты точки M, $\breve{x}$, $\breve{y}$, $\breve{z}$ — новые координаты точки M. Новая система задана таблицей углов (той же, что в случае Б) и координатами a, b, c — нового начала в старой системе.

Формулы связи между старыми и новыми координатами получаются непосредственно из формул (4) и (6), а также (4а) и (6а):

$$\begin{aligned} x &= a + \breve{x}\cos\alpha_1 + \breve{y}\cos\alpha_2 + \breve{z}\cos\alpha_3, \\ y &= b + \breve{x}\cos\beta_1 + \breve{y}\cos\beta_2 + \breve{z}\cos\beta_3, \\ z &= c + \breve{x}\cos\gamma_1 + \breve{y}\cos\gamma_2 + \breve{z}\cos\gamma_3; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \breve{x} &= (x-a)\cos\alpha_1 + (y-b)\cos\beta_1 + (z-b)\cos\gamma_1, \\ \breve{y} &= (x-a)\cos\alpha_2 + (y-b)\cos\beta_2 + (z-b)\cos\gamma_2, \\ \breve{z} &= (x-a)\cos\alpha_3 + (y-b)\cos\beta_3 + (z-b)\cos\gamma_3. \end{aligned} \tag{7a}$$

99. Геометрическое значение уравнения с тремя переменными. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x, y, z)=0, \tag{8}$$

где $\varphi(x, y, z)$ — функция трех независимых переменных, определенная во всем трехмерном пространстве. Если рассматривать переменные x, y, z как координаты точки в какой-либо системе координат в пространстве, то точки этого пространства можно разбить на два множества: координаты одного множества точек удовлетворяют уравнению (8), координаты другого множества ему не удовлетворяют. Первое множество образует, вообще говоря, некоторую поверхность, относительно которой будем говорить, что она *соответствует данному уравнению* или что она *определяется данным уравнением.*

Примеры. Уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ соответствует сфера с центром в начале координат с радиусом R; уравнению $x^2 + y^2 = R^2$ соответствует цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz; уравнению $x^2 = R^2$ соответствует пара плоскостей, перпендикулярных оси Ox.

Геометрическое значение уравнения с тремя переменными состоит в следующем: *каждое уравнение с тремя переменными определяет, вообще говоря, в пространстве в выбранной системе координат некоторую поверхность, а именно геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют рассматриваемому уравнению.*

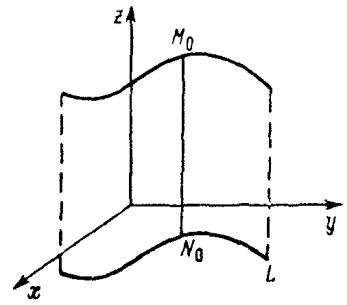

Рис. 79.

Поверхность называется *цилиндрической*, если она может быть образована перемещением прямой параллельно самой себе вдоль некоторой линии L. Эта линия называется *направляющей* цилиндрической поверхности, а всевозможные положения движущейся прямой — ее *образующими.*

Теорема. *Если уравнение с двумя переменными определяет в пространстве какую-либо поверхность, то эта поверхность цилиндрическая.*

Доказательство. Пусть дано уравнение $\varphi(x, y) = 0$, которое определяет в плоскости (x, y) некоторую линию L. Рассмотрим цилиндрическую поверхность S, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит L (рис. 79). Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — любая точка и $N(x_0, y_0, 0)$ — ее проекция на плоскость (x, y). Если точка M принадлежит S, то N принадлежит L, и поэтому координаты M удовлетворяют данному уравнению $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Если M находится вне S, то N не принадлежит L и координаты точки M не удовлетворяют данному уравнению. Следовательно, данное уравнение определяет в пространстве цилиндрическую поверхность S. Теорема доказана.

Пусть имеем два уравнения с тремя переменными

$$\varphi_1(x, y, z) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_2(x, y, z) = 0. \tag{9}$$

Каждое из них определяет в указанном выше смысле некоторую поверхность. Геометрическое место точек, общих обеим поверхностям, есть, вообще говоря, некоторая линия. *Геометрическое значение двух уравнений с тремя переменными в пространстве состоит в том, что они определяют, вообще говоря, линию в пространстве.*

Пример. Уравнения $x^2 + y^2 = R^2$, $z = a$ определяют окружность, лежащую в плоскости $z = a$ радиусом R с центром на оси Oz в точке $(0, 0, a)$. Заметим, что эту же линию можно задать параметрически тремя уравнениями $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $z = 0$.

В общем случае параметрические уравнения линии имеют вид

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{10}$$

100. Понятие уравнения поверхности. Алгебраическая поверхность. В аналитической геометрии каждая поверхность рассматривается как геометрическое место точек, обладающих некоторым свойством. Задать поверхность — это значит задать соответствующее свойство С.

Пусть свойство С известно и система координат в пространстве выбрана. Тогда, если выразить свойство С аналитически, получим соотношение между координатами точек поверхности S, обладающих свойством С (подобно тому, как это сделано в п. 69 для кривой на плоскости). Это соотношение между координатами есть уравнение поверхности S.

Определение. *Уравнением данной поверхности в выбранной системе координат называется такое уравнение, вообще говоря, с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой поверхности и только они*:

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{11}$$

Пример. Сфера есть геометрическое место точек пространства, равноудаленных (на величину R) от данной точки $C_0\ (x_0, y_0, z_0)$. Поэтому уравнение сферы имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2. \tag{12}$$

Алгебраической поверхностью порядка n называется поверхность, уравнение которой в декартовой системе координат можно привести к виду $P_n(x, y, z) = 0$, где P_n — многочлен степени n относительно x, y, z, и нельзя привести к виду $P_k(x, y, z) = 0$, где $k < n$. Например, сфера есть алгебраическая поверхность второго порядка. Для корректности этого определения надо доказать, что порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора декартовой системы координат.

Доказательство. Формулы перехода от старой системы (x, y, z) к новой (x', y', z') носят линейный характер относительно координат, так же как и формулы обратного преобразования. Поэтому при переходе к системе (x', y', z') степень

многочлена не может повыситься. Получим многочлен $Q_{n'}(x', y', z')$ степени $n' \leqslant n$. Однако она не может и понизиться, так как при переходе к старой системе многочлен $Q_{n'}$ перейдет в $P_{n'}$ и его степень тоже не может повыситься, т. е. $n \leqslant n'$. Из сравнения этих неравенств следует, что $n' = n$.

§ 17. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

101. Нормальное уравнение плоскости. Всякую плоскость можно задать следующими параметрами: длиной p перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость, и направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ этого перпендикуляра. Заметим, что если плоскость проходит через начало координат, то имеются два направления нормали к плоскости, отличающиеся знаками направляющих косинусов: в этом случае надо выбрать одно из возможных направлений (рис. 80).

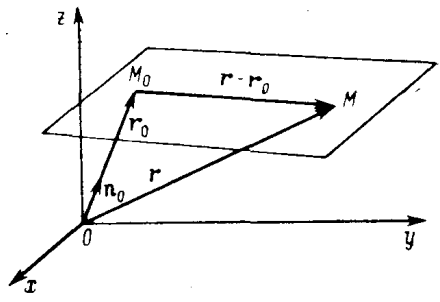

Рис. 80.

Пусть плоскость задана этими параметрами и $M(x, y, z)$ — ее произвольная точка. Рассмотрим три вектора: $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, (x, y, z), $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, $\overrightarrow{OM_0} = p\mathbf{n}_0 = \mathbf{r}_0$ $(p\cos\alpha,\ p\cos\beta,\ p\cos\gamma)$.

Для того чтобы точка M принадлежала данной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{OM_0}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ были перпендикулярны. При этом условии имеем $(\mathbf{r}_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ и $\mathbf{r}_0\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_0^2 = 0$.

Следовательно, $p\cos\alpha\, x + py\cos\beta + pz\cos\gamma - p^2 = 0$ и

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (1)$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки данной плоскости и только они, потому что оно эквивалентно условию перпендикулярности векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Уравнение (1) называется *нормальным уравнением плоскости*. Признаки нормального уравнения плоскости — сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице и свободный член не положителен. Заметим, что для плоскости, проходящей через начало координат, нормальное уравнение определяется с точностью до знака.

Итак, доказано утверждение: *всякую плоскость можно изобразить уравнением первой степени относительно декартовых координат переменной точки плоскости.*

102. Общее уравнение плоскости. Пусть дано произвольное уравнение первой степени относительно переменных x, y и z

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

с постоянными коэффициентами, удовлетворяющими соотношению $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Выберем декартову прямоугольную систему координат и будем понимать под x, y и z координаты точки в этой системе.

Уравнение (2) всегда можно привести к уравнению вида (1). Для этого, очевидно, достаточно умножить уравнение (2) на такое число m, чтобы выполнялись соотношения

$$mA = \cos\alpha,\ mB = \cos\beta,\ mC = \cos\gamma,\ mD = -p, \qquad (3)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p — параметры соответствующего уравнения (1).

Эти соотношения будут выполнены, если положить

$$m = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4)$$

Действительно, тогда будем иметь $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = m^2(A^2 + B^2 + C^2) = 1$. В соответствии с последним из равенств (3) выберем знак перед корнем в формуле (4) противоположным знаку числа D. Таким образом, формулы (3) определят все параметры уравнения (1), соответствующего данному уравнению (2). Указанное число m называется *нормирующим множителем* уравнения (4).

Из определения понятия уравнения поверхности (см. п. 100) следует, что в результате умножения уравнения (2) на любое неравное нулю число получим уравнение, которое определяет ту же поверхность, что и уравнение (2). В п. 101 доказано, что уравнение (1) определяет плоскость. Следовательно, уравнение (2), которое отличается от (1) лишь постоянным множителем, тоже определяет плоскость. Таким образом, доказано, что всякое уравнение первой степени относительно декартовых координат определяет плоскость. Уравнение (2) называется *общим уравнением плоскости*.

Направляющие косинусы нормали к плоскости, заданной уравнением (2), дают первые три из формул (3). Они показывают, что коэффициенты A, B и C уравнения (2) пропорциональны направляющим косинусам нормали к плоскости. Следовательно, вектор $\mathbf{N}(A, B, C)$, проекциями которого служат коэффициенты уравнения (2), перпендикулярен к плоскости, определяемой уравнением (2).

Пример. Плоскость задана уравнением общего вида $3x + 4y - 12z - 39 = 0$. Требуется привести его к нормальному виду. Для этого найдем по формуле (4) $m = \frac{1}{13}$, умножим данное уравнение на m и получим нормальное уравнение той же плоскости $\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13}z - 3 = 0$.

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (2).

1. Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

2. Если $A = 0$, то плоскость параллельна оси Ox, так как $\cos\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и нормаль к плоскости перпендикулярна оси Ox.

3. Если $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость проходит через ось Ox.

4. Если $B = 0$, то плоскость параллельна оси Oy.

5. Если $C = 0$, то плоскость параллельна оси Oz.

6. Если $B = C = 0$, т. е. $Ax + D = 0$, то имеем уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox.

103. Расстояние от точки до плоскости. Найдем расстояние от данной точки M_1 (x_1, y_1, z_1) до плоскости, заданной уравнением (1).

Р е ш е н и е. Опускаем из точки M_1 (рис. 81) на плоскость перпендикуляр M_1M_2, длину которого d надо найти. Рассмотрим векторное равенство $\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{OM}_0 + \overrightarrow{M_0M_2} + \overrightarrow{M_2M_1}$ и спроектируем его на нормаль $\mathbf{n}$ к плоскости. Найдем проекции слагаемых и суммы

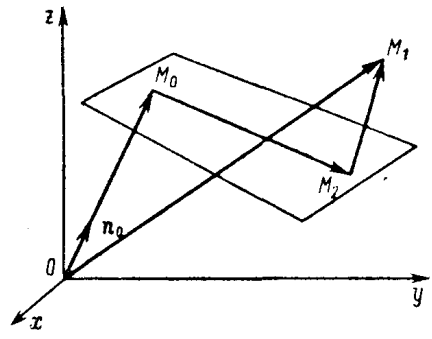

Рис. 81.

$$\begin{aligned}
&\text{пр}\,\overrightarrow{OM}_1 = (\overrightarrow{OM}_1, \mathbf{n}_0) = \\
&= x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma, \\
&\text{пр}\,\overrightarrow{OM}_0 = p, \quad \text{пр}\,M_0M_2 = 0, \qquad (5) \\
&\text{пр}\,\overrightarrow{M_2M_1} = d\cos(M_2M_1, n_0) = \pm d.
\end{aligned}$$

Следовательно, $x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p \pm d$. Окончательно имеем

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p|. \qquad (6)$$

104. Уравнение связки плоскостей. Составим уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 (x_0, y_0, z_0).

Геометрически очевидно, что задача имеет бесчисленное множество решений. Ищем решение в виде общего уравнения плоскости (2). Плоскость должна проходить через точку M_0, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению (2) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Вычитая это равенство из (2), получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (7)$$

Это и есть уравнение *связки* (множества) плоскостей, проходящих через точку M_0, потому что это уравнение первой степени относительно x, y, z при любых A, B и C, причем координаты точки M_0 ему удовлетворяют.

Составим уравнение плоскости, проходящей через три данные точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Пусть M (x, y, z) — произвольная точка

плоскости. Рассмотрим три вектора: $\overrightarrow{M_1M}$ $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ $(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$.

Компланарность этих векторов есть условие необходимое и достаточное для того, чтобы точка M принадлежала плоскости, проходящей через три данные точки. Условие компланарности

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

есть вместе с тем уравнение искомой плоскости, потому что оно первой степени относительно x, y, z, и координаты данных точек ему удовлетворяют. Условие $A^2+B^2+C^2>0$ здесь выполнено, если данные точки не лежат на одной прямой.

Пример 1. Если M_1 (0, 0, 0), M_2 (1, 1, 1), M_3 (−1, 0, 1). то по формуле (8) получим уравнение плоскости, проходящей через эти точки

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x-2y+z=0.$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A $(a, 0, 0)$, B $(0, b, 0)$, C $(0, 0, c)$, где $abc \neq 0$. С помощью (8) получаем

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ или } bc(x-a)+acy+abz=0.$$

Путем деления этого равенства на abc приходим к *уравнению плоскости в отрезках на осях*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (9)$$

Общее уравнение плоскости легко привести (если $ABCD \neq 0$) к уравнению вида (9) путем деления на D. Получим $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$.

105. Угол между плоскостями. Найдем угол между плоскостями, заданными уравнениями

$$A_1x+B_1x+C_1+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (10)$$

Двугранный угол между плоскостями измеряется линейным углом φ, который равен углу между нормалями к этим плоскостям (рис. 82) $\mathbf{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\mathbf{N}_2(A_2, B_2, C_2)$. Поэтому имеем (см. п. 94)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{N_1N_2} = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (11)$$

Условие параллельности плоскостей совпадает с условием коллинеарности векторов $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$; оно имеет вид (см. п. 92)

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (12)$$

Условие перпендикулярности плоскостей есть вместе с тем условие перпендикулярности нормалей $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ (см. п. 94):

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{13}$$

§ 18. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

106. Общие уравнения прямой. Всякую прямую в пространстве можно изобразить двумя уравнениями первой степени относительно декартовых координат

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0 \end{aligned} \tag{1}$$

при условии, что плоскости, определяемые этими уравнениями, различны и что они проходят через прямую. Уравнения (1), определяющие прямую в пространстве, называются *общими уравнениями прямой.*

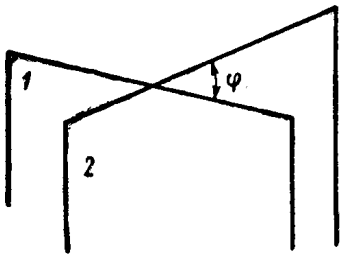

Рис. 82.

Найдем направляющие косинусы прямой, заданной общими уравнениями (1). Известно, что векторы $\mathbf{N}_1$ (A_1, B_1, C_1) и $\mathbf{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярны соответствующим плоскостям и поэтому вектор $\mathbf{d}=\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2$ направлен параллельно линии пересечения этих плоскостей, т. е. параллельно данной прямой.

Остается найти направляющие косинусы вектора $\mathbf{d}$, что легко сделать, зная его проекции

$$d_x=B_1C_2-B_2C_1,\quad d_y=C_1A_2-A_1C_2,\quad d_z=A_1B_2-A_2B_1. \tag{2}$$

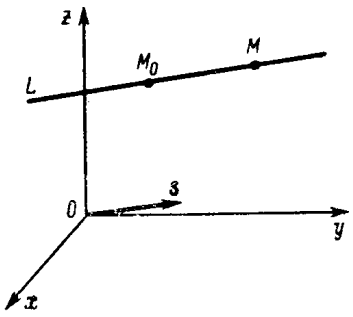

Рис. 83.

Следовательно, направляющие косинусы данной прямой равны

$$\cos\alpha=\frac{d_x}{d},\quad \cos\beta=\frac{d_y}{d},\quad \cos\gamma=\frac{d_z}{d}. \tag{3}$$

Пример. Прямая задана уравнениями $x=y$, $x=z$. Требуется найти ее направляющие косинусы. Для этого находим вектор $\mathbf{d}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и по формулам (3) получаем $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=1/\sqrt{3}$.

107. Канонические уравнения прямой. Прямая L в пространстве вполне определяется заданием одной из ее точек $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектора $\mathbf{s}(m, n, p)$, которому прямая параллельна. Вектор $\mathbf{s}$ называется *направляющим вектором прямой* (рис. 83). Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ и вектор $\overrightarrow{M_0M}$ $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Для того чтобы точка M принадлежала

прямой, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\mathbf{s}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ были коллинеарны, т. е. чтобы их соответствующие проекции были пропорциональны

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{4}$$

Уравнения (4) называются *каноническими уравнениями прямой*. Докажем, что они определяют прямую. Действительно, уравнения (4) представляют систему двух уравнений

$$(x-x_0)/m=(y-y_0)/n,\ (x-x_0)/m=(z-z_0)/p,$$

каждое из которых определяет плоскость. Эти плоскости пересекаются, так как нарушено условие их параллельности. Вместе с тем каждая из этих плоскостей проходит через точку M_0. Следовательно, уравнения (4) определяют прямую, проходящую через точку M_0 параллельно направляющему вектору $\mathbf{s}$.

Числа m, n и p называются *коэффициентами направления прямой*. Их геометрический смысл состоит в том, что эти числа пропорциональны направляющим косинусам прямой, заданной уравнениями (4), так как

$$\cos\alpha=\frac{m}{s},\ \cos\beta=\frac{n}{s},\ \cos\gamma=\frac{p}{s}. \tag{5}$$

Примечание. В пропорции (4) может оказаться равным нулю один из последующих членов какого-либо из отношений. Но при этом соответствующий предыдущий член этого отношения тоже равен нулю. Действительно, если, например, $n=0$, то $\cos\beta=0$, $\beta=\pi/2$ и прямая перпендикулярна оси Oy и проходит через точку M_0. Поэтому прямая лежит в плоскости $y=y_0$ и утверждение доказано.

108. Параметрические уравнения прямой. Пусть прямая задана каноническими уравнениями (4). Обозначим буквой t общее значение отношений (4), приравняем порознь каждое из этих отношений t и получим

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt, \tag{6}$$

где $-\infty<t<\infty$. Уравнения (5) называются *параметрическими уравнениями прямой*. Отсюда следует, что $\overrightarrow{M_0M}=t\mathbf{s}$. Смысл параметра t состоит в том, что его модуль $|t|$ равен отношению длин векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\mathbf{s}$, а знак t показывает, совпадают направления этих векторов ($t>0$) или нет ($t<0$).

Основными формами уравнений прямой являются общие уравнения прямой (1), канонические уравнения (4) и параметрические уравнения (6). Причем каждую форму можно преобразовать к другим формам. Мы видели, как из канонических уравнений получаются общие и параметрические уравнения. Для приведения общих уравнений (1) к канонической форме достаточно разрешить систему (1) относительно двух переменных из трех x, y, z. Например, если возможно разрешить эту систему относительно x и y,

то получим уравнения вида $x = az + b$, $y = a_1 z + b_1$. Отсюда следует $(x - b)/a = z$ и $(y - b_1)/a_1 = z$, и окончательно $\frac{x-b}{a} = \frac{y-b_1}{a_1} = \frac{z}{1}$.

Пример. Составить уравнения оси Ox. Общие уравнения оси Ox суть $y = 0$, $z = 0$. Для вывода канонических уравнений заметим, что ось Ox проходит через начало координат и образует с осями координат углы $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \pi/2$. В качестве направляющих коэффициентов оси Ox можно взять $m = \cos\alpha = 1$, $n = p = \cos\beta = 0$. Поэтому ось Ox можно представить параметрическими уравнениями $x = t$, $y = 0$, $z = 0$ и каноническими уравнениями $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$.

109. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Составим уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка прямой. Рассмотрим два вектора $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0)$, $(y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Коллинеарность этих векторов есть условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка M принадлежала прямой, проходящей через две данные точки. Условие коллинеарности

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \tag{7}$$

представляет вместе с тем канонические уравнения искомой прямой.

110. Угол между двумя прямыми. Пусть прямые заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ (I)}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \text{ (II)}.$$

Под углом φ между двумя скрещивающимися прямыми, определяемыми этими уравнениями, следует понимать угол между направляющими векторами $\mathbf{s}_1(m_1, n_1 p_1)$ и $\mathbf{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ этих прямых, приведенными к общему началу. Поэтому имеем (см. п. 94)

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2}{s_1 s_2} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{8}$$

Условие параллельных прямых совпадает с условием коллинеарности векторов $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ (см. п. 92)

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{9}$$

Условие перпендикулярности прямых есть вместе с тем условие перпендикулярности их направляющих векторов (см. п. 94)

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \tag{10}$$

111. Угол между прямой и плоскостью. Найдем угол между прямой, заданной уравнениями (1), и плоскостью, заданной уравнением (2) п. 102. Под углом φ между прямой и плоскостью понимается наименьший угол между прямой и ее проекцией на плоскость (рис. 84).

Рассмотрим угол ψ между направляющим вектором данной прямой $\mathbf{s}$ (m, n, p) и вектором $\mathbf{N}$ (A, B, C), нормальным к плоскости. Из определения углов φ и ψ следует, что $\varphi + \psi = \pi/2$. Следовательно,

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{N}}{s\cdot N} = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\,\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (11)$$

Условие параллельности прямой и плоскости совпадает с условием перпендикулярности векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{N}$

$$Am+Bn+Cp=0. \qquad (12)$$

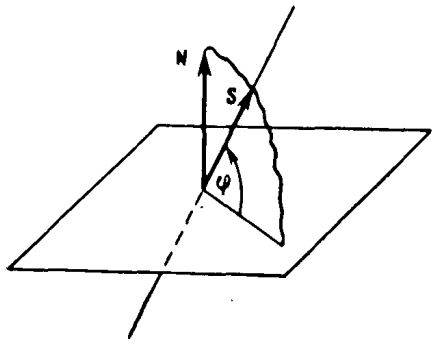

Рис. 84.

Условие перпендикулярности прямой и плоскости совпадает с условием параллельности векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{N}$

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \qquad (13)$$

112. Задача о взаимном расположении прямой и плоскости. Пусть прямая задана параметрически уравнениями (6), а плоскость — общим уравнением (2) п. 102. Поставим вопрос — имеют ли прямые и плоскость общую точку, т. е. имеет ли решение система уравнений (2) п. 102 и (6)? Для ответа на этот вопрос исключим x, y и z из уравнения (2) п. 102 с помощью равенств (6), получим уравнение относительно t

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D+t(Am+Bn+Cp)=0$$

или

$$\alpha+t\beta=0 \qquad (14)$$

с коэффициентами $\alpha = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$, $\beta = Am + Bn + Cp$.

Заметим сразу же, что эти коэффициенты порознь или оба вместе могут быть равны нулю. Если $\alpha = 0$, то геометрически это значит, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ прямой вместе с тем принадлежит и плоскости. Если $\beta = 0$, то угол между данной прямой и данной плоскостью равен нулю (см. п. 111).

Возможны только три случая.

1. $\beta \neq 0$. В этом случае уравнение (14) имеет единственное решение $t_* = -\alpha/\beta$, а прямая и плоскость имеют единственную

точку пересечения, координаты которой x_*, y_*, z_* определяются равенствами (5) при $t = t_*$. Если при этом $\alpha = 0$, то $t_* = 0$ и точка пересечения есть M_0.

2. $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$. В этом случае уравнение (14) не имеет решения, а прямая и плоскость не имеют общих точек, они параллельны.

3. $\alpha = \beta = 0$. В этом случае уравнение (14) имеет бесчисленное множество решений (ему удовлетворяет любое вещественное число), а прямая и плоскость имеют бесчисленное множество общих точек. Каждая точка прямой принадлежит плоскости.

§ 19. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

113. Эллипсоид. *Эллипсоидом* называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат (x, y, z) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Для того чтобы представить в пространстве форму поверхности, заданной уравнением (1), и ее расположение относительно координатных осей, применим так называемый метод сечений. Сущность метода такова: данная поверхность пересекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и самими координатными плоскостями; в сечениях получаются, вообще говоря, линии, которые помогают создать представление о форме и расположении исследуемой поверхности в пространстве.

Уравнение (1) содержит декартовы координаты только в четных степенях, поэтому эллипсоид симметричен относительно всех трех координатных плоскостей. Действительно, например, поверхность, определяемая уравнением $F(x^2, y, z) = 0$, симметрична относительно координатной плоскости Oyz, так как если точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит поверхности, то точка $M_2(-x_2, y_2, z_2)$ тоже ей принадлежит.

Сечение эллипсида плоскостью

$$z = h \tag{2}$$

изображается системой уравнений (1), (2). Исключив z, запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Отсюда следует, что $|h| \leqslant c$, и если $|h| < c$, то имеем

$$\frac{x^2}{a_*^2} + \frac{y^2}{b_*^2} = 1, \text{ где } a_* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b_* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}. \tag{3}$$

Система уравнений (1) и (2) определяет в плоскости $z = h$ эллипс с полуосями a_* и b_*, имеющими наибольшие значения при $h = 0$.

Сечение эллипсоида (1) координатной плоскостью $x = 0$ есть эллипс с полуосями b и c, изображаемый системой уравнений $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$. Сечение эллипсоида (1) координатной плоскостью $y = 0$ есть эллипс с полуосями a и c, изображаемый системой уравнений $y = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Следовательно, эллипсоид есть поверхность ограниченная, имеющая три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии (рис. 85).

Величины a, b и c называются *полуосями* эллипсоида. Если $a = b$, то уравнение (1) определяет эллипсоид вращения вокруг

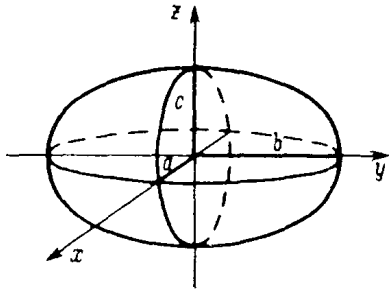

Рис. 85.

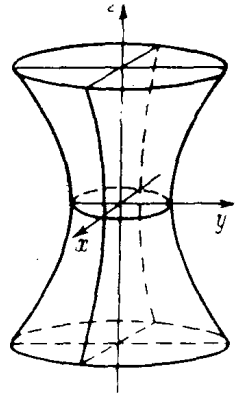

Рис. 86.

оси Oz. Если $a = b = c$, то уравнение (1) определяет сферу радиусом a с центром в начале координат.

114. Гиперболоид однополостной. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (4)$$

В сечении этой поверхности плоскостью $z = h$ получается эллипс $\frac{x^2}{a_*^2} + \frac{y^2}{b_*^2} = 1$ с полуосями $a_* = a\sqrt{1 + h^2/c^2}$, $b_* = b\sqrt{1 + h^2/c^2}$.

Величины a_* и b_* имеют наименьшие значения $a_* = a$ и $b_* = b$ в плоскости $z = h = 0$. С ростом h величины a_* и b_* неограниченно увеличиваются.

Сечение однополостного гиперболоида плоскостью $x = 0$ есть гипербола $y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ с полуосями b и c.

Следовательно, однополостный гиперболоид есть поверхность неограниченная, имеющая три плоскости симметрии (рис. 86).

115. Гиперболоид двуполостной. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{5}$$

Сечение этой поверхности плоскостью $z = h$ представляет, если $|h| > c$, эллипс $x^2/a_*^2 + y^2/b_*^2 = 1$ с полуосями $a_* = a\sqrt{h^2/c^2 - 1}$, $b_* = b\sqrt{h^2/c^2-1}$, которые неограниченно увеличиваются с ростом h. Если $|h| = c$, то в сечении поверхности и плоскости $z = h$ получается точка $(0, 0, h)$.

Сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $y = 0$ есть гипербола $z^2/c^2 - x^2/a^2 = 1$ с полуосями c и a. Сечение двуполостного гиперболоида плоскостью $x = 0$ есть гипербола $z^2/c^2 - y^2/b^2 = 1$ с полуосями c и b.

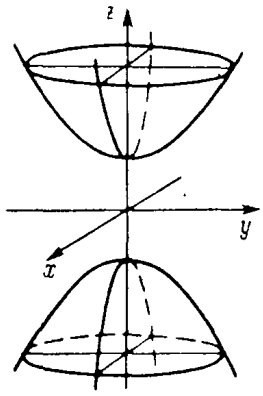

Рис. 87.

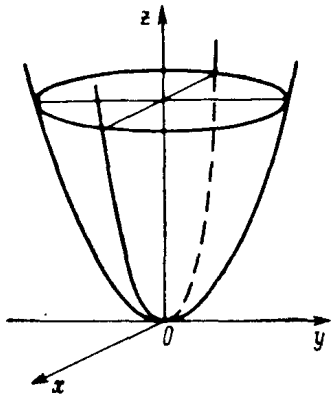

Рис. 88.

Следовательно, двуполостной гиперболоид есть поверхность неограниченная, состоящая из двух частей, имеющая три плоскости симметрии (рис. 87).

116. Параболоид эллиптический. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, определяемая в декартовых координатах уравнением

$$z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q} \quad (p>0,\ q>0). \tag{6}$$

Сечение этой поверхности плоскостью $z = h$ представляет, если $h > 0$, эллипс $x^2/a_*^2 + y^2/b_*^2 = 1$ с полуосями $a_*=\sqrt{2ph}$ и $b_*=\sqrt{2qh}$, которые неограниченно возрастают с ростом h. Сечение эллиптического параболоида плоскостью $x = 0$ есть парабола $y^2 = 2pz$. Сечение эллиптического параболоида плоскостью $y = 0$ есть парабола $x^2 = 2pz$.

Следовательно, эллиптический параболоид, определяемый уравнением (6), есть неограниченная поверхность, расположенная

в полупространстве $z \geqslant 0$, имеющая две плоскости симметрии. Ее сечения, перпендикулярные оси Oz, суть эллипсы. Ее сечения координатными плоскостями (x, z) и (y, z) суть параболы (рис. 88).

Частным случаем эллиптического параболоида является параболоид вращения (вокруг оси Oz), когда $p = q$. Его уравнение $x^2 + y^2 = 2pz$. При $2p = 1$ имеем $z = x^2 + y^2$.

117. Параболоид гиперболический. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат (x, y, z) уравнением

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p>0,\ q>0). \tag{7}$$

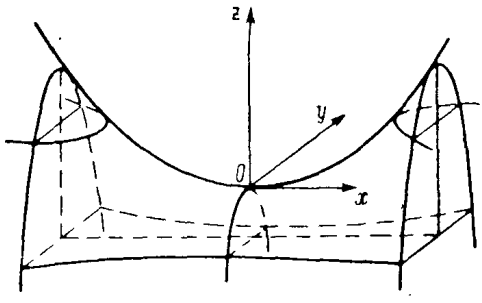

Рис. 89.

Поверхность эта имеет две плоскости симметрии (x, z) и (y, z), так как величины x и y содержатся в уравнении (7) в четных степенях.

Рассмотрим сечения поверхности (7) плоскостями. В плоскости $y = 0$ имеем параболу $x^2 = 2pz$, симметричную относительно оси Oz, расположенную в полуплоскости $z \geqslant 0$. В плоскости $x = 0$ имеем параболу $y^2 = -2qz$, симметричную относительно оси Oz, расположенную в полуплоскости $z \leqslant 0$. В плоскости $z = 0$ имеем пару прямых $y = \pm\sqrt{q/p}\,x$. В плоскости $z = h$ имеем гиперболу $x^2/2ph - y^2/2qh = 1$ с вещественной полуосью $a_* = \sqrt{2ph}$, если $h > 0$, и с вещественной полуосью $b_* = \sqrt{-2qh}$, если $h < 0$ (рис. 89).

В термодинамике встречается частный случай гиперболического параболоида, когда $p = q$; его уравнение

$$x^2 - y^2 = 2pz. \tag{8}$$

Путем преобразования системы координат (поворота осей Ox и Oy на угол $\varphi = -\pi/4$ при сохранении направления оси Oz) по формулам (см. п. 66) $x = (\tilde{x} + \tilde{y})/\sqrt{2}$, $y = (\tilde{y} - \tilde{x})/\sqrt{2}$ получим уравнение поверхности (8) в новых координатах $pz = \tilde{x}\tilde{y}$.

Отбросив для простоты записи знак «тильда» и обозначив $1/p = c$, получим окончательно уравнение поверхности

$$z = cxy. \tag{9}$$

Следовательно, пространственным образом функции двух переменных (9) служит гиперболический параболоид.

Термодинамическая поверхность (9) представляет уравнение состояния идеального газа $pV = RT$ или

$$T = pv/R. \tag{10}$$

Это уравнение вида (9), в котором $x = p$, $y = v$, $z = T$, $c = 1/R$. В сечениях поверхности (10) плоскостями $T = h$ получаются гиперболы $pv = Rh$, которые называются также изотермами, а в сечениях $p = p_0$ и $v = v_0$ получаются прямые.

Линейчатой поверхностью называется поверхность, через каждую точку которой можно провести прямую, целиком принадлежащую этой поверхности. Гиперболический параболоид и однополостный гиперболоид есть поверхности линейчатые.

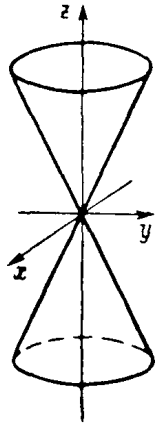

Рис. 90.

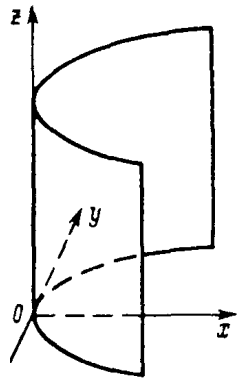

Рис. 91.

Для доказательства линейчатости гиперболического параболоида (9) рассмотрим на поверхности (9) произвольную точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и напишем уравнения прямой в пространстве, проходящей через эту точку (см. п. 108):

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z = z_0 + pt. \tag{11}$$

Докажем, что можно выбрать направляющие параметры прямой m, n и p так, что прямая (11) будет принадлежать поверхности, т. е. координаты x, y, z любой точки прямой (11) будут удовлетворять уравнению поверхности (9). Для этого заменим в (9) x, y и z по формулам (11), получим уравнение

$$z_0 + pt = c\,(x_0 + mt)\,(y_0 + nt),$$

где $z_0 = cx_0y_0$, и после сокращения на t придем к условию

$$p = c\,(x_0n + y_0m + mnt).$$

Это условие выполнено в двух случаях: 1) $m = 0$, $p = cx_0n$, где n — произвольное число, и 2) $n = 0$, $p = cy_0m$, m — произвольное число.

Этим случаям соответствуют две прямолинейные образующие, проходящие через точку M_0; их уравнения суть

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{cx_0n}, \qquad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{cy_0m}.$$

118. Конус второго порядка. *Конусом второго порядка* называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{12}$$

Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей. В плоскости $x = 0$ имеем пару прямых $z = \pm cy/b$. В плоскости $y = 0$ имеем пару прямых $z = \pm cx/a$. В плоскости $z = h$ ($h \neq 0$) имеем эллипс $x^2/a_*^2 + y^2/b_*^2 = 1$ с полуосями $a_* = a|h|/c$, $b_* = b|h|/c$, которые возрастают с ростом h (рис. 90).

119. Цилиндры второго порядка. *Цилиндры второго порядка* определяются в декартовой системе координат уравнениями:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — уравнение эллиптического цилиндра,

б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ — уравнение гиперболического цилиндра,

в) $y^2 = 2px$ — уравнение параболического цилиндра (рис. 91).

Можно доказать, что собственно поверхностями второго порядка являются только поверхности рассмотренного в § 19 вида. Но они могут быть иначе расположены относительно координатных осей. Например, уравнения $z^2 = 2py$ и $x^2 = 2py$ определяют ту же поверхность — параболический цилиндр, что и уравнение $y^2 = 2px$.

Глава VII

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 20. ФУНКЦИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

120. Арифметическое n-мерное пространство. Систему из двух чисел x и y геометрически можно интерпретировать как точку плоскости, а функцию одной переменной $y = f(x)$ можно геометрически представить ее графиком. Желая распространить геометрические методы на теорию функций любого числа переменных, в анализе введено понятие n-мерного пространства при любом натуральном n.

Точкой n-мерного пространства называется система вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$; она обозначается символом $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Множество всевозможных таких точек образует так называемое *n-мерное пространство*, которое иногда называют арифметическим.

Точку n-мерного пространства в случаях $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$ можно представить геометрически как точку прямой, плоскости или трехмерного пространства соответственно.

Арифметическое n-мерное пространство называется *эвклидовым пространством* E_n, если между любыми его точками $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ и $M(x_1, \ldots, x_n)$ определено расстояние по формуле

$$d(M_0, M) = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2}. \qquad (1)$$

В частности, эвклидово пространство E_1 называется *координатной прямой*, а E_2 — *координатной плоскостью*.

Множество точек $\{M\}$ пространства E_n, удовлетворяющих условию $d(M_0, M) < \varepsilon$, где ε — положительное число, называется *ε-окрестностью точки M_0 этого пространства*. В частности, при $n = 1$ ε-окрестность точки M_0 образует открытый промежуток с центром в точке M_0, длина которого равна 2ε, при

$n = 2$ — круг радиуса ε с центром в точке M_0 без ограничивающей его окружности.

Рассмотрим некоторое бесконечное множество A точек пространства E_n. Точка M_0 пространства E_n называется *внутренней точкой множества* A, если она принадлежит A вместе с некоторой окрестностью точки M_0. Множество A называется *открытым*, если каждая его точка внутренняя. Примером открытого множества пространства E_2 является множество точек, удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 < 1$. Однако условие $x^2 + y^2 \leqslant 1$ определяет множество, не являющееся открытым, потому что, например, точка (1,0) нашему множеству принадлежит, но она не является внутренней точкой рассматриваемого множества.

Множество A называется *связным*, если любые две его точки можно соединить «ломаной», состоящей из точек множества A. При этом под «отрезком ломаной» в пространстве E_n понимается множество точек этого пространства, удовлетворяющих условию $x_k = \alpha_k + \beta_k t$ при $\alpha < t < \beta$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, и $\alpha, \beta, \alpha_k, \beta_k$ — постоянные.

Областью пространства E_n называется открытое связное множество точек этого пространства. Например, множество точек, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < a$, $|y - y_0| < b$, есть область пространства E_2.

Точка M_1 пространства E_n называется *граничной точкой области* A, если в любой окрестности этой точки имеются точки E_n как принадлежащие A, так и не принадлежащие A. Совокупность всех граничных точек множества A называется *его границей*. Область A пространства E_n вместе с ее границей называется *замкнутой областью пространства* E_n; она обозначается символом $\overline{A}$.

Примеры. Каждая точка окружности $x^2 + y^2 = 1$ является граничной точкой области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 < 1$. Неравенство $x^2 + y^2 \leqslant 1$ определяет замкнутую область пространства E_2.

Точкой сгущения, или *предельной точкой множества* A, называется точка P пространства E_n, в любой окрестности которой имеются точки множества A, отличные от P. Каждая предельная точка области является либо ее внутренней точкой, либо ее граничной точкой.

Многомерная геометрия есть средство математического описания реальных явлений. Например, зависимость давления от объема для данной массы газа при данных условиях изображается некоторой кривой. Так, при постоянной температуре для идеального газа эта кривая — гипербола в соответствии с известным законом Бойля — Мариотта. Но если мы имеем более сложную физическую систему, состояние которой задается уже не двумя (как объем и давление в случае однородного газа) исходными данными, а большим числом, то геометрическое представление ее изменения нуждается в пространстве большего числа измерений. Например, пусть речь идет о сплаве трех металлов или о смеси трех газов. Состояние смеси определяется четырьмя данными: температурой T, давлением p и процентным содержанием c_1 и c_2

двух газов. Состояние такой смеси может быть представлено четырьмя числами: T, p, c_1 и c_2, т. е. точкой четырехмерного пространства. Каждому возможному состоянию смеси соответствует своя точка пространства E_4.

Такими представлениями фактически пользуются в химии. Применение методов многомерной геометрии к задачам химии разработано школой советских физико-химиков академика Курнакова и американским ученым Гиббсом.

«Пусть состояние какой-либо физико-химической системы определяется n величинами (так, состояние газовой смеси определяется давлением, температурой и концентрациями составляющих ее компонентов). Тогда говорят, что система имеет n степеней свободы, выражая этим, что ее состояние может меняться, так сказать, в n независимых направлениях с изменением каждой из определяющих это состояние величин. Эти величины, определяющие состояние системы, играют роль как бы его координат. Поэтому совокупность всех ее состояний рассматривают как n-мерное пространство — так называемое *фазовое пространство* системы.

Непрерывные изменения состояния, т. е. процессы, происходящие в системе, изображаются линиями в этом пространстве. Отдельные области состояний, выделяемые по тем или иным признакам, будут областями пространства. Состояния, пограничные для двух областей, образуют поверхности в этом пространстве.

...Понятие фазового пространства применяется не только к физико-химическим, но и к механическим системам. В кинетической теории газов рассматривают, например, фазовые пространства системы материальных частиц — молекул газа. Состояние движения одной частицы в каждый момент определяется ее положением и скоростью, что дает всего шесть величин: три координаты и три составляющие скорости (по трем осям координат). Состояние n частиц задается $6n$ величинами, и так как молекул очень много, то $6n$ — огромное число. Точка в этом пространстве изображает состояние всей массы молекул с их координатами и скоростями. Движение точки изображает изменение состояния» *. Такое абстрактное представление оказывается очень полезным во многих глубоких теоретических выводах термодинамики и статистической физики.

121. Понятие функции нескольких переменных. В нашем курсе наиболее подробно рассматривается случай функции двух независимых переменных. Однако все введенные понятия и полученные результаты могут быть соответственно обобщены на случай функции любого числа независимых переменных.

Пусть A есть область изменения независимых переменных x и y. *Переменная u называется функцией независимых переменных x и y на множестве A, если каждой паре чисел x, y из A соответствует определенное значение u. Переменные x и y называются также аргументами функции u.*

Множество A пар чисел x, y, на котором определена функция, называется *областью определения*, или областью существования *функции*. Областью A определения функции двух переменных может быть область плоскости (открытое связное множество точек эвклидова двумерного пространства E_2), но может быть и замкнутая область плоскости. Ею может быть линия или какое-либо иное множество точек плоскости E_2.

Приведем несколько примеров функций, заданных аналитически с указанием областей их определения.

---

* А. Д. Александров. Математика, ее содержание, методы и значение, т. III, Абстрактные пространства. М., АН СССР, 1956, с. 147—149.

1. Функция задана формулой $u = \ln(1 - x^2 - y^2)$ внутри круга, определяемого неравенством $x^2 + y^2 < 1$.

2. Функция задана формулой $u = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ внутри и на границе круга, определяемого неравенством $x^2 + y^2 \leqslant r^2$.

3. Функция задана формулой $u = x - y$ на эллипсе $x^2 + 4y^2 = 4$.

В общем случае тот факт, что u есть функция аргументов x и y, изображается символом $u = f(x, y)$, или $u = u(x, y)$ и т. п.

Понятие функции двух независимых переменных легко обобщить на случай функции любого числа независимых переменных. *Переменная u называется функцией n независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на множестве B (n-мерного пространства), если каждой точке этого множества соответствует определенное значение переменной u.*

Если точку $(x_1, \ldots, x_n)$ обозначить через M, то функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ от этих переменных иногда называют *функцией точки M* и обозначают так: $u = f(M)$ или $u = u(M)$.

Функция $u = u(M)$ с областью определения B есть отображение множества B на множество U, представляющее область изменения переменной u.

Геометрическим образом функции n переменных $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ является множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n, u)$, для которых выполнено соотношение $u = f(x_1, \ldots, x_n)$. В частности, функции двух переменных $u = f(x, y)$ в трехмерном пространстве соответствует, вообще говоря, поверхность. Например, функции $u = x^2 + y^2$ соответствует параболоид вращения (см. п. 116).

122. Понятие предела функции. Теория пределов. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области A и M_0 — точка сгущения множества A. *Число b называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует соответствующее число $\delta > 0$ такое, что неравенство*

$$|f(x, y) - b| < \varepsilon \tag{2}$$

выполняется при условии

$$0 < d(M_0, M) < \delta. \tag{3}$$

Этот факт записывают символически

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = b. \tag{4}$$

Условие (3) означает, что точка M принадлежит δ-окрестности точки M_0 и не совпадает с M_0.

Функция $u = f(M)$ называется *бесконечно малой при стремлении M к M_0*, если $\lim f(M) = 0$ при $M \to M_0$.

Все основные теоремы о бесконечно малых и о пределах, сформулированные в главе I для функции одной переменной, обобщаются и на случай функций нескольких переменных. Например, имеет место следующая теорема.

Теорема. *Сумма двух бесконечно малых функций* $\alpha_1(M)$ *и* $\alpha_2(M)$ *при* $M \to M_0$ *есть функция бесконечно малая.*

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию теоремы для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует число $\delta_1 > 0$ такое, что выполняется неравенство $|\alpha_1(M)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $0 < d(M_0, M) < \delta_1$, и существует $\delta_2 > 0$ такое, что $|\alpha_2(M)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $0 < d(M_0, M) < \delta_2$. Тогда $|\alpha_1(M) + \alpha_2(M)| \leqslant |\alpha_1(M)| + |\alpha_2(M)| < \varepsilon$ при условии $0 < d(M_0, M) < \delta$, если $\delta < \delta_1$ и $\delta < \delta_2$. Теорема доказана.

Примечание. Для существования предела функции $f(M)$ при $M \to M_0$ требуется (согласно определению этого понятия), чтобы при любом способе стремления M к M_0 существовал предел функции $f(M)$ и он был равен одному и тому же числу. Поэтому для существования упомянутого предела может оказаться недостаточным существование таких пределов: $\lim f(x, y) = b_1$ при $x \to x_0$, $y = y_0$ и $\lim f(x, y) = b_2$ при $x = x_0$, $y \to y_0$ и их равенство $b_1 = b_2$. Поясним это положение примером.

Пример 1. Функция задана равенством $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ при условии $x^2 + y^2 > 0$. Пусть $x_0 = y_0 = 0$. Следовательно, $b_1 = b_2 = 0$. Однако предел функции при стремлении M к M_0 не существует. Действительно, на прямой $y = kx$ функция сохраняет постоянное значение $f(x, kx) = \frac{k}{1 + k^2}$, которое зависит от k. Следовательно, в любой окрестности точки M_0 функция принимает любые значения из промежутка $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$. Поэтому условие (2) не может быть выполнено и функция не имеет предела.

123. Непрерывность функции нескольких переменных. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области A и $M_0(x_0, y_0)$ есть внутренняя точка A.

Определение. Функция $u = f(x, y)$ называется *непрерывной функцией в точке* M_0, если выполнено условие

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{5}$$

Определение. Функция $u = f(x, y)$ называется *непрерывной в области*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывность функции в замкнутой области $\bar{A}$ означает, что она непрерывна в области A, а в точках границы этой области

имеет место непрерывность при дополнительном условии, что точка M стремится к M_0, оставаясь внутри области A.

Рассмотрим в области A две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Обозначим $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$. *Полным приращением функции* $u = f(x, y)$ *при переходе от точки* M_0 *к точке* M называется разность значений функции в этих точках, а именно $\Delta u = f(M) - f(M_0)$, т. е.

$$\Delta u = f(x, y) - f(x_0, y_0). \tag{6}$$

Условие (5) непрерывности функции в точке M_0 равносильно условию

$$\lim_{M \to M_0} \Delta u = 0, \tag{7}$$

которое означает, что *бесконечно малому расстоянию между точками* M *и* M_0 *соответствует бесконечно малое приращение функции*. Действительно, из условия (5) следует равенство $\lim\limits_{M \to M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0$ и равенство (7). Из условия (7) в свою очередь следует предыдущее равенство и равенство (5).

Пример 2. Функция $u = x^2 + y^2$ непрерывна в любой точке плоскости. Действительно, при любых значениях x и y величина $\Delta u = 2x\Delta x + 2y\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Таким образом, выполнено условие (7), что и доказывает наше утверждение.

Примечание. Непрерывность функции двух переменных x и y по совокупности переменных x и y есть нечто большее, чем непрерывность этой функции по x и по y порознь. Функция $f(x, y)$ может быть непрерывной отдельно по x (в точке x_0 при $y = y_0$) и отдельно по y (в точке y_0 при $x = x_0$) и вместе с тем не быть непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $u = f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 > 0$, $u = 0$ при $x = y = 0$. Эта функция определена на всей плоскости. Пусть $x_0 = y_0 = 0$. Функция $f(x, y_0) \equiv 0$ непрерывна по x в точке x_0. Функция $f(x_0, y) \equiv 0$ непрерывна по y в точке y_0. Однако $\Delta u = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y)$ не имеет предела при $x \to x_0$, $y \to y_0$ (см. пример 1), и поэтому данная функция не непрерывна в точке (x_0, y_0) по совокупности переменных x и y.

Теорема. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных функций нескольких переменных есть функции непрерывные (в случае частного предполагается, что знаменатель не равен нулю).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ и $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = g(M_0)$. Тогда в силу теоремы о пределе суммы имеем

$$\lim_{M \to M_0} [f(M) + g(M)] = \lim_{M \to M_0} f(M) + \lim_{M \to M_0} g(M) = f(M_0) + g(M_0). \tag{8}$$

Таким образом, для суммы данных функций выполнено условие непрерывности (5) и теорема доказана. Аналогично доказывается теорема в остальных случаях.

Множество точек пространства E_n назовем *ограниченным*, если это множество содержится в некотором гипершаре: $(x_1 - x_{10})^2 + \dots + (x_n - x_{n0})^2 \leqslant R^2$.

Примем без доказательства следующие три теоремы.

Теорема Вейерштрасса. *Если в ограниченной замкнутой области* $\overline{A}$ *функция* $u = f(M)$ *непрерывна, то она достигает в* $\overline{A}$ *своего наибольшего и своего наименьшего значений.*

Это значит, что в $\overline{A}$ существуют точки M_1 и M_2 такие, что для всех M из $\overline{A}$ выполняются соответственно неравенства $f(M) \leqslant f(M_1)$ и $f(M) \geqslant f(M_2)$.

Теорема Коши. *Непрерывная в области* A *функция* $u = f(M)$, *переходя от одного своего значения к другому, необходимо проходит через каждое промежуточное значение.*

Определение. Функция $u = f(M)$ называется *равномерно непрерывной в области* A, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от M число $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ для всех пар точек M и M_0 области A, удовлетворяющих условию $d(M_0, M) < \delta$.

Теорема Кантора. *Если в ограниченной замкнутой области* $\overline{A}$ *функция* $u = f(M)$ *непрерывна, то она равномерно непрерывна в* $\overline{A}$.

Например, функция $u = x^2 - y^2$ равномерно непрерывна в замкнутой области, определяемой неравенством $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

§ 21. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

124. Понятие частной производной. Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в области A. Одной из основных задач теории функций нескольких переменных является задача исследования данной функции. Метод сечений, с помощью которого в аналитической геометрии проводилось исследование формы поверхности по ее уравнению, нашел своеобразное отражение и в математическом анализе при решении указанной задачи.

Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ области A. Если переменная y сохраняет постоянное значение $y = y_0$, то переменная u становится функцией одной независимой переменной x, именно $u = f(x, y_0)$. Заметим, что график этой функции в трехмерном пространстве представляет сечение поверхности, определяемой уравнением $u = f(x, y)$, плоскостью $y = y_0$. Найдем производную функции $f(x, y_0)$ в точке x_0. Для этого дадим x приращение Δx, функция получит приращение

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0), \qquad (1)$$

называемое *частным приращением функции* u *по переменной* x.

Определение. *Частной производной функции* $u = f(x, y)$ *по переменной* x *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется предел (если он существует) отношения соответствующего частного приращения функции $\Delta_x u$ к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx, когда Δx стремится к нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}. \tag{2}$$

Обозначается частная производная в этом случае любым из символов $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, u'_x, $f'_x(x_0, y_0)$.

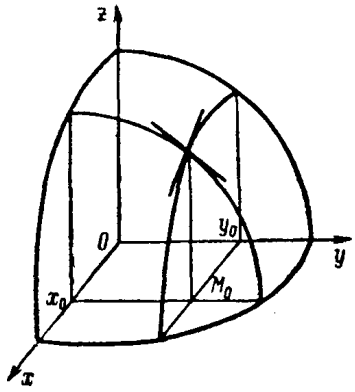

Рис. 92.

Из определения следует геометрический смысл частной производной функции двух переменных по x: частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла наклона касательной к линии пересечения поверхности $u = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ в соответствующей точке (рис. 92).

Аналогично определяется частная производная функции по переменной y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = u'_y = f'_y(x_0, y_0), \tag{3}$$

где

$$\Delta_y u = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0). \tag{4}$$

Подобным образом определяются частные производные функций любого числа независимых переменных.

Пользуясь понятием скорости изменения переменной (см. п. 28), можно сказать, что частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ есть скорость изменения функции $f(x, y)$ относительно x при постоянном y; аналогично $f'_y(x_0, y_0)$ характеризует скорость изменения функции при изменении y и фиксированном x.

Правило вычисления частной производной функции нескольких переменных следует из ее определения и состоит в следующем: частные производные вычисляются по правилам дифференцирования функции одной переменной, при этом все независимые переменные, кроме той, по которой выполняется дифференцирование, следует считать постоянными, соответствующими точке дифференцирования.

Пример 1. Если $u = x^2 - y^2$, то $u'_x = 2x$, $u'_y = -2y$.

Пример 2. Если $u = xyz$, то $u'_x = yz$, $u'_y = xz$, $u'_z = xy$.

Пример 3. Если $p = \frac{RT}{v}$, то $p'_T = \frac{R}{v}$, $p'_v = -\frac{RT}{v^2}$. Величина p'_v называется изотермическим коэффициентом упругости идеального газа.

125. Обобщенная формула конечных приращений. Пусть функция $u = f(x, y)$ в области A определена, непрерывна и имеет производные u'_x и u'_y. Рассмотрим две точки этой области $M(x, y)$ и $N(x+\Delta x, y+\Delta y)$, а также соответствующее полное приращение функции

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y). \tag{5}$$

Запишем его в виде суммы двух разностей

$$\Delta u = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)].$$

Каждая из этих разностей представляет частное приращение функции, т. е. приращение функций при изменении одного аргумента и неизменном значении другого. Преобразуем каждую из этих разностей по формуле конечных приращений Лагранжа для функции одной переменной, получим формулу

$$\Delta u = f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y. \tag{6}$$

Она называется *обобщенной формулой конечных приращений для функции* $u = f(x, y)$. Здесь θ и θ_1 — числа из промежутка (0,1).

126. Дифференцирование сложной функции. Условимся в следующем: будем называть функцию нескольких переменных *непрерывно дифференцируемой в области* A, если существуют и непрерывны в A ее частные производные по каждой из независимых переменных.

А. Рассмотрим сложную функцию д в у х независимых переменных. Пусть 1) функция $u = f(x, y)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в области A плоскости Oxy, 2) функции $x = x(t, v)$ и $y = y(t, v)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы в области B плоскости Otv 3) области A и B согласованы, т. е., если точка $(t, v) \in B$, то соответствующая точка $(x, y) \in A$. При этих условиях переменную u можно рассматривать как сложную функцию независимых переменных t и v в области B: $u = f(x(t, v), y(t, v))$.

Требуется найти ее частную производную, например, по переменной t. Для этого рассмотрим в области B две точки (t, v) и $(t+\Delta t, v)$. Соответствующие частные приращения функций $x(t, v)$, $y(t, v)$ и $f(x, y)$ будут

$$\Delta_t x = x(t+\Delta t, v) - x(t, v), \quad \Delta_t y = y(t+\Delta t, v) - y(t, v),$$

$$\Delta_t u = f(x+\Delta_t x, y+\Delta_t y) - f(x, y).$$

Преобразуем $\Delta_t u$ по обобщенной формуле конечных приращений и, разделив на Δt, получим

$$\frac{\Delta_t u}{\Delta t} = f'_x(x+\theta\Delta_t x, y+\Delta_t u)\frac{\Delta_t x}{\Delta t} + f'_y(x, y+\theta_1\Delta_t y)\frac{\Delta_t y}{\Delta t}.$$

В этом равенстве можно перейти к пределу при $\Delta t \to 0$. В силу непрерывности f'_x и f'_y получим

$$u'_t = f'_x(x, y)\, x'_t(t, v) + f'_y(x, y)\, y'_t(t, v). \tag{7}$$

Аналогично можно вывести формулу

$$u'_v = f'_x(x, y)\, x'_v(t, v) + f'_y(x, y)\, y'_v(t, v). \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) встречаются в таких обозначениях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{9}$$

Отсюда следует п р а в и л о дифференцирования сложной функции: для того чтобы получить частную производную сложной функции, надо найти производные первого порядка «внешней» функции по каждому промежуточному аргументу, домножить их на производные соответствующих аргументов по переменной дифференцирования и полученные парные произведения сложить.

П р и м е р. Если $u = xy$, где $x = t \cos 2v$, $y = t^2 + \sin^2 v$, то $u'_t = y \cos 2v + x2t$, $u'_v = y(-2t \sin 2v) + x \sin 2v$.

Б. Рассмотрим сложную функцию л ю б о г о ч и с л а независимых переменных. Пусть 1) функция $u = f(y_1, \ldots, y_m)$ определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в области A m-мерного пространства, 2) функции $y_1 = y_1(x_1, \ldots, x_n)$ $\ldots$, $y_m = y_m(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы в области B n-мерного пространства, 3) области A и B согласованы, т. е. если $(x_1, \ldots, x_n) \in B$, то $(y_1, \ldots, y_m) \in A$.

Так же, как в случае A, получим при $s = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial u}{\partial x_s} = \frac{\partial u}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_s} + \frac{\partial u}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_s} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_s}. \tag{10}$$

Правило дифференцирования сложной функции сохраняется.

В. Рассмотрим сложную функцию о д н о й независимой переменной. Пусть 1) $u = f(t, x, y, z)$ определена и непрерывно дифференцируема в области A, 2) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ дифференцируемы в промежутке B, 3) области A и B согласованы. При этих условиях u можно рассматривать как сложную функцию одной независимой переменной $u = f(t, x(t), y(t), z(t))$, причем величина u зависит от t как непосредственно, так как ее первым аргументом является t, так и через посредство x, y и z. По правилу дифференцирования сложной функции (случай Б) имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{11}$$

Здесь $\frac{du}{dt}$ называется *полной, или материальной, производной*, $\frac{\partial u}{\partial t}$ — *частной, или локальной, производной*. Название «локальная

производная» связано с тем, что при ее вычислении величины x, y и z (координаты точки пространства) фиксируются.

127. Дифференцирование неявной функции. А. Случай неявной функции одной независимой переменной.

Определение. Функция

$$y = \varphi(x) \tag{12}$$

называется *неявной функцией независимой переменной x в промежутке $a < x < b$*, если она задана уравнением

$$f(x, y) = 0, \tag{13}$$

неразрешенным относительно y. Это значит, что каждому x из (a, b) соответствует такое y, что пара чисел x, y удовлетворяет уравнению (12). Следовательно, имеет место тождество

$$f(x, \varphi(x)) \equiv 0 \tag{14}$$

относительно x в промежутке (a, b).

Замечание 1. Не всякое уравнение вида (13) определяет неявную функцию в вещественной области. Например, уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не определяет никакой вещественной функции, а уравнение $y^2 - x^2 = 0$ определяет несколько функций: $y = \pm x$, $y = |x|$ и др.

Замечание 2. Термин «неявная» относится не к существу функции, а к способу ее задания. Например, функция $y = x^2$ становится неявной, если она задана уравнением $x^2 - y = 0$, не разрешенным относительно y.

Ниже сформулирована теорема существования неявной функции одной независимой переменной.

Теорема 1. *Дано уравнение* (13). *Пусть* 1) *функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в окрестности A точки $M_0(x_0, y_0)$*, 2) $f(x_0, y_0) = 0$, 3) $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда существует, и притом единственная, функция $y = \varphi(x)$ со следующими свойствами*: 1) *$\varphi(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности (α, β) точки x_0*, 2) $\varphi(x_0) = y_0$, 3) $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ *в* (α, β).

Пример 1. Если $f(x, y) = e^{xy} - x - y$ и $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, то $f'_y = xe^{xy} - 1 \neq 0$ в точке $M_0(0, 1)$. Выполнены и другие условия теоремы 1. Поэтому существует одна и только одна функция $y = \varphi(x)$, непрерывная в окрестности точки $x_0 = 0$, удовлетворяющая уравнению $e^{xy} - x - y = 0$ и условию $\varphi(0) = 1$.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то существует производная неявной функции, и она может быть выражена формулой*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}. \tag{15}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 существует в промежутке (α, β) функция $y = \varphi(x)$ с указанными в заключении теоремы 1 свойствами. Рассмотрим две точки x и $x + \Delta x$

промежутка (α, β) и соответствующее приращение $\Delta y = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$. Имеет место равенство

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y) = 0, \tag{16}$$

потому что согласно (14) $f(x, y) = 0$ и $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) = 0$. Левую часть равенства (16) преобразуем по обобщенной формуле конечных приращений. Получим

$$f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)\Delta y = 0, \tag{17}$$

где $f'_y(x,\ y\ \theta_1\Delta y) \neq 0$, что следует из первого и третьего условий теоремы 1. Найдем из (17) отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и, перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим формулу (15). Вместе с тем доказано существование упомянутого предела.

Заметим, что формула (15) может быть выведена из тождества (14) короче, но при этом не доказывается факт существования производной. Именно, если в уравнении (13) под y понимать $\varphi(x)$, то получим тождество (14) относительно x. Дифференцируя его по x согласно правилу дифференцирования сложной функции, получим $f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y'_x = 0$, где $y = \varphi(x)$. Отсюда непосредственно следует формула (15).

Пример 2. Производная неявной функции, определяемой уравнением $e^{xy} - x - y = 0$, в окрестности точки $x_0 = 0$, согласно формуле (15), равна $y'_x = \frac{1 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 1}$.

Пример 3. Неявная функция задана равенством $x^2 + y^2 = R^2$. Дифференцируя его по x при условии $y = y(x)$, получим $2x + 2yy'_x = 0$. Следовательно, $y' = -\frac{x}{y}$.

Б. Случай неявной функции нескольких независимых переменных. Рассмотрим уравнение, например, с тремя переменными

$$f(x,\ y,\ z) = 0 \tag{18}$$

и предположим, что оно определяет в некоторой области A плоскости Oxy неявную функцию

$$z = \varphi(x,\ y), \tag{19}$$

так что имеет место тождество $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$.

Не останавливаясь на рассмотрении условий существования неявной функции и ее частных производных по x и y, дифференцируем последнее тождество по x; получим равенство

$$f'_x(x,\ y,\ z) + f'_z(x,\ y,\ z)\, z'_x = 0, \tag{20}$$

из которого следует формула

$$z'_x = -\frac{f'_x(x,\ y,\ z)}{f'_z(x,\ y,\ z)}. \tag{21}$$

Аналогично получим

$$z'_y = -\frac{f'_y(x, y, z)}{f'_z(x, y, z)}. \qquad (22)$$

Конечно, здесь предполагается, что $f'_z \neq 0$, это одно из условий существования неявной функции.

Пример 4. Из курса термодинамики известно, что физическое состояние однородной жидкости, находящейся в равновесии, определяется заданием двух из трех параметров: давления p, объема v, температуры T. Между этими величинами существует зависимость $f(p, v, T) = 0$, называемая *уравнением состояния*. Установим формулу

$$\frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -1. \qquad (23)$$

Согласно (21) и (22) имеем $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{f'_v}{f'_p}$, $\frac{\partial v}{\partial T} = -\frac{f'_T}{f'_v}$, $\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{f'_p}{f'_T}$. Перемножив эти равенства, получим (23).

В. Система неявных функций. Пусть дана система, например, двух уравнений

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0, \qquad (24)$$

которая определяет две неявные функции $y = \varphi(x)$ и $z = \psi(x)$ одной независимой переменной x, так что имеют место тождества

$$f(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0, \quad g(x, \varphi(x), \psi(x)) \equiv 0. \qquad (25)$$

Для того чтобы найти y'_x и z'_x, дифференцируем тождества (25); получим систему линейных уравнений относительно y'_x и z'_x:

$$f'_x + f'_y y'_x + f'_z z'_x = 0, \quad g'_x + g'_y y'_x + g'_z z'_x = 0. \qquad (26)$$

Коэффициентами при неизвестных y'_x и z'_x служат частные производные f'_y, f'_z, g'_y, g'_z. Если определитель системы (26) не равен нулю, то система имеет единственное решение. Этим определителем служит *функциональный определитель*

$$\begin{vmatrix} f'_y & f'_z \\ g'_y & g'_z \end{vmatrix} = \frac{D(f, g)}{D(y, z)}, \qquad (27)$$

называемый также *определителем Якоби* *, или якобианом.

128. Теорема Эйлера об однородных функциях. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n аргументов называется *однородной функцией степени* m, если при умножении всех ее аргументов на множитель t функция приобретает этот же множитель в степени m, т. е. если имеет место тождество относительно t, $x_1, \ldots, x_n$

$$f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^m f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (28)$$

* Карл Густав Якоб Якоби (1804—1851) — немецкий математик.

Пример 1. Функция $u = \pi r^2 h$ есть однородная функция третьей степени относительно r и h.

Для упрощения письма ограничимся рассмотрением случая функции двух аргументов. Предположим, что однородная степени m функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по обоим аргументам. Имеет место тождество $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. Дифференцируем его по переменной t. Временно обозначив $tx = \alpha$, $ty = \beta$, получим

$$f'_\alpha(\alpha, \beta)\alpha'_t + f'_\beta(\alpha, \beta)\beta'_t = mt^{m-1}f(x, y).$$

При $t = 1$ получим

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = mf(x, y). \tag{29}$$

Таким образом, доказано утверждение: *сумма произведений частных производных однородной функции степени m на соответствующие независимые переменные равна произведению этой функции на m.*

Пример 2. Если $u = x^2 + y^2$, то $xu'_x + yu'_y = 2u$.

129. Частные производные высших порядков. Частные производные функции нескольких переменных сами являются функциями тех же переменных, и мы можем определить их частные производные. Таким образом, мы получим частные производные *второго порядка* исходной функции, которые будут функциями тех же переменных, и их дифференцирование приведет к частным производным третьего и высших порядков.

Так, для функции $u = f(x, y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) две частные производные первого порядка u'_x и u'_y и четыре частные производные второго порядка. Последние обозначаются символами

$$u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad u''_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad u''_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Производные u''_{xy} и u''_{yx}, отличающиеся порядком дифференцирования, называются *смешанными производными второго порядка.*

Аналогичным образом определяются производные 3-го, 4-го и старших порядков.

Теорема. *Смешанные производные второго порядка равны, если они непрерывны*:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y). \tag{30}$$

Для доказательства преобразуем двумя путями следующую функцию:

$$w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y).$$

1. Если обозначить

$$\varphi(x,\ y)\equiv f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y), \tag{31}$$

то $w=\varphi\ (x,\ y+\Delta y)\ -\varphi\ (x,\ y)$. Эта разность по формуле конечных приращений может быть записана в виде произведения

$$w=\varphi'_y(x,\ y+\theta\,\Delta y)\,\Delta y.$$

В силу (31) имеем $w=[f'_y\,(x+\Delta x,\ y+\theta\,\Delta y)-f'_y\,(x,\ y+\theta\,\Delta y)]\,\Delta y$. Применяя еще раз формулу конечных приращений, получим

$$w=f''_{yx}(x+\theta_1\,\Delta x,\ y+\theta\,\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y. \tag{32}$$

2. Если обозначить $\psi\ (x,\ y)\equiv f\ (x,\ y+\Delta y)-f\ (x,\ y)$, то, следуя той же схеме рассуждений, последовательно получим

$$w=\psi(x+\Delta x,\ y)-\psi(x,\ y)=\psi'_x(x+\theta_2\,\Delta x,\ y)\,\Delta x=$$

$$=f''_{xy}(x+\theta_2\,\Delta x,\ y+\theta_3\,\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y. \tag{33}$$

Приравняем правые части равенств (32) и (33) и после деления на $\Delta x\,\Delta y$ получим $f''_{yx}\,(x+\theta_1\,\Delta x,\ y+\theta y)=f''_{xy}\,(x+\theta_2\,\Delta x,\ y+\theta_3\,\Delta y)$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$, согласно непрерывности f''_{xy} и f''_{yx} в точке $(x,\ y)$ получим равенство (30). Теорема доказана.

Следствие. Смешанные производные высших порядков равны, если они непрерывны и получены в результате дифференцирования по одним и тем же переменным одинаковое число раз, но может быть в разной последовательности. Покажем это на примере: $u'''_{xxy}=[(u'_x)'_x]'_y=[(u'_x)'_y]'_x=[(u'_y)'_x]'_x$, т. е. $u'''_{xxy}=u'''_{xyx}=u'''_{yxx}$. Здесь мы дважды пользовались теоремой: первый раз применительно к функции u'_x (мы изменили порядок ее дифференцирования), второй раз положили $u''_{xy}=u''_{yx}$. В общем случае схема рассуждения аналогична.

130. Полное приращение и полный дифференциал функции. Пусть функция $u=f\ (x,\ y)$ независимых переменных x и y определена и непрерывно дифференцируема в области A.

Определение. *Частным дифференциалом функции* $u=f\ (x,\ y)$ называется произведение соответствующих частной производной и приращения независимой переменной:

$$d_xu=f'_x(x,\ y)\,dx,\quad d_yu=f'_y(x,\ y)\,dy,$$

где $dx=\Delta x$ и $dy=\Delta y$ суть приращения независимых переменных x и y.

Полным дифференциалом функции нескольких переменных называется сумма его частных дифференциалов:

$$df(x,\ y)=f'_x(x,\ y)\,dx+f'_y(x,\ y)\,dy. \tag{34}$$

В случае функции любого числа независимых переменных полный дифференциал по определению также равен сумме его частных дифференциалов.

Полное приращение функции $u = f(x, y)$ при переходе от точки $M(x, y)$ к точке $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ по обобщенной формуле конечных приращений может быть представлено в виде

$$\Delta u = f'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x, y + \theta_1 \Delta y)\Delta y.$$

В силу непрерывности частных производных первого порядка имеем

$$f'_x(x + \theta \Delta x, y + \Delta x) = f'_x(x, y) + \alpha, \quad f'_y(x, y + \theta_1 \Delta y) = f'_y(x, y) + \beta, \tag{35}$$

где α и β — бесконечно малые при стремлении к нулю величины

$$\rho = d(M, N) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \tag{36}$$

Поэтому полное приращение функции, имеющей непрерывные частные производные, можно представить в виде суммы

$$\Delta u = df(x, y) + \gamma\rho, \tag{37}$$

где $\gamma = \alpha \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \frac{\Delta y}{\rho}$. При $\rho \to 0$ переменная $\gamma \to 0$, потому что величины $\Delta x/\rho$ и $\Delta y/\rho$ ограничены. Формула (37) связывает полное приращение и полный дифференциал функции.

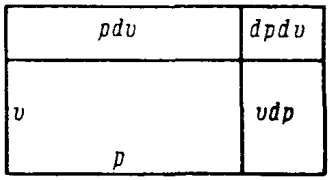

Рис. 93.

Пример. Уравнение состояния идеального газа $pv = RT$ определяет величину RT как функцию независимых переменных p и v, которую можно трактовать геометрически как площадь прямоугольника со сторонами p и v. Если p и v получат приращения dp и dv, то полный дифференциал $d(RT) = vdp + pdv$ связан с полным приращением равенством $\Delta(RT) = d(RT) + dp \cdot dv$.

Все слагаемые нашего дифференциала и полного приращения представлены на рис. 93 площадями соответствующих прямоугольников.

Содержание понятия полного дифференциала функции заключается в следующем: если $f'^2_x + f'^2_x > 0$, то *полный дифференциал есть главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных.* Термин «главная часть» означает, что при стремлении ρ к нулю

1) разность $\Delta u - du$ есть величина бесконечно малая, т. е.

$$\lim_{\rho \to 0}(\Delta u - du) = \lim_{\rho \to 0} \gamma\rho = 0, \tag{38}$$

2) разность $\Delta u - du$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с du, т. е.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u - du}{du} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\gamma\rho}{du} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\gamma}{u'_x \frac{\Delta x}{\rho} + u'_y \frac{\Delta y}{\rho}} = 0. \tag{39}$$

Следовательно, du и Δu — эквивалентные бесконечно малые (см. п. 19):

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta u}{du} = \lim_{\rho \to 0} \left(1 + \frac{\gamma \rho}{du}\right) = 1. \tag{40}$$

Из формулы (37) следует важная формула

$$\Delta u \approx du, \tag{41}$$

которая показывает, что *полное приращение функции приближенно равно ее полному дифференциалу*, причем равенство (41) тем точнее, чем меньше ρ. С уменьшением ρ уменьшается не только абсолютная погрешность формулы (41), т. е. величина $\Delta u - du$, но и относительная погрешность, т. е. величина $\frac{|\Delta u - du|}{|du|}$.

Теорема (об инвариантности формы первого дифференциала). *Предположим, что 1) функция $u = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области A плоскости Oxy, 2) функции $x = x(t, v)$ и $y = y(t, v)$ непрерывно дифференцируемы в области B независимых переменных t и v, 3) функции $x(t, v)$ и $y(t, v)$ принимают значения в области A при всех t, v, принадлежащих B.* Переменную u будем рассматривать как сложную функцию t и v в B.

По определению дифференциала функции имеем

$$du = u'_t\, dt + u'_v\, dv. \tag{42}$$

По правилу дифференцирования сложной функции получим

$$du = (u'_x x'_t + u'_y y'_t)\, dt + (u'_x x'_v + u'_y y'_v)\, dv =$$
$$= u'_x (x'_t\, dt + x'_v\, dv) + u'_y (y'_t\, dt + y'_v\, dv). \tag{43}$$

Величины, содержащиеся справа в скобках, являются полными дифференциалами соответственно функций $x(t, v)$ и $y(t, v)$. Поэтому

$$du = u'_x\, dx + u'_y\, dy. \tag{44}$$

Итак, доказано утверждение: *формула (44) имеет место как в том случае, когда x и y — независимые переменные* (тогда dx и dy суть приращения этих переменных), *так и в случае, когда x и y сами являются функциями других переменных* (тогда dx и dy представляют полные дифференциалы этих функций).

131. Элементы теории приближенных вычислений. Ограничимся рассмотрением двух задач.

Задача 1. Вычислить значение функции $u = f(x, y)$ в точке $N(x + \Delta x, y + \Delta y)$, если известно ее значение в близкой точке $M(x, y)$.

Приближенное решение задачи дает формула (41), которую можно записать в виде

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \approx f(x,\ y) + df(x,\ y). \tag{45}$$

В частности, при $x = y = 0$, обозначив $\Delta x \equiv x$, $\Delta y \equiv y$, получим

$$f(x,\ y) \approx f(0,\ 0) + df(0,\ 0). \tag{46}$$

Таким образом, значения функции в близких точках отличаются приближенно на величину $df\ (x,\ y)$.

Пример 1. Требуется вычислить значение функции $u = xe^y$ при $x = 2{,}03$, $y = 0{,}1$. Для этого рассмотрим точку $M\ (2,0)$. Вычислим $f\ (M) = 2e^0 = 2$ и $df\ (M) = e^y \Delta x + xe^y \Delta y$. Здесь $x_M = 2$, $y_M = 0$, $\Delta x = 0{,}03$, $\Delta y = 0{,}1$ и $d\ f\ (M) = 0{,}23$. Следовательно, $f\ (N) \approx 2{,}23$.

Введем несколько понятий. *Верхней границей числового множества* $\{x\}$ называется число M такое, что все x удовлетворяют соотношению $x \leqslant M$. Например, множество правильных дробей ограничено сверху числом единица или любым числом, большим единицы.

Пусть x_0 — точное значение рассматриваемой величины, x — одно из ее приближенных значений. *Абсолютной погрешностью* приближенного числа x называется число $|x - x_0|$. *Предельной абсолютной погрешностью* Δ_x приближенного числа x называется верхняя граница множества $\{|x - x_0|\}$. Поэтому имеет место неравенство

$$|x - x_0| \leqslant \Delta_x. \tag{47}$$

Предельной относительной погрешностью величины x называется число

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|}. \tag{48}$$

Задача 2. Найти предельную абсолютную погрешность результата вычисления величины u по формуле $u = f\ (x,\ y)$, если известны приближенные значения x и y и их предельные абсолютные погрешности Δ_x и Δ_y.

Решение. Если принять приближенное равенство (41) за точное и положить $\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y$, то легко найти верхнюю границу величины $|\Delta u|$ с помощью неравенства

$$|\Delta u| \leqslant |u'_x|\ |\Delta x| + |u'_y|\,|\Delta y| \leqslant |u'_x|\,\Delta_x + |u'_y|\,\Delta_y.$$

Поэтому за Δ_u можно принять

$$\Delta_u = |u'_x|\,\Delta_x + |u'_y|\,\Delta_y. \tag{49}$$

Формула (49) обобщается на случай функции любого числа независимых переменных.

Из основной формулы (49) вытекает, в частности, следующее утверждение.

Теорема. *При сложении и вычитании предельные абсолютные погрешности слагаемых складываются:*

$$\Delta_{x \pm y} = \Delta_x + \Delta_y. \tag{50}$$

При умножении и делении предельные относительные погрешности складываются:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y, \quad \delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x + \delta_y. \tag{51}$$

Действительно, если $u = x + y$, то $u'_x = u'_y = 1$; если $u = x - y$, то $u'_x = 1$, $u'_y = -1$. В обоих случаях $|u'_x| = |u'_y| = 1$ и согласно (49) получаем (50).

Если $u = xy$, то согласно (49) имеем $\Delta_u = |y|\Delta_x + |x|\Delta_y$. Поэтому при $xy \neq 0$ имеем

$$\delta_{xy} = \frac{\Delta_u}{|xy|} = \frac{\Delta_x}{|x|} + \frac{\Delta_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y. \tag{52}$$

Если $u = \frac{x}{y}$, то по формулам (49) и (48) последовательно находим $\Delta_u = \frac{\Delta_x}{|y|} + \frac{|x|\Delta_y}{y^2}$ и $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \delta_x + \delta_y$.

Пример 2. Дано $Q = 0{,}24i^2rt$, $i = 5 \pm 0{,}5$, $r = 10 \pm 1$, $t = 1$. Вычислить Q и Δ_Q.

Решение. Здесь $Q = 0{,}24 \cdot 5^2 \cdot 10 = 60$, $\Delta_i = 0{,}5$, $\Delta_r = 1$, $\Delta t = 0$ и $\Delta_Q = 18$. Следовательно, $Q = 60 \pm 18$.

132. Касательная к пространственной кривой. Пусть кривая l задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha < t < \beta). \tag{53}$$

Предположим, что эта кривая гладкая, т. е. существуют и непрерывные производные x'_t, y'_t, z'_t.

Касательной к линии l в точке M_0 называется предельное положение секущей, проведенной через точку M_0 и точку M этой линии, когда точка M стремится вдоль по l к M_0. Пусть точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ соответствует значение параметра t_0, а точке $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ — значение параметра t. Предполагается, что точка M_0 неособенная, т. е. $x'^2(t_0) + y'^2(t_0) + z'^2(t_0) > 0$. Составим уравнения секущей M_0M

$$\frac{X - x_0}{\Delta x} = \frac{Y - y_0}{\Delta y} = \frac{Z - z_0}{\Delta z}, \tag{54}$$

где X, Y и Z — ее текущие координаты. Разделим знаменатели равенства (54) на Δt и, перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим *уравнение касательной* к кривой, заданной уравнениями (53) в точке M_0:

$$\frac{X - x_0}{x'(t_0)} = \frac{Y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{Z - z_0}{z'(t_0)}. \tag{55}$$

Направляющие косинусы этой касательной такие:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \tag{56}$$

где все производные берутся при значении $t = t_0$. Если кривая гладкая, то направляющие косинусы суть непрерывные функции параметра t.

Пример. Составим уравнение касательной к винтовой линии, заданной уравнениями $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = kt$ в точке, где $t = t_0 = \pi/2\omega$ (рис. 94).

Решение. Имеем $x' = -a\omega\sin\omega t$, $y' = a\omega\cos\omega t$, $z' = k$. При $t = t_0$ получим $x_0 = 0$, $y_0 = a$, $z_0 = k\pi/2\omega$, $x'_0 = -a\omega$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = k$. Подставив эти величины в соотношения (55), получим уравнение касательной $\dfrac{X}{a\omega} = \dfrac{Y-a}{0} = \dfrac{Z-z_0}{k}$.

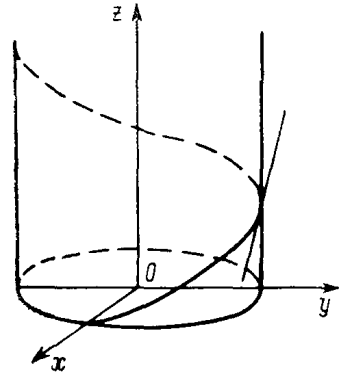

Рис. 94.

133. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Пусть поверхность S задана уравнением

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad (57)$$

в котором функция $\varphi(x, y, z)$ предполагается непрерывно дифференцируемой, причём $\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z > 0$ на S. Рассмотрим на поверхности S точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и произвольную гладкую кривую l, проходящую через M_0. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — параметрические уравнения линии l, которые при $t = t_0$ дают $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Линия l принадлежит поверхности S, поэтому имеет место тождество $\varphi(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Дифференцируя это *тождество по* переменной t, получим

$$\varphi'_x(M)\,x' + \varphi'_y(M)\,y' + \varphi'_z(M)\,z' = 0.$$

При $t = t_0$ имеем

$$\varphi'_x(M_0)\,x'(t_0) + \varphi'_y(M_0)\,y'(t_0) + \varphi'_z(M_0)\,z'(t_0) = 0. \qquad (58)$$

Рассмотрим векторы $\mathbf{N}(\varphi'_{x0}, \varphi'_{y0}, \varphi'_{z0})$ и $\mathbf{s}(x'_0, y'_0, z'_0)$. Эти векторы ортогональны, потому что согласно (58) их скалярное произведение равно нулю. Заметим, что вектор $\mathbf{N}$ не зависит от выбора линии l на поверхности, а вектор $\mathbf{s}$ согласно (55) направлен по касательной к l в точке M_0. Отсюда следует утверждение: касательные в точке M_0 ко всем принадлежащим поверхности S гладким линиям вида l лежат в одной плоскости, которая перпендикулярна вектору $\mathbf{N}$.

Плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно вектору $\mathbf{N}$, называется *касательной плоскостью к поверхности S в точке M_0*. *Нормалью к поверхности S в точке M_0* называется прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке M_0.

Выведем уравнение касательной плоскости. В уравнении плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \qquad (59)$$

как известно (см. п.102), коэффициенты A, B и C суть проекции вектора, нормального к этой плоскости. Поэтому, положив в (59) $A = \varphi'_x(M_0)$, $B = \varphi'_y(M_0)$, $C = \varphi'_z(M_0)$, получим *уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением* (57)

$$\varphi'_x(M_0)(x-x_0) + \varphi'_y(M_0)(y-y_0) + \varphi'_z(M_0)(z-z_0) = 0. \qquad (60)$$

В канонических уравнениях прямой

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \qquad (61)$$

величины m, n и p, как известно, суть проекции направляющего вектора **s** прямой. Поэтому и в соответствии с определением нормали к поверхности, если положить $m = \varphi'_x(M_0)$, $n = \varphi'_y(M_0)$, $p = \varphi'_z(M_0)$, получим *уравнения нормали к поверхности*, заданной уравнением (57)

$$\frac{x-x_0}{\varphi'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{\varphi'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{\varphi'_z(M_0)}. \qquad (62)$$

Пример. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $z = x^2 + y^2$ в точке $M_0(1, 1, 2)$.

Решение. Здесь $\varphi = x^2 + y^2 - z$, $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 2y$, $\varphi'_z = -1$. В точке M_0 имеем $\varphi'_x = \varphi'_y = 2$, $\varphi'_z = -1$. Поэтому в соответствии с равенствами (60) и (62) получим уравнение касательной плоскости $2x + 2y - z - 2 = 0$ и уравнения нормали $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно. Если поверхность задана уравнением $\varphi(x, y, z) = 0$, то гладкость поверхности означает, что функция $\varphi(x, y, z)$ имеет непрерывные производные φ'_x, φ'_y, φ'_z и что $\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z > 0$. Действительно, в этом случае направляющие косинусы нормали к поверхности будут непрерывными функциями точки касания:

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'_x}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}}, \quad \cos\beta = \frac{\varphi'_y}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\varphi'_z}{\sqrt{\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z}}.$$

В математике и ее приложениях встречаются поверхности, состоящие из конечного числа гладких частей, которые соединены непрерывно; такие поверхности называются *кусочно-гладкими*.

О геометрическом смысле полного дифференциала. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то уравнение касательной плоскости будет получено как частный случай уравнения (60) при $\varphi = f(x, y) - z$. Тогда $\varphi'_x = f'_x$, $\varphi'_y = f'_y$, $\varphi'_z = -1$ и уравнение (60) примет вид

$$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0.$$

Обозначив здесь $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$, $z - z_0 = \Delta z$, получим

$$f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = \Delta z \text{ и } df(x_0, y_0) = \Delta z, \tag{63}$$

г. е. *полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости.* Таково геометрическое истолкование полного дифференциала функции $f(x, y)$.

134. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$ независимых переменных x и y, имеющую производные всех порядков. Полный дифференциал du назовем *полным дифференциалом первого порядка.*

Полным дифференциалом n-го порядка называется полный дифференциал от полного дифференциала $(n - 1)$-го порядка и обозначается символом

$$d^n u = d(d^{n-1}u). \tag{64}$$

Исходя из равенства $du = u'_x dx + u'_y dy$, определяющего первый дифференциал, последовательно выведем

$$\begin{gathered} d^2u = d(u'_x dx + u'_y dy) = (u'_x dx + u'_y dy)'_x dx + \\ + (u'_x dx + u'_y dy)'_y dy, \\ d^2u = u''_{xx}(dx)^2 + 2u''_{xy} dx\, dy + u''_{yy}(dy)^2. \end{gathered} \tag{65}$$

Вычислив точно так же d^3u, получим

$$d^3u = u'''_{xxx}(dx)^3 + 3u'''_{xxy}(dx)^2 dy + 3u'''_{xyy} dx (dy)^2 + u'''_{yyy}(dy)^3.$$

Эти выражения d^2u и d^3u приводят нас к следующей *символической формуле* для дифференциала любого порядка:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n u, \tag{66}$$

которую нужно понимать так: сумму, стоящую в круглых скобках, надо возвести в степень n по формуле бинома Ньютона, после чего показатели степеней у $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ надо считать указателями порядка производных по x и y от функции u.

135. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Пусть функция $u = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема $n + 1$ раз в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Пусть точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ принадлежит этой окрестности. Вспомогательную функцию $\varphi(t)$ определим в промежутке $0 \leqslant t \leqslant 1$ равенством

$$\varphi(t) = f(x, y), \tag{67}$$

где $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$. Согласно п. 51 составим формулу Тейлора для $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}. \tag{68}$$

Вычислим коэффициенты формулы (68) с помощью равенства (67). При $t = 0$ имеем $\varphi(0) = f(x_0, y_0)$. Дифференцируя сложную функцию $\varphi(t)$ по t, получим

$$\varphi'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = df(x, y),$$

$$\varphi''(t) = f''_{xx} x'^2 + 2f''_{xy} x'y' + f''_{yy} y'^2 = d^2 f(x \quad y), \ \ldots,$$

$$\varphi^{(n)}(t) = d^n f(x, y), \ \varphi^{(n+1)}(t) = d^{n+1} f(x, y).$$

Заменив в последнем равенстве t на θt, а в остальных положив $t = 0$, найдем $\varphi^{(k)}(0) = d^k f(x_0, y_0)$ при $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$\varphi^{(n+1)}(\theta t) = d^{n+1} f(x_0 + \theta t \Delta x, \ y_0 + \theta t \Delta y).$$

Если подставить найденные выражения в равенство (68) и затем положить в нем $t = 1$, то получим для $f(x, y)$ *формулу Тейлора*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, \ y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!}, \quad (69)$$

где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Ее можно записать в виде

$$f(M) = f(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(M_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(M_*)}{(n+1)!}, \quad (70)$$

где $M_*(x_0 + \theta\Delta x, \ y_0 + \theta\Delta y)$. Формула Тейлора для функции любого числа независимых переменных имеет такой же вид.

136. Экстремум функции нескольких переменных. Рассмотрим функцию $u = f(x, y)$, непрерывную в области A. По определению *функция $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ максимум*, если выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ или

$$\Delta u = f(M) - f(M_0) < 0 \quad (71)$$

в некоторой окрестности точки M_0, т. е. при условии

$$0 < \rho = d(M_0, M) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \delta. \quad (72)$$

Само максимальное значение функции $f(M_0)$ является наибольшим значением, но не обязательно во всей области A, а в некоторой окрестности точки M_0.

Функция $f(x, y)$ имеет в точке M_0 минимум, если в некоторой δ-окрестности точки M_0 выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ или

$$\Delta u > 0. \quad (73)$$

Для обозначения максимума и минимума употребляется и общий термин — *экстремум*.

Если вместо (71) или (72) выполнено условие $\Delta u \leqslant 0$ или $\Delta u \geqslant 0$, то экстремум называется *несобственным*.

Теорема (о необходимом условии экстремума). *Если функция* $u = f(M)$ *имеет в точке* M_0 *экстремум, то в этой точке каждая частная производная первого порядка от* u *либо не существует, либо равна нулю.*

Доказательство приведем для случая функции двух независимых переменных. Пусть $f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум.

Тогда функция $f(x, y_0)$ в точке x_0 имеет экстремум (того же смысла), потому что неравенство (71) или (73) выполняется для всех точек δ-окрестности точки M_0, в частности оно выполняется при условии $y = y_0$. Поэтому (см. необходимое условие экстремума функции одной переменной, п. 39) производная $f'_x(x, y_0)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует. Функция $f(x_0, y)$ при $y = y_0$ тоже имеет экстремум, и поэтому $f'_y(x_0, y)$ в точке y_0 либо равна нулю, либо не существует. Теорема доказана.

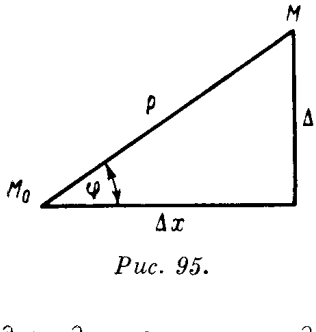

Рис. 95.

Пример 1. $z = x^2 + y^2$, $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$. Производные равны нулю в точке $x_0 = y_0 = 0$, где функция имеет минимум.

Пример 2. $z = x^2 - y^2$. Производные первого порядка опять равны нулю в точке $x_0 = y_0 = 0$, но экстремума эта функция не имеет (поверхность носит седлообразный характер).

Теорема (о достаточном условии экстремума). *Пусть функция* $u = u(x, y)$ *дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *и в самой точке* M_0 *выполнено условие*

$$u'_x(M_0) = u'_y(M_0) = 0. \tag{74}$$

Обозначим $A = u''_{xx}(M_0)$, $B = u''_{xy}(M_0)$, $C = u''_{yy}(M_0)$, $D = AC - B^2$. *Тогда в точке* M_0 *функция* $u(x, y)$ 1) *имеет минимум, если* $D > 0$ и $A > 0$, 2) *имеет максимум, если* $D > 0$ *и* $A < 0$, 3) *не имеет экстремума, если* $D < 0$.

Доказательство. Формула Тейлора (70) при $n = 1$ имеет вид

$$\Delta u = df(M_0) + \frac{1}{2} d^2 f(M_*).$$

По условию (74) первый дифференциал равен нулю в точке M_0, следовательно

$$2\Delta u = u''_{xx}(M_*)(\Delta x)^2 + 2u''_{xy}(M_*)\Delta x \Delta y + u''_{yy}(M_*)(\Delta y)^2, \tag{75}$$

где M_* есть точка из окрестности M_0. В силу непрерывности вторых производных имеем $u''_{xx}(M_*) = A + \alpha_1$, $u''_{xy}(M_*) = B + \alpha_2$, $u''_{yy}(M_*) = C + \alpha_3$, где α_1, α_2, α_3 — величины бесконечно малые при стремлении ρ к нулю (рис. 95). Поэтому из (75) следует равенство

$$2\Delta u = A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x \Delta y + C(\Delta y)^2 + \alpha\rho^2, \tag{76}$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\alpha\rho^2 = \alpha_1 (\Delta x)^2 + 2\alpha_2 \Delta x \Delta y + \alpha_3 (\Delta y)^2$. Положив в (76) $\Delta x = \rho \cos\varphi$, $\Delta y = \rho \sin\varphi$, получим

$$2\Delta u = \rho^2 \{(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi) + \alpha\}, \qquad (77)$$

где $\alpha = \alpha_1 \cos^2\varphi + 2\alpha_2 \sin\varphi\cos\varphi + \alpha_3 \sin^2\varphi$.

При стремлении ρ к нулю величина α тоже стремится к нулю. Поэтому $|\alpha|$ можно сделать сколь угодно малой путем уменьшения ρ. Будем считать точки M_0 и M настолько близкими (ρ настолько малым), что в фигурной скобке равенства (77) слагаемое α много меньше по абсолютной величине независящего от ρ первого слагаемого. При этом условии знак величины Δu определяется этим первым слагаемым, если оно не равно нулю.

Приведем формулу (77) к виду

$$2\Delta u = \rho^2 \left\{[(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + D\sin^2\varphi] \cdot \frac{1}{A} + \alpha\right\} \qquad (78)$$

и выясним знак величины Δu с помощью формулы (78). Возможны следующие случаи.

1. Если $D>0$ и $A>0$, то в формуле (78) имеем $[\ldots]>0$, $\frac{1}{A}[\ldots]>0$, $\Delta u>0$ и в точке M_0 функция имеет минимум.

2. Если $D>0$ и $A<0$, то $[\ldots]>0$, $\frac{1}{A}[\ldots]<0$, $\Delta u<0$ и в точке M_0 функция имеет максимум.

Заметим, что в этих двух случаях слагаемые в квадратной скобке равенства (78) одновременно в нуль не обращаются. Так, второй член равен нулю при $\sin\varphi_1 = 0$, первый же член равен нулю при условии $\varphi = \varphi_2$, где $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{A}{B}$, причем $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

3а. Если $D<0$ и $A>0$, то экстремума нет, так как 1) вдоль луча $\varphi = \varphi_1$ имеем $[\ldots] = A^2\cos^2\varphi > 0$, $\{\ldots\}>0$ и $\Delta u>0$, 2) вдоль луча $\varphi = \varphi_2$ имеем $[\ldots] = D\sin^2\varphi < 0$, $\{\ldots\}<0$ и $\Delta u<0$.

3б. Если $D<0$ и $A<0$, то экстремума нет, потому что 1) на луче $\varphi = \varphi_1$ $\Delta u<0$, 2) на луче $\varphi = \varphi_2$ $\Delta u>0$.

3в. Если $D<0$ и $A=0$, то $B \neq 0$. Из (77) следует равенство

$$2\Delta u = \rho^2 \{\sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi) + \alpha\}. \qquad (79)$$

Если величина $|\varphi|$ достаточно мала, то сумма $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ имеет знак B. После выбора такого $|\varphi|$ выберем ρ столь малым, чтобы знак величины, содержащейся в фигурной скобке формулы (79), определялся ее первым слагаемым. Это слагаемое, а вместе с ним и Δu, будет иметь знак B, если $\varphi > 0$; оно будет иметь противоположный знак, если $\varphi < 0$. Следовательно, нет экстремума и в этом случае. Теорема доказана.

Пример 3. Требуется исследовать на экстремум функцию $u = x^3 + y^3 - 3xy$. Ее частные производные первого порядка $u'_x = 3x^2 - 3y$, $u'_y = 3y^2 - 3x$ обращаются в нуль в точках M_0 (0, 0) и M_1 (1, 1). Ее вторые

производные равны $u''_{xx} = 6x$, $u''_{xy} = -3$, $u''_{yy} = 6y$. В точке M_0 имеем $A = C = 0$, $B = -3$, $D = -9$ и экстремума в этой точке нет. В точке M_1 имеем $A = C = 6$, $B = -3$, $D = 27$ и функция имеет минимум, равный $f(M_1) = -1$.

Покажем на примерах, что в случае $D = 0$ экстремум может быть, но его может не быть.

Пример 4. $u = x^3 + y^3$. В точке $x_0 = y_0 = 0$, где $D = 0$, функция экстремума не имеет, так как в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков, а в самой точке $u = 0$.

Пример 5. $u = x^4 + y^4$. В точке $x_0 = y_0 = 0$, где $D = 0$, функция имеет минимум, потому что в любой окрестности этой точки $u > 0$, а в самой точке $u = 0$.

Примечание. Достаточное условие экстремума функции любого числа переменных состоит в том, что второй дифференциал этой функции $d^2f(M)$ сохраняет знак в окрестности точки M_0, в которой выполнено необходимое условие экстремума.

137. Условный, или относительный, экстремум. Пусть дана функция

$$u = f(x, y) \tag{80}$$

и условие связи между переменными x и y: $\varphi(x, y) = 0$.

Если функция (80) при этом условии имеет экстремум, то этот экстремум называется *условным*, или *относительным*. Геометрически это можно понимать так: данные уравнения определяют две пересекающиеся поверхности, из них вторая поверхность цилиндрическая с образующей, параллельной оси Oz, направляющей же служит кривая, определяемая уравнением $\varphi(x, y) = 0$ в плоскости Oxy. Если линия пересечения этих поверхностей имеет внутреннюю точку с наименьшей или с наибольшей аппликатой, то имеет место относительный экстремум.

Пример 1. Функция $u = x^2 - y^2$ абсолютного экстремума не имеет, но при условии $y = 0$ она имеет относительный минимум, а при условии $x = 0$ она имеет относительный максимум в точке $x_0 = y_0 = 0$.

Для исследования функции (80) на относительный экстремум можно было бы найти величину $y(x)$ из условия связи, подставить ее в (80) и полученную функцию одной переменной x исследовать на экстремум. Но можно решать задачу следующим образом.

Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция (80) имеет относительный экстремум. Если $y(x)$ есть решение уравнения связи, то имеем

$$u = f(x, y(x)) \text{ и } \varphi(x, y(x)) = 0. \tag{81}$$

Дифференцируя первое равенство по x, получим $u'_x = f'_x + f'_y y'$. Эта величина равна нулю в точке M_0, потому что по условию в этой точке функция (80) имеет относительный экстремум

$$f'_x + f'_y y' = 0. \tag{82}$$

Дифференцируя второе из равенств (81) по x, получим тождество относительно x, верное, в частности, при x_0:

$$\varphi'_x + \varphi'_y y' = 0. \tag{83}$$

С целью исключения неизвестной величины y' введем вспомогательный множитель λ. А именно умножим равенство (83) на λ и, сложив с (82), получим

$$f'_x + \lambda\varphi'_x + (f'_y + \lambda\varphi_y)\, y' = 0. \tag{84}$$

Величину λ выберем из условия $f'_y + \lambda\varphi'_y = 0$. Тогда из (84) следует, что $f'_x + \lambda\varphi'_x = 0$. Система уравнений (относительно x, y и λ)

$$f'_x + \lambda\varphi'_x = 0,\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0,\ \varphi(x,\ y) = 0 \tag{85}$$

представляет *необходимое условие относительного экстремума.* В точке $M_0\,(x_0,\ y_0)$, где имеет место относительный экстремум, условия (85) выполнены. Поэтому для нахождения точек «подозрительных» на экстремум надо решить систему (85) относительно x, y, λ и, отбросив λ, определить таким образом координаты искомых точек.

Заметим, что в левых частях равенств (85) стоят частные производные функции

$$\Phi(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda\varphi(x,\ y), \tag{86}$$

называемой *функцией Лагранжа*; она может быть составлена непосредственно по условиям задачи. Из сказанного вытекает следующая схема исследования функции (80) на относительный экстремум: 1) по исходным данным задачи надо составить функцию Лагранжа (86), 2) написать необходимые условия относительного экстремума

$$\Phi'_x = 0,\ \Phi'_y = 0,\ \Phi'_\lambda = 0, \tag{87}$$

3) решить систему (87) относительно x, y, λ; таким образом, будут найдены точки $M_k\,(x_k,\ y_k)$, «подозрительные» на экстремум, 4) выяснить наличие или отсутствие экстремума в точках M_k путем дополнительного исследования.

Метод Лагранжа распространяется на случай функции любого числа независимых переменных и условий связи. Если дана функция $u = f(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и условия связи $\varphi_k(x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0$ $(k = 1,\ \ldots,\ m < n)$, то функция Лагранжа имеет вид

$$\Phi = f + \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_m\varphi_m. \tag{88}$$

Необходимое условие экстремума представляет система уравнений (относительно $n + m$ неизвестных $x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$)

$$\Phi'_{x_1} = 0,\ \ldots,\ \Phi'_{x_n} = 0,\ \Phi'_{\lambda_1} = 0,\ \ldots,\ \Phi'_{\lambda_m} = 0. \tag{89}$$

Пример 2. Для исследования функции $u = xy$ на экстремум при условии $x + y = a$ составим функцию Лагранжа $\Phi = xy + \lambda(x + y - a)$ и напишем необходимые условия экстремума

$$\Phi'_x = y + \lambda = 0,\ \Phi'_y = x + \lambda = 0,\ \Phi'_\lambda = x + y - a = 0.$$

Следовательно, экстремум может быть лишь в точке $x_0 = y_0 = \frac{a}{2}$. По смыслу задачи имеем в этой точке относительный максимум $u = \frac{a^2}{4}$, потому что при любом Δx имеем $\Delta y = -\Delta x$ и $\left(\frac{a}{2} + \Delta x\right)\left(\frac{a}{2} - \Delta x\right) < \frac{a^2}{4}$, т. е. $u(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) < u(x_0,\ y_0)$.

§ 22. ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть в рассматриваемом явлении две величины x и y связаны функциональной зависимостью $y = f(x)$, которая нам неизвестна. Однако известна таблица экспериментальных данных

$$\begin{array}{l} x_0\ x_1 \ldots x_n, \\ y_0\ y_1 \ldots y_n, \end{array} \tag{1}$$

содержащая приближенные значения величин x и y.

Для нахождения функции $y = f(x)$ табличных данных (1) недостаточно, но можно поставить вопрос о нахождении функции, приближенно представляющей $f(x)$, причем это приближение должно быть наилучшим в каком-то смысле, т. е. должно удовлетворять некоторому условию. Возможна различная постановка вопроса о наилучшем приближении функции. Рассмотрим некоторые из них.

138. Интерполяционная формула Лагранжа. Дана таблица (1). Требуется найти многочлен $L_n(x)$ степени n, принимающий в точках x_0, x_1, . . ., x_n соответственно значения y_0, y_2, . . ., y_n:

$$L_n(x_k) = y_k \text{ при } k = 0,\ 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Геометрическая постановка вопроса такова — требуется найти многочлен, график которого проходит через точки, координаты которых заданы таблицей (1).

Запишем искомый многочлен в виде

$$L_n(x) = c_0(x - x_1) \ldots (x - x_n) + c_1(x - x_0)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + \\ + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}), \tag{3}$$

где c_0, c_1, . . ., c_n — неопределенные коэффициенты. Полагая в (3) последовательно $x = x_0$, $x = x_1$, . . ., $x = x_n$, получим согласно (2) систему равенств

$$\begin{array}{l} y_0 = c_0(x_0 - x_1) \ldots (x_0 - x_n), \\ y_1 = c_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots (x_1 - x_n), \ldots, \\ y_n = c_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \ldots (x_n - x_{n-1}), \end{array} \tag{4}$$

из которой легко найти все c_k. Обозначим $\omega(x) = (x - x_0)\ldots$ $\ldots(x - x_n)$. Систему (4) можно записать короче:

$$y_0 = c_0\omega'(x_0),\ y_1 = c_1\omega'(x_1),\ \ldots,\ y_n = c_n\omega'(x_n).$$

Отсюда следует, что $c_k = \frac{y_k}{\omega'(x_k)}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$.

При этих значениях коэффициентов c_k равенство (3) дает *интерполяционную формулу Лагранжа*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}\, y_k. \tag{5}$$

График многочлена (5) проходит через точки $M_k(x_k, y_k)$. Однако между этими точками он может уклоняться от графика функции $f(x)$.

Пример.* Определим плотность 26%-го раствора фосфорной кислоты H_3PO_4 при 20 °С, пользуясь следующими данными:

y (плотности) ...	1,0764	1,1134	1,2160	1,3350
x ($\%H_3PO_4$) ...	14	20	35	50

По формуле Лагранжа (5) при $n = 4$ получим

$$y = 1 - \frac{2}{7}\,0{,}0764 + \frac{24}{25}\,0{,}1134 + \frac{64}{175}\,0{,}2160 - \frac{1}{25}\,0{,}3350 = 1{,}1528.$$

Действительное значение плотности 26%-го H_3PO_4 составляет 1,1529.

139. О методе наименьших квадратов. В естествознании пользуются так называемыми *эмпирическими формулами*, составленными с помощью экспериментальных данных таблицы (1). Одним из распространенных способов получения таких формул является способ наименьших квадратов. Ниже изложена идея этого способа.

Пусть дана таблица (1). Предположим, что в первом приближении величина y линейно зависит от x, т. е.

$$y = ax + b. \tag{6}$$

Назовем *уклонением* (или отклонением) разность между точным значением функции (6) в точке x_k и соответствующим значением y_k из таблицы (1): $\varepsilon_k = ax_k + b - y_k$.

Сумма квадратов уклонений есть функция величин a и b:

$$u(a, b) = \varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2. \tag{7}$$

В методе наименьших квадратов на коэффициенты a и b функции (7) накладывается условие — они должны доставлять *минимум сумме квадратов уклонений* $u(a, b)$. Требуется найти a и b, удовлетворяющие этому условию.

---

* Этот пример взят из работы Л. М. Батунера и М. Е. Позина «Математические методы в химической технике», изд. 5-е. М., Химиздат, 1968, с. 740.

Для нахождения точки экстремума функции

$$u(a,\ b)=\sum_{k=0}^{n}(ax_k+b-y_k)^2 \tag{8}$$

вычислим ее частные производные по a и по b и приравняем их нулю:

$$u'_a=\sum 2(ax_k+b-y_k)x_k=2a\sum x_k^2+2b\sum x_k-2\sum x_ky_k=0, \tag{9}$$

$$u'_b=\sum 2(ax_k+b-y_k)=2a\sum x_k+2(n+1)b-\sum y_k=0,$$

где индекс суммирования k изменяется от 0 до n.

Введем обозначения для коэффициентов полученной системы уравнений $\sum x_k^2=[x,\ x]$, $\sum x_k=[x]$, $\sum y_k=[y]$, $\sum x_ky_n=[x,\ y]$. Эти постоянные могут быть найдены непосредственно по исходным данным (1).

Необходимые условия экстремума (9) приводят нас к системе двух алгебраических уравнений с известными постоянными коэффициентами

$$[x,\ x]\,a+[x]\,b=[x,\ y],\ \ [x]\,a+(1+n)\,b=[y], \tag{10}$$

которая называется *нормальной системой метода наименьших квадратов.*

Пусть $a=a_0$, $b=b_0$ — решение системы (10). Можно доказать, что найденные a_0 и b_0 доставляют величине $u\ (a,\ b)$ именно минимум. Функция (6) при значениях параметров a_0 и b_0 дает *эмпирическую формулу* $y=a_0x+b_0$.

Уточним эмпирическую формулу. Эмпирическая формула $y=a_0x+b_0$ характеризуется значением суммы квадратов уклонений $u\ (a_0,\ b_0)$. Эту эмпирическую формулу можно улучшить так, чтобы уменьшилась сумма квадратов уклонений. Для этого положим

$$\tilde{y}=a_0x+b_0+c\varphi(x), \tag{11}$$

где c — искомый коэффициент, а $\varphi\ (x)$ — любая данная функция (например, x^2 или $\sin x$), удовлетворяющая условию $\sum\varphi^2\ (x_k)\neq 0$. Составим сумму квадратов уклонений функции (11)

$$v(c)=\sum_{k=0}^{n}[a_0x_k+b_0+c\varphi(x_k)-y_k]^2=\sum_{k=0}^{n}[c\varphi(x_k)+\varepsilon_k]^2.$$

Найдем значение c, при котором эта сумма минимальна. Для этого составим необходимое условие экстремума

$$\frac{dv}{dc}=2\sum_{k=0}^{n}[c\varphi(x_k)+\varepsilon_k]\,\varphi(x_k)=0,$$

из которого следует, что $c = c_0 = -\frac{\sum \varepsilon_k \varphi(x_k)}{\sum \varphi^2(x_k)}$. При этом значении c равенство (11) дает уточненную эмпирическую формулу $\tilde{y} = a_0 x + b_0 + c_0 \varphi(x)$.

Если $c_0 \neq 0$, то новая сумма квадратов уклонений меньше прежней: $v(c_0) < u(a_0, b_0)$. Действительно, $v'' = 2\sum \varphi^2(x_k) > 0$, поэтому $v(c)$ в точке c_0 имеет именно минимум. Других точек экстремума функция $v(c)$ не имеет, при $c = 0$ она имеет значение $v(0) = u(a_0, b_0)$. Отсюда следует наше утверждение.

Процесс улучшения эмпирической формулы может быть продолжен по рассмотренной схеме путем добавления новых слагаемых.

140. О равномерном приближении функции многочленом. Иногда целесообразна постановка вопроса о наилучшем приближении в смысле равномерного приближения.

Пусть дана функция $f(x)$. Говорят, что *функция* $\varphi(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ *равномерно приближает функцию* $f(x)$ *с точностью до* ε, если для всех x из $[a, b]$ выполнено условие $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

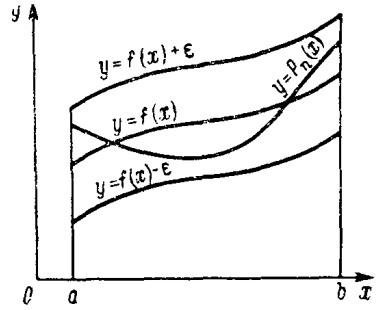

Рис. 96.

Можно доказать (см. п. 216), что многочлен Тейлора $T_n(x)$ функции $f(x)$ при достаточно большом n равномерно приближает $f(x)$ в промежутке $|x - x_0| < r$, если $f(x)$ имеет производные всех порядков, которые ограничены одним и тем же числом.

Ниже сформулирована более сильная теорема (налагающая меньшие требования на функцию) о равномерном приближении функции многочленом.

Теорема Вейерштрасса. *Если* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* $[a, b]$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует соответствующий многочлен* $P_n(x)$ *такой, что для всех* x *из* $[a, b]$ *выполняется условие*

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon. \qquad (12)$$

Геометрически условие (12) означает, что график функции $P_n(x)$ не выходит из пределов полосы (рис. 96)

$$f(x) - \varepsilon < P_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Общая теория наилучшего приближения функций с помощью многочленов создана П. Л. Чебышевым *.

Способ построения многочленов, равномерно приближающих данную непрерывную $f(x)$, был предложен в частности С. Н. Бернштейном. Не нарушая общности, можно рассматривать

---

* Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) — великий русский математик.

промежуток изменения аргумента $[0, 1]$, потому что любой промежуток $[a, b]$ путем линейного преобразования $x = a + t(b - a)$ можно свести к промежутку $[0, 1]$. Если $f(x)$ непрерывна в $[0, 1]$, то можно подобрать по любому $\varepsilon > 0$ соответствующее число n такое, что *полином Бернштейна* * $B_n(x)$ будет удовлетворять условию равномерного приближения (12). Полином $B_n(x)$ определяется равенством

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{13}$$

Пример. Найти многочлен $B_2(x)$ для функции $y = \sin \pi x$ в промежутке $[0, 1]$. По формуле (13) получаем

$$B_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \sin \frac{k\pi}{2} C_2^k x^k (1-x)^{2-k} = 2x(1-x).$$

---

* Сергей Натанович Бернштейн (1880—1968) — советский математик.

Глава VIII

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 23. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ОБЩИЕ СПОСОБЫ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

141. Понятия первообразной функции и неопределенного интеграла. Пусть в промежутке (a, b) дана функция $f(x)$. Спрашивается, не является ли данная функция производной некоторой функции $\varphi(x)$ в этом промежутке. Иначе говоря, требуется выяснить, существует ли такая функция $\varphi(x)$, чтобы для всех значений x из промежутка (a, b) имело место тождество,

$$\varphi'(x) = f(x). \tag{1}$$

и если такая функция существует, то ее надо найти.

Пример 1. Функция $f(x) = 2x$ является, очевидно, производной для функций $\varphi_1 = x^2$ и $\varphi_2 = x^2 + 1$.

Пример 2. Можно доказать, что функция Дирихле (см. п. 7) не является производной ни для какой функции.

Определение 1. *Первообразной функцией для данной функции* $f(x)$ (или, короче, первообразной данной функции) *в промежутке* (a, b) *называется функция* $\varphi(x)$, *производная которой равна данной функции*, т. е. имеет место тождество (1) относительно x в промежутке (a, b).

В п. 155 будет доказано, что непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную в соответствующем промежутке.

Действие нахождения первообразной данной функции называется ее *интегрированием*. Эта операция обратна дифференцированию функции.

Пример 3. В результате интегрирования функции $f(x) = 3x^2$ получится ее первообразная $\varphi(x) = x^3$. В результате дифференцирования функции $\varphi(x) = x^3$ имеем $\varphi'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Пример 4. Если точка движется прямолинейно со скоростью $v = v_0 + gt$, то величина пути, пройденного точкой за время t, есть первообразная для $v(t)$ и равна $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$, потому что $s'(t) = v(t)$.

Пример 5. Если в некотором явлении величина $y(x)$ изменяется со скоростью $v(x)$ так, что $y'(x) = v(x)$, то $y(x)$ есть первообразная для $v(x)$.

Теорема 1. *Если $\varphi(x)$ есть первообразная для $f(x)$ в промежутке (a, b), то сумма $\varphi(x)$ и произвольной постоянной c*

$$\Phi(x) = \varphi(x) + c \tag{2}$$

тоже является первообразной $f(x)$ в (a, b).

Действительно, по условию выполнено тождество (1). Дифференцируя (2), получим $\Phi'(x) = [\varphi(x) + c]' = \varphi'(x) = f(x)$.

Следовательно, функция, имеющая одну первообразную, имеет их бесчисленное множество.

Теорема 2. *У функции $f(x)$, имеющей первообразную $\varphi(x)$, нет иных первообразных, кроме тех, которые содержатся в формуле (2).*

Действительно, пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — первообразные $f(x)$, поэтому $\varphi'(x) = \psi'(x) = f(x)$. В силу следствия из теоремы Лагранжа (см. п. 34) имеем $\psi(x) = \varphi(x) + c_1$ в (a, b). Следовательно, первообразная $\psi(x)$ может быть получена по формуле (2) при $c = c_1$.

Из теорем 1 и 2 следует, что функция $\Phi(x)$, определяемая формулой (2), представляет самое общее выражение первообразной для $f(x)$.

Определение 2. *Неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ называется самое общее выражение для первообразной этой функции.* Он обозначается символом $\int f(x)\,dx$, причем функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ — подынтегральным выражением, x — переменной интегрирования. Таким образом, имеем

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + c, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ — любая из первообразных $f(x)$, а c — произвольная постоянная.

Из определений 1 и 2 следует тождество

$$\left\{\int f(x)\,dx\right\}' = f(x), \tag{4}$$

т. е. *производная от неопределенного интеграла по переменной интегрирования равна подынтегральной функции.* Поэтому дифференциал от интеграла равен подынтегральному выражению.

Вышеизложенное позволяет сформулировать следующие два правила. 1. Для получения неопределенного интеграла от данной функции $f(x)$ надо найти какую-либо первообразную этой функции и прибавить к ней произвольную постоянную.

2. Признаком правильности результата интегрирования является выполнение условия — производная от результата интегрирования должна быть равна подынтегральной функции.

Пример 6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$, потому что $(-\cos x + c)' = \sin x$.

Свойства неопределенного интеграла

1°. *Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:*

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx. \tag{5}$$

2°. *Интеграл от алгебраической суммы двух (или нескольких) функций равен сумме соответствующих интегралов от слагаемых, если эти интегралы существуют:*

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) проверяются путем дифференцирования их правых частей. Например, производная от правой части равенства (5)

$$\left[c\int f(x)\,dx\right]' = c\left[\int f(x)\,dx\right]' = cf(x)$$

равна подынтегральной функции из левой части формулы (5); следовательно, формула (5) верна.

Заметим, что равенства (5) и (6) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

142. Таблица основных интегралов. Таблица содержит двенадцать формул, которые можно проверить путем дифференцирования согласно правилу п. 141:

1. $\int dx = x + c$;
2. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$ $(m \neq -1)$;
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$;
4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$;
4а) $\int e^x\,dx = e^x + c$;
5. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$;
6. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$;
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$;
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$;
9. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$;
10. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$;
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right| + c$.

Проверим, например, формулу 3. Если $x > 0$, то $|x| = x$ и $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$ и $(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$. Поэтому формула 3 верна как при $x > 0$, так и при $x < 0$.

Лемма. *Пусть в промежутке* (a, b) *имеет место тождество*

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + c,$$

и $u(x)$ *— любая дифференцируемая в* (α, β) *функция* x, *изменяющаяся в* (a, b). *Тогда имеет место тождество*

$$\int f(u(x))\,du(x) = \int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \varphi(u(x)) + c. \qquad (7)$$

Действительно, дифференцируя правую часть (7) по x, получим $[\varphi(u(x)) + c]' = \varphi'_u \cdot u'_x = f(u)\,u'_x$ — подынтегральную функцию из левой части (7), так как $du(x) = u'(x)\,dx$.

Следовательно, *каждая из двенадцати формул таблицы останется верной, если в ней заменить* x *любой дифференцируемой функцией* $u(x)$ *с соответствующей областью изменения.*

В частности, обобщением формулы 2 является формула 2^0:

$$\int [u(x)]^m\,du(x) = \frac{1}{m+1}[u(x)]^{m+1} + c \text{ при } m \neq -1.$$

Если требуется вычислить данный неопределенный интеграл, то надо прежде всего установить, не является ли он табличным или не приводится ли он к табличному. Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 1. $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \sin^3 x\,d\sin x = \frac{1}{4}\sin^4 x + c.$

Этот результат получен по формуле 2^0 при $u(x) = \sin x$.

Пример 2. $\int \frac{1}{x}\sqrt[5]{\ln x}\,dx = \int (\ln x)^{1/5}\,d\ln x = \frac{5}{6}\ln x \sqrt[5]{\ln x} + c.$

Пример 3. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c.$

Результат получен по обобщенной формуле 3 при $u = \cos x$.

Пример 4. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + c.$

Пример 5. $\int 2xe^{-x^2}dx = -\int e^{-x^2}d(-x^2) = -e^{-x^2} + c.$

При вычислении неопределенных интегралов иногда целесообразно пользоваться свойствами неопределенного интеграла (см. п. 141). Они позволяют вынести постоянный множитель подынтегральной функции за знак интеграла или представить интеграл

в виде суммы соответствующих интегралов, предварительно разложив подынтегральную функцию на слагаемые.

Пример 6. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx =$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c.$$

Пример 7. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$

Пример 8. $\int \sin 5x \cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\,dx =$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} - \frac{\cos 2x}{4} + c.$$

Пример 9. $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2\,dx = \int (x - 2x^{5/6} + x^{2/3})\,dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{12}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + c.$$

143. Способ подстановки. Способ подстановки, или способ замены переменной, есть один из сильнейших приемов интегрирования функций. Он основан на следующей теореме.

Теорема. *Если функция* $x = \varphi(t)$ *монотонна и непрерывно дифференцируема в промежутке* $\alpha < t < \beta$, *причем* $a < \varphi(t) < b$, *и функция* $f(x)$ *непрерывна в промежутке* $a < x < b$, *то имеет место формула*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt, \tag{8}$$

в правой части которой под t *следует понимать функцию* $t = t(x)$, *определяемую равенством* $x = \varphi(t)$.

Формула (8) называется *формулой замены переменной в неопределенном интеграле*, а $x = \varphi(t)$ называется *подстановкой*.

Для доказательства теоремы убеждаемся в равенстве производных по переменной x от обеих частей равенства (8). Согласно равенству (4) имеем

$$\left[\int f(x)\,dx\right]'_x = f(x),$$

$$\left[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right]'_x = [\ldots]'_t \cdot t'_x = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\cdot t'_x = f(x),$$

так как $\varphi'_t \cdot t'_x = 1$ (см. п. 29). Производные получились равными. Поэтому, в силу следствия из теоремы Лагранжа (см. п. 34), обе части равенства (8) могут отличаться лишь постоянным слагаемым. Именно в этом смысле надо понимать равенство (8). Заметим, что в этом рассуждении условия теоремы использовались следующим образом: непрерывность $f(x)$, $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ обеспечивает существование интегралов, монотонность непрерывной $x = \varphi(t)$ обеспечивает существование обратной функции $t(x)$ (см. п. 25). Теорема доказана.

Пример 1. $J=\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Полагаем $x=a\sin t$. Тогда $dx=a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t$. По формуле (8) имеем

$$J=a^2\int \cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c.$$

Желая возвратиться к переменной x, находим из подстановки, что $t=\arcsin\frac{x}{a}$. Имеем $\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}$ и окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+c.$$

Примечания к способу подстановки. 1. Иногда вместо подстановки $x=\varphi(t)$ лучше выполнить замену переменной вида $t=\psi(x)$. 2. Вопрос о выборе подстановки решается на основе следующего положения: целесообразна та подстановка, которая приводит к интегралу более простому в вычислительном отношении, чем исходный интеграл.

Пример 2. $\int \sin^3 x\,dx=-\int(1-\cos^2 x)\,d\cos x=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c.$

Фактически мы здесь пользуемся подстановкой $t=\cos x$, хотя результат получен прямо по табличной формуле 2^0.

Пример 3. $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c.$

Последний пример допускает следующее полезное обобщение.

Пример 4. $\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln|f(x)|+c.$

В правильности формулы можно убедиться путем замены переменной $t=f(x)$. Остальное получается по табличной формуле 3.

144. Способ интегрирования по частям. В основе этого способа лежит тождество относительно x

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du, \tag{9}$$

которое имеет место при любых непрерывно дифференцируемых функциях $u(x)$, $v(x)$.

Действительно, из тождества $d(uv)=u\,dv+v\,du$ (см. п. 49) следует, что $udv=d(uv)-vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получим равенство $\int udv=\int d(uv)-\int vdu$ и формулу (9), если принять во внимание, что $\int d(uv)=\int(uv)'\,dx=uv+c$.

Пример 1. $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv}=\int \underbrace{x}_{u}\,d\underbrace{\sin x}_{v}=x\sin x-\int\sin x\,dx=$

$$=x\sin x+\cos x+c.$$

Пример 2. $\int \underbrace{\ln x}_{u}\,d\underbrace{x}_{v}=x\ln x-\int x\frac{dx}{x}=x(\ln x-1)+c.$

Применение способа интегрирования по частям целесообразно в том случае, когда в правой части (9) интеграл окажется более простым в вычислительном отношении, чем исходный интеграл. Этот способ интегрирования можно рекомендовать, например, для вычисления интегралов вида

$$\int P_n(x)\ln x\,dx,\quad \int P_n(x)\,e^{ax}\,dx,\quad \int P_n(x)\sin x\,dx,$$

где $P_n(x)$ — полином степени n от x. Здесь во всех случаях, кроме первого, надо принять $u = P_n(x)$.

Иногда полезно повторное интегрирование по частям.

Пример 3. $$\int \underbrace{(x^2+3x+2)}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = (x^2+3x+2)\,e^x - $$

$$-\int \underbrace{(2x+3)}_{u_1}\underbrace{e^x}_{v_1}\,dx = (x^2+x+1)\,e^x + c.$$

Нетрудно обобщить полученный в примере 22 результат и увидеть, что интеграл от произведения многочлена $P_n(x)$ степени n на e^{ax} равен произведению того же вида $\int P_n(x)\,e^{ax}dx = Q(x)\,e^{ax} + c$, где $Q(x)$ — многочлен степени n, возможно, не совпадающий с $P_n(x)$. К этому результату можно прийти путем повторного применения формулы интегрирования по частям.

145. Способ неопределенных коэффициентов. Этот способ интегрирования может быть рекомендован, когда известна форма ответа и остается найти лишь значения параметров этой формы. Тогда искомые величины могут быть найдены путем дифференцирования и решения системы алгебраических уравнений первой степени.

Покажем, как применяется этот метод на примере 3 п. 144. Напишем ответ с неопределенными коэффициентами a, b и c

$$\int (x^2+3x+2)\,e^x\,dx = (ax^2+bx+c)\,e^x + C.$$

Дифференцируя обе части по x, получим после умножения на e^{-x} следующее тождество: $x^2 + 3x + 2 = ax^2 + (2a + b)\,x + b + c$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе уравнений: $a = 1$, $2a + b = 3$, $b + c = 2$, из которой следует, что $a = b = c = 1$. Остается подставить найденные значения коэффициентов в исходное равенство.

§ 24. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Выше рассмотрены общие способы интегрирования функций, причем не было указано, какой из методов предпочтительнее другого при вычислении данного интеграла. Теперь мы приступим

к систематическому рассмотрению способов интегрирования некоторых классов элементарных функций.

146. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование целой рациональной функции $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ выполняется путем разбиения интеграла на слагаемые; в результате интегрирования $f(x)$ получится многочлен степени $n + 1$.

Дробная рациональная функция есть отношение многочленов

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \qquad (1)$$

$g(x)$ — степени m и $f(x)$ — степени n. Рациональная дробь называется правильной, если $m < n$, и неправильной, если $m \geqslant n$ (см. п. 57).

А. Интегрирование неправильных дробей. В случае $m \geqslant n$ из рациональной дроби можно (согласно теореме 1 п. 57) выделить целую рациональную часть и представить исходную дробь в виде суммы целой рациональной функции $P(x)$ и правильной рациональной дроби:

$$R(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = P(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}. \qquad (2)$$

Следовательно, интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию целой рациональной функции и правильной рациональной дроби:

$$\int R(x)\,dx = \int P(x)\,dx + \int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx. \qquad (3)$$

В свою очередь интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию простейших дробей, потому что в силу теоремы 3 п. 57 всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей.

Пример 1. Вычислить $\int \frac{x^5}{x^2+1}\,dx$. Путем деления числителя x^5 на знаменатель $x^2 + 1$ получим

$$\frac{x^5}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}.$$

Интегрируя эту сумму, находим

$$\int \frac{x^5}{x^2+1}\,dx = \int \left(x^3 - x + \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c.$$

Пример 2. $J = \int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx$. Разложим подынтегральную функцию на простейшие, получим $\frac{x^2-1}{x^3+x} = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}$. Путем интегрирования суммы получим окончательно

$$J = \int \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) dx = \ln(x^2+1) - \ln x + c = \ln\left(x + \frac{1}{x}\right) + c.$$

Б. Интегрирование простых дробей. Рассмотрим способы интегрирования вещественных простых дробей (см. п. 57). Возможны четыре случая.

1. $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+c.$ (4)

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}+c,\ k>1.$ (5)

3. $J=\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ при $\beta^2 = q-p^2/_4 > 0$. Подстановка $z=\frac{1}{2}(x^2+px+q)'$, т. е. $z=x+\frac{p}{2}$, дает

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=z^2+\beta^2,$$

$$Ax+B=Az+D,\ \text{где}\ D=B-\frac{1}{2}Ap.$$

Поэтому

$$J=\int \frac{Az+D}{z^2+\beta^2}\,dz=\frac{A}{2}\ln(z^2+\beta^2)+\frac{D}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{z}{\beta}+c, \qquad (6)$$

где $z=x+\frac{p}{2}$.

Пример 3. $\int \frac{dx}{x^2-10x+29}=\int \frac{d(x-5)}{(x-5)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-5}{2}+c.$

Пример 4. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+6x}=\int \frac{(x+3)-2}{(x+3)^2-9}\,dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+6x)-$

$$-\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x+6}+c.$$

4. С помощью той же подстановки $z=x+\frac{p}{2}$ при $m>1$ и $\frac{p^2}{4}<q$ получим

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m}\,dx=\int \frac{Az+D}{(z^2+\beta^2)^m}\,dz=A\int \frac{z\,dz}{(z^2+\beta^2)^m}+$$

$$+D\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m}.$$

Первое слагаемое правой части легко вычислить, положив $z^2+\beta^2=t$. Второе слагаемое правой части интегрируем по частям, предварительно его преобразовав:

$$J_m\equiv\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^m}=\frac{1}{\beta^2}\int \frac{(z^2+\beta^2)-z^2}{(z^2+\beta^2)^m}\,dz=\frac{1}{\beta^2}J_{m-1}-$$

$$-\frac{1}{2\beta^2}\int z\,\frac{dz^2}{(z^2+\beta^2)^m}=\frac{1}{\beta^2}J_{m-1}-\frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{z}{(1-m)(z^2+\beta^2)^{m-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{J_{m-1}}{1-m}\right].$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение

$$J_m = \frac{z}{2\beta^2 (m-1)(z^2+\beta^2)^{m-1}} + \frac{1}{2\beta^2} \cdot \frac{2m-3}{m-1} J_{m-1}, \qquad (7)$$

которое позволяет последовательно вычислить J_m для любого m. При $m = 1$ имеем $J_1 = \int \frac{dz}{z^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{z}{\beta} + c$.

Заключение. Интегралы от простых дробей есть функции элементарные (составленные из логарифмов, арктангенсов и рациональных функций).

В. Интегрирование правильных дробей. Для вычисления интеграла от правильной рациональной дроби надо эту дробь разложить на простейшие согласно теореме 3 п. 57 и найти интеграл от полученной суммы простых дробей.

Следовательно, интеграл от любой правильной рациональной дроби есть функция элементарная, потому что представляет сумму элементарных функций, которые получаются в результате интегрирования простых дробей.

Пример 5. $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + c.$$

Условимся в следующем — будем называть функцию *интегрируемой в элементарных функциях*, если ее первообразная есть функция элементарная. Выше установлено, что всякая рациональная функция имеет первообразную в классе элементарных функций. Этот важный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Всякая рациональная функция интегрируема в элементарных функциях.*

Примечание. Всякая элементарная функция, как известно, непрерывна там, где она определена. Поэтому она имеет первообразную. Но не всегда эта первообразная принадлежит классу элементарных функций. Например, интегралы от элементарных функций

$$\int \sin x^2 \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

существуют в соответствующих областях, но не являются элементарными функциями. Они могут быть вычислены, например, с помощью рядов. Итак, интегрирование элементарной функции может привести к неэлементарной функции. Заметим, что операция дифференцирования элементарной функции не выводит из класса элементарных функций.

147. Интегрирование некоторых иррациональных функций. Введем обозначение рациональной функции нескольких переменных, т. е. функции, над аргументами которой выполняются только операции сложения, вычитания, умножения и деления: $R(x, y, \ldots, z)$.

I. Интеграл вида $J_{\text{I}} = \int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_k}{q_k}}\right) dx$, где p_k и q_k — целые числа (они могут быть и отрицательными), с помощью подстановки $x = t^m$, где m — наименьшее кратное чисел $|q_1|, \ldots,$ $|q_n|$, приводится к интегралу от рациональной функции относительно t.

Действительно, $dx = mt^{m-1}dt$, $x^{\frac{p_k}{q_k}} = t^{\frac{m}{q_k}p_k} = t^{s_k}$, где s_k — целое число, потому что отношение $\frac{m}{q_k}$ и p_k — целые числа. В результате указанной замены переменной получим

$$J_{\text{I}} = \int R(t^m, t^{s_1}, \ldots, t^{s_k}) mt^{m-1} dt = \int R_1(t)\, dt.$$

Здесь подынтегральная функция рациональна относительно t и поэтому интегрируема в элементарных функциях. Переход от t к x по формуле $t = \sqrt[m]{x}$ сохранит элементарный характер результата.

Пример 1. $J = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$. Положим $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, получим

$$J = \int \frac{6t^5\, dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 6t - 6\operatorname{arctg} t + c, \text{ где } t = \sqrt[6]{x}.$$

II. Интеграл вида $J_{\text{II}} = \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+px+q}}\, dx$, где $a = 1$ или $a = -1$, вычисляется с помощью подстановки $z = ax + \frac{p}{2}$. В случае $a = 1$ положим $z = x + \frac{p}{2}$. Получим (см. п. 146)

$$J_{\text{II}} = \int \frac{mz+n_1}{\sqrt{z^2+b^2}}\, dz = m\int \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2+b^2}} + n_1 \int \frac{dz}{\sqrt{z^2+b}} =$$

$$= m\sqrt{z^2+b^2} + n_1 \ln\left[z + \sqrt{z^2+b^2}\right] + c.$$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin(x-1) + c.$$

III. Интеграл вида $J_{\text{III}} = \int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\, dx$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, можно вычислить способом неопределенных коэффициентов. Представим ответ в форме

$$J_{\text{III}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n-1$. Неопределенными являются n коэффициентов Q_{n-1} и λ. Интеграл J_{III} может быть представлен в указанной форме, потому что в результате дифференцирования и сравнения коэффициентов получается система, имеющая единственное решение относительно указанных коэффициентов. Покажем это на примере.

Пример 3. $$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Дифференцируя это равенство, получим

$$\sqrt{x^2+1} = a\sqrt{x^2+1} + \frac{(ax+b)x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Умножив на $\sqrt{x^2+1}$, придем к тождеству

$$x^2+1 = a(x^2+1) + ax^2 + bx + \lambda,$$

из которого следует, что $a = \lambda = \frac{1}{2}$, $b = 0$. При этих значениях параметров имеем окончательный результат

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + c.$$

148. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений.

IV. Рассмотрим интеграл вида $J_{IV} = \int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где $R(u, v)$ есть рациональная функция своих аргументов $u = \sin x$ и $v = \cos x$.

Теорема 1. *В результате замены переменной* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *в* J_{IV} *получится интеграл от рациональной функции относительно* t.

Доказательство. Функции $\sin x$ и $\cos x$ являются рациональными функциями $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, а тем самым и t. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Из подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ следует, что $x = 2\operatorname{arctg} t$ и $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. В результате указанной замены переменной получим

$$J_{IV} = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{2+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_2(t)\,dt,$$

где $R_2(t)$ — рациональная функция t. Теорема доказана.

Следовательно, интеграл вида J_{IV} есть функция элементарная.

Пример 1. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c.$

Пример 2. $\int \frac{dx}{\cos x} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+c.$

Применение универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ часто связано с громоздкими вычислениями. В некоторых случаях интеграл может быть вычислен проще — как указано в теоремах 2, 3 и 4.

Теорема 2. *Если подынтегральная функция в* J_{IV} *нечетна относительно* $\cos x$, *т. е.* $R(u, -v) = -R(u, v)$, *то подстановка* $t = \sin x$ *приводит* J_{IV} *к интегралу от рациональной функции относительно* t.

Доказательство. По условию функция $\frac{1}{v}R(u, v)$ четна относительно v и поэтому содержит $v = \cos x$ лишь в четных степенях. Имеем $v^2 = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Поэтому

$$J_{IV} = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x\,dx = \int R_3(\sin x)\,d\sin x = \int R_3(t)\,dt,$$

где $R_3(t)$ — рациональная функция t. Теорема доказана.

Пример 3. $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$

Теорема 3. *Если выполнено условие* $R(-u, v) = -R(u, v)$, *т. е. если подынтегральная функция в* J_{IV} *нечетна относительно* $\sin x$, *то подстановка* $t = \cos x$ *приводит* J_{IV} *к интегралу от рациональной функции относительно* t.

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 2.

Пример 4. $\int \sin^5 x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^2\,d\cos x = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$

Теорема 4. *Если функция* $R(\sin x, \cos x)$ *четна относительно совокупности переменных* $\sin x$, $\cos x$, *т. е.* $R(-u, -v) = R(u, v)$, *то подстановка* $t = \operatorname{tg} x$ *приводит* J_{IV} *к интегралу от рациональной функции относительно* t.

Поскольку $\sin x = \cos x \operatorname{tg} x$, то подынтегральная функция рациональна относительно $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ и поэтому согласно условию содержит $\cos x$ лишь в четных степенях. Следовательно, эта функция является рациональной функцией только $\operatorname{tg} x$ (так как $\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$) т. е. $R(\sin x, \cos x) = R_4(\operatorname{tg} x)$. Поэтому имеем

$$J_{IV} = \int R_4(\operatorname{tg} x)\, dx = \int R_4(t)\, \frac{dt}{1+t^2} = \int R_5(t)\, dt.$$

Пример 5. $J = \int \sin 2x\, dx = \int 2 \sin x \cos x\, dx =$

$$= 2\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{1+t^2} + c = -\cos^2 x + c.$$

Примечание. Интеграл J можно вычислить несколькими другими путями:

$$J = 2\int \sin x d \sin x = \sin^2 x + c,$$

$$J = -2\int \cos x d \cos x = -\cos^2 x + c,$$

$$J = \frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + c.$$

Интеграл от одной и той же функции допускает различные представления, но они отличаются лишь постоянными слагаемыми.

V. Интеграл вида $J_V = \int \sin^p x \cos^q x\, dx$, где p и q — целые числа, есть частный случай интеграла вида J_{IV}. Поэтому к нему относятся все четыре теоремы об интегралах вида J_{IV}, и мы приходим к следующему заключению. Рекомендуется подстановка: $t = \sin x$, если q — нечетное число, $t = \cos x$, если p — нечетное число, $t = \operatorname{tg} x$, если $p + q$ — четное число.

VI. Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ при любых a и b приводятся к алгебраической сумме табличных интегралов путем представления произведения тригонометрических функций соответствующей суммой по известным формулам тригонометрии (см. пример 8 п. 142).

149. Интегрирование некоторых трансцендентных функций. Вспомним, что трансцендентной называется всякая неалгебраическая функция (см. п. 9).

VII. Интеграл вида $J_{VII} = \int R(a^x)\, dx$, где R — знак рациональной функции, вычисляется путем замены переменной $a^x = t$, которая приводит к интегралу от рациональной функции относительно t: $J_{VII} = \frac{1}{\ln a}\int R(t)\, \frac{1}{t}\, dt$.

Пример 6. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \operatorname{arctg} e^x + c.$

VIII. Интеграл вида $J_{\text{VIII}} = \int P(\ln x)\,dx$, где P — знак многочлена относительно своего аргумента, вычисляется путем замены переменной $\ln x = t$. При этом получим интеграл, рассмотренный в п. 144.

150. Задачи, приводящие к понятию неопределенного интеграла.

1. Задача о радиоактивном распаде. Дадим математическое описание процесса распада радиоактивного вещества. Обозначим через $x(t)$ количество этого вещества, еще не распавшегося к моменту времени t, через x_0 — начальное его количество, отнесенное к моменту времени $t_0 = 0$. За промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ количество распавшегося вещества определяется приближенно формулой

$$x(t) - x(t + \Delta t) \approx \beta x(t)\,\Delta t$$

или $\Delta x = -\beta x(t)\,\Delta t$, где β — некоторая положительная постоянная. После деления на Δt и перехода к пределу при стремлении Δt к нулю получим соотношение

$$x' = -\beta x, \tag{8}$$

которому удовлетворяет искомая величина $x(t)$. Уравнение (8) представляет пример дифференциального уравнения первого порядка. Из (8) следует тождество $\frac{dx(t)}{x(t)} = -\beta\,dt$, интегрируя обе части которого по t, получим $\ln x(t) = \ln c - \beta t$. Отсюда следует, что

$$x(t) = ce^{-\beta t}. \tag{9}$$

Функция (9) удовлетворяет уравнению (8) при любом значении постоянной c; она представляет общее решение уравнения (8).

Из условия $x = x_0$ при $t = 0$ найдем с помощью (9), что $c = x_0$. Следовательно, окончательное решение задачи дается формулой

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}.$$

Периодом полураспада радиоактивного вещества называется время T, за которое его количество уменьшится вдвое. Поэтому имеем $\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-\beta T}$. Отсюда следует, что $T = \frac{1}{\beta}\ln 2$.

2. Химические реакции первого порядка. Основным законом химической кинетики является *закон действующих масс*, заключающийся в том, что скорость, с которой вещество вступает в реакцию, пропорциональна концентрации этого вещества (т. е. числу грамм-молекул этого вещества в единице объема).

Согласно закону для мономолекулярных реакций или так называемых химических реакций первого порядка имеет место уравнение

$$x' = k(a - x), \tag{10}$$

где a — количество вещества α, имевшееся к началу реакции; $x(t)$ — количество вещества α, вступившее в реакцию к моменту времени t, отсчитываемому от начала реакции.

Вывод уравнения (10). Для рассматриваемых реакций можно принять приближенно, что количество вещества Δx, вступившее в реакцию в промежуток времени $(t, t + \Delta t)$, при малом Δt пропорционально Δt и величине $a - x$, т. е. количеству вещества, которое к моменту времени не вступило в реакцию: $\Delta x = k(a - x)\Delta t$. Разделим это равенство на Δt и, перейдя к пределу при стремлении Δt к нулю, получим дифференциальное уравнение (10).

Интегрируем уравнение (10) при начальном условии $x = 0$ при $t = 0$. Для этого разделим обе части (10) на $a - x$ и умножим на dt, получим равенство $\frac{dx}{a-x} = k\,dt$, интегрируя которое приходим к соотношению $-\ln(a - x) = kt - \ln c$. Отсюда следует, что $x(t) = a - ce^{-kt}$.

При $t = 0$ имеем $a - c = 0$, поэтому $c = a$ и

$$x(t) = a(1 - e^{-kt}).$$

3. Химические реакции второго порядка. Для бимолекулярной реакции или так называемой химической реакции второго порядка согласно закону действующих масс имеет место соотношение

$$x' = k(a - x)(b - x). \tag{11}$$

В этом случае в растворе имеются два вещества α и β, количества которых к началу реакции (т. е. к моменту времени $t = 0$), выраженные в грамм-молекулах, соответственно равны a и b. Предполагается, что к моменту времени t в реакцию вступают равные количества обоих веществ, которые обозначим $x(t)$; количества оставшихся веществ будут $a - x$ и $b - x$ соответственно. Согласно закону действующих масс скорость течения реакции пропорциональна произведению этих оставшихся количеств, т. е. $x(t)$ удовлетворяет уравнению (11).

Находим решение уравнения (11) при условии $x = 0$ при $t = 0$. Для этого разделим (11) на $(a - x)(b - x)$, умножим на dt и, интегрируя, получим

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k\int dt.$$

Если $a = b$, то имеем $\frac{1}{a-x} = kt + c$. Здесь $c = \frac{1}{a}$ и поэтому $x(t) = a - \frac{a}{1+akt}$.

Если $a \neq b$, то разлагаем подынтегральную функцию на простейшие и, выполнив операцию интегрирования, получим

$$\frac{1}{b-a} \ln \frac{b-x}{a-x} = kt + c.$$

Следовательно, $\frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a} e^{(b-a)kt}$.

4. Задача о количестве соли в растворе. В сосуде емкостью a литров находится b кг соли, которая полностью растворена, и раствор тщательно перемешан. Каждую минуту в раствор поступает c литров растворителя и удаляется c литров раствора (при этом раствор все время перемешивается так, что концентрация соли во всем сосуде одинакова). Требуется найти закон изменения количества соли $x(t)$ в растворе.

Решение. В промежуток времени $(t, t + dt)$ из сосуда будет удалено cdt литров раствора; это количество раствора заменяется растворителем. Найдем количество соли, которое при этом будет удалено из сосуда. Концентрация соли в растворе в момент времени t равна $\frac{x}{a}$ кг/л. Следовательно, в объеме cdt содержится количество соли, равное $dx = -\frac{x}{a} cdt$ кг. Знак минус указывает на убывание соли в растворе. Таким образом, мы пришли к уравнению

$$x' = -\frac{c}{a} x. \tag{12}$$

Требуется найти его решение при условии $x = b$ при $t = 0$.

Из (12) последовательно выводим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{c}{a} dt, \quad \ln x = -\frac{ct}{a} + c_1.$$

Здесь $c_1 = \ln b$ в силу начального условия. Поэтому имеем окончательно

$$x(t) = be^{-\frac{c}{a} t}.$$

Глава IX

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Здесь речь идет о важнейшем понятии математики; о мощном методе решения многих задач естествознания, а также о способе представления многих величин, встречающихся в физике, химии, математике и других науках.

§ 25. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

151. Задачи, приводящие к определенному интегралу. К понятию определенного интеграла приводят многие задачи. Вот некоторые из них.

1. Задача о массе прямолинейного стержня. Рассмотрим очень тонкий стержень длиной l, масса которого распределена неравномерно с плотностью $\rho(x)$. Требуется найти массу всего стержня.

Уточним постановку вопроса. Под очень тонким стержнем мы будем понимать отрезок прямой, ограниченный точками a и b данной числовой оси. Слово «масса» здесь понимается в смысле количества вещества. Под плотностью вещества стержня в данной точке понимается предел средней плотности $\rho_{ср} = \frac{\Delta m}{\Delta x}$, где Δm — масса отрезка $[x, x + \Delta x]$, при стремлении Δx к нулю.

Решение задачи. (Следует обратить особое внимание на метод решения задачи.) 1) Разобьем весь стержень по длине на n равных или неравных частей точками деления $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ при условии $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ и положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей будем впредь обозначать λ_n.

2) Желая найти хотя бы приближенно массу стержня, предположим, что в границах каждого элемента плотность стержня посто-

янна и равна (далее рассуждение ведется для k-го элемента, где $k = 1, 2, \ldots, n$) $\rho(\xi_k)$, где ξ_k — одна из точек промежутка $[x_{k-1}, x_n]$, безразлично какая. При этом условии масса k-го элемента будет приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(\xi_k)\,\Delta x_k$.

3) Масса всего стержня приближенно равна сумме

$$m \approx \rho(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + \rho(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем больше число элементов n и чем меньше длина каждого элемента Δx_k; оба эти условия, налагаемые на n и на Δx_k, можно заменить одним условием — чем меньше λ_n.

4) В пределе при стремлении λ_n к нулю это приближенное равенство делается точным, так что

$$m = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b \rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Пределы такого рода весьма часто встречаются в математике и ее приложениях, они называются *определенными интегралами* и обозначаются так, как указано в правой части равенства (1).

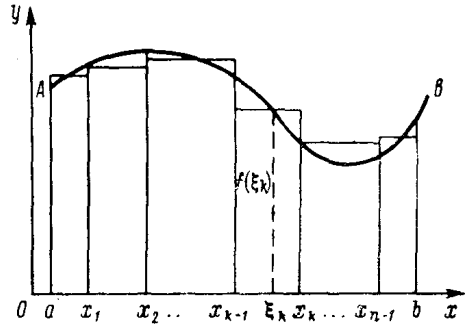

Рис. 97.

Примечание. Если под $\rho(x)$ понимать плотность распределения электрических зарядов в промежутке $[a, b]$, то величина суммарного заряда получится равной опять интегралу (1). В этом можно убедиться, если решить новую задачу тем же методом.

2. Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и положительна в промежутке $[a, b]$. Рассмотрим плоскую фигуру A, ограниченную графиком функции $y = f(x)$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 97). Такие фигуры называются *криволинейными трапециями.* Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции A и вместе с тем уточнить смысл самого понятия площади фигуры A.

Решение задачи. Разобьем промежуток $[a, b]$ на n произвольных частей $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, b]$, длины которых обозначим соответственно через Δx_1, Δx_2, . . ., Δx_n, а наибольшую из них обозначим символом λ_n. Через каждую точку деления проведем прямую, параллельную оси ординат. Эти прямые разделят область A на n элементарных частей.

Заменим каждую элементарную полоску прямоугольником, основание которого то же, что и у полоски, а высота совпадает с одной из ординат полоски. Площадь k-го прямоугольника будет равна $f(\xi_k)\,\Delta x_k$, где ξ_k — число из промежутка $[x_{k-1}, x_k]$,

безразлично какое. Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь ступенчатой фигуры (см. рис. 97)

$$\sigma_n = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n. \qquad (2)$$

В частности, если в каждом элементарном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ выбрать наименьшую ординату m_k, а затем наибольшую ординату M_k, то можно построить еще две ступенчатые фигуры с площадями, соответственно равными $s_n = m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n$ и $S_n = M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n$. Первая из них содержится в области A, а вторая содержит A, причем

$$s_n \leqslant \sigma_n \leqslant S_n. \qquad (3)$$

Желая сблизить между собою величины s_n и S_n, будем увеличивать число n, уменьшая при этом длины в с е х элементарных промежутков Δx_k. Пользуясь непрерывностью $f(x)$, можно доказать, * что существуют и равны между собой пределы переменных s_n и S_n при $\lambda_n \to 0$ и что они не зависят от способа деления $[a, b]$ на части. Следовательно, переменная σ_n имеет тот же предел: $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} s_n = \lim\limits_{\lambda_n \to 0} S_n = \lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sigma_n$.

Площадь криволинейной трапеции A естественно определить как предел площади σ_n упомянутой ступенчатой фигуры при стремлении λ_n к нулю:

$$F = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx, \qquad (4)$$

что соответствует нашим интуитивным представлениям о площади.

152. Понятие определенного интеграла. Пусть функция $y = f(x)$ определена в замкнутом промежутке $[a, b]$.

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n элементарных частей (не обязательно равных) $[a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, . . ., $[x_{n-1}, b]$, длины которых обозначим соответственно через Δx_1, Δx_2, . . ., Δx_n, а наибольшую из этих длин обозначим через λ_n. Множество элементов $[a, x_1]$, . . ., $[x_{n-1}, b]$ назовем *разбиением* δ_n.

Обозначим через ξ_1, . . ., ξ_n точки, выбранные произвольно, по одной в каждом элементарном промежутке. Составим сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k, \qquad (5)$$

она называется *интегральной суммой (в смысле Римана* **) *функции* $f(x)$, *соответствующей данному разбиению промежутка* $[a, b]$ *и данному выбору точек* ξ.

Последовательность разбиений $\{\delta_n\}$ будем называть *нормальной*, если $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

---

* См.: В. А. Ильин и Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, гл. II, § 2.

** Бернгард Риман (1826—1866) — немецкий математик.

Выбрав произвольную нормальную последовательность разбиений $\{\delta_n\}$ и составив для каждого разбиения δ_n соответствующую интегральную сумму σ_n, получим последовательность сумм $\{\sigma_n\}$. Для данной последовательности разбиений $\{\delta_n\}$ можно получить разные последовательности сумм $\{\sigma_n\}$ в зависимости от того, какие точки ξ выбраны.

Определение. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой в промежутке* $[a, b]$, если для каждой нормальной последовательности разбиений $\{\delta_n\}$ соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел, не зависящий от способа деления промежутка $[a, b]$ на элементы и от выбора точек ξ. Этот общий предел последовательности $\{\sigma_n\}$, соответствующий нормальным последовательностям разбиений, называют *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *по промежутку* $[a, b]$ и обозначают символом

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k. \tag{6}$$

Числа a и b называют *пределами интегрирования*, x — *переменной интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

Ввиду сложности введенных понятий обратим внимание на следующее.

1. В определении речь идет о нормальной последовательности разбиений, когда не только $n \to \infty$, но и наибольшая из длин элементарных промежутков стремится к нулю. При этом не исключено, что разбиению δ_{n+1} соответствуют точки деления $x_1, \ldots, x_n$, не входящие в число точек деления в разбиении δ_n.

2. Определенный предел есть число, именно предел любой из последовательностей интегральных сумм $\{\sigma_n\}$, которая соответствует нормальной последовательности разбиений и какому-либо выбору точек ξ.

3. Не всякая функция интегрируема. Например, не интегрируема в смысле Римана функция Дирихле, равная нулю в иррациональных точках промежутка $[0, 1]$ и единице в его рациональных точках. Действительно, в этом случае при любом разбиении интегральную сумму можно сделать нулем или единицей путем выбора чисел ξ.

Теорема *. *Функция* $f(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a, b]$, *если выполнено любое из следующих условий*:

1) $f(x)$ *непрерывна в замкнутом промежутке* $[a, b]$, *или*

2) $f(x)$ *ограничена и кусочно-непрерывна в* $[a, b]$, *т. е. имеет в этом промежутке лишь конечное число разрывов первого рода, или*

3) $f(x)$ *определена и монотонна в замкнутом промежутке* $[a, b]$.

---

* Доказательство см. в работе Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. I.

4. Интегрируемая в промежутке $[a, b]$ функция необходимо ограничена в нем. Действительно, если функция неограничена в $[a, b]$, то при любом разбиении есть элементарный промежуток, где эта функция неограничена. Тогда можно построить неограниченную последовательность интегральных сумм, что противоречит условию интегрируемости. *

5. Определенный интеграл допускает различное физическое истолкование. Например, это масса прямолинейного стержня.

6. Определенный интеграл допускает различное геометрическое истолкование, одно из которых — площадь криволинейной трапеции.

Следствие (из определения). Определенный интеграл от единичной функции равен длине промежутка интегрирования:

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{7}$$

Действительно, если $f(x) \equiv 1$ в $[a, b]$, то $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$ и предел постоянной равен этой постоянной.

153. Основная формула интегрального исчисления.

Теорема. *Если функция $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ интегрируема и имеет первообразную $\varphi(x)$, то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{8}$$

Формула (8) носит название *формулы Ньютона — Лейбница* и формулируется так: *определенный интеграл в пределах от a до b равен приращению первообразной для подынтегральной функции при переходе от a к b; при этом в качестве первообразной может быть взята любая из множества первообразных.*

Доказательство. Разобьем промежуток $[a, b]$ произвольно на n элементарных частей $a < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b$. Составим приращения функции $\varphi(x)$ в каждом из элементарных промежутков и преобразуем их сначала по формуле Лагранжа (см. п. 34), а затем с помощью формулы $\varphi'(x) = f(x)$:

$$\varphi(x_1) - \varphi(a) = \varphi'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\,\Delta x_1,$$

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\,\Delta x_2,$$

. . . . . .

$$\varphi(b) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\,\Delta x_n.$$

---

* См.: С. Банах. Дифференциальное и интегральное исчисление.

Суммируя эти равенства, получим

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k. \tag{9}$$

Левая часть равенства (9) есть постоянная, не зависящая от способа деления промежутка на части. Его правая часть есть интегральная сумма σ_n для функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ при некотором специальном выборе чисел ξ_k в элементарных промежутках. Именно в качестве ξ_k взято значение c_k из промежутка (x_{k-1}, x_k). По условию функция $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$, поэтому предел интегральной суммы при $\lambda_n \to 0$ существует и не зависит от выбора чисел ξ_k. Поэтому в результате перехода в равенстве (9) к пределу при стремлении λ_n к нулю получим формулу (8)

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\lim_{\lambda_n\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Значение доказанной теоремы состоит не только в том, что она дает удобное правило вычисления определенного интеграла. Кроме того, она устанавливает связь между определенным интегралом и неопределенным интегралом (точнее, первообразной функцией). Остановимся на этом подробнее.

Правило вычисления определенного интеграла, согласно формуле Ньютона — Лейбница, заключается в выполнении следующих действий: 1) найдем первообразную $\varphi(x)$ для подынтегральной функции, 2) вычислим приращение $\varphi(x)$ при переходе от a к b, т. е. выполним так называемую двойную подстановку

$$\varphi(x)\Big|_a^b=\varphi(b)-\varphi(a).$$

Согласно (8) получим

$$\int_a^b f(x)\,dx=\varphi(x)\Big|_a^b=\varphi(b)-\varphi(a).$$

Заметим, что в формуле (8) можно взять любую из первообразных для $f(x)$, потому что двойная подстановка дает результат, который не зависит от c:

$$[\varphi(x)+c]\Big|_a^b=\varphi(b)+c-\varphi(a)-c=\varphi(b)-\varphi(a).$$

Пример 1. $\int_a^b e^x\,dx=e^x\Big|_a^b=e^b-e^a.$

Пример 2. $\int_a^b 2x\,dx=x^2\Big|_a^b=b^2-a^2.$ (10)

Связь между определенным и неопределенным интегралами иллюстрируем геометрически на примере 2. Левая часть формулы (10) равна площади трапеции, заштрихованной на рис. 98. Неопределенный интеграл $x^2 + c$ геометрически представляет семейство парабол $y = x^2 + c$, изображенных на рис. 99 при различных значениях c. Правая часть (10) есть приращение ординаты любой из этих парабол при переходе от a к b. Равенство (10), таким образом, показывает численное равенство двух величин — площади трапеции (см. рис. 98) и приращения ординаты параболы (см. рис. 99).

154. Свойства определенного интеграла. Все свойства доказываются на основании определения понятия определенного интеграла в предположении, что речь идет о функциях, интегрируемых в соответствующих промежутках. *

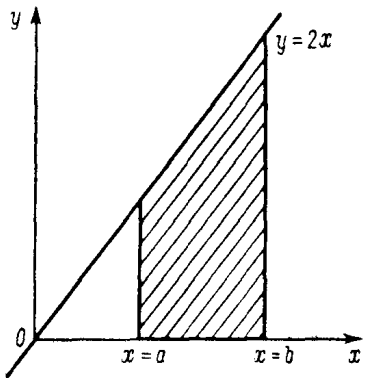

Рис. 98.

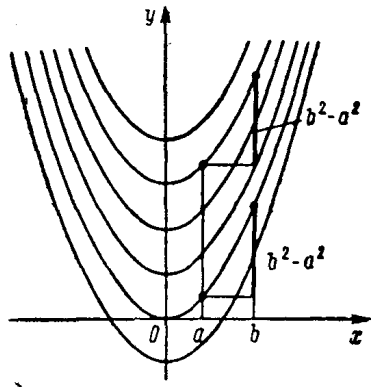

Рис. 99.

1°. *Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю*:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2°. *При перемене пределов интегрирования определенный интеграл меняет лишь знак*:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

В сущности свойства 1° и 2° суть дополнения к определению понятия определенного интеграла, данному в п. 152 для случая $a < b$, т. е. распространение этого понятия на случаи $a = b$ и $a > b$. Важно, что эти дополнения не противоречат определению. Так, в случае $a = b$ все Δx_k (из определения) получатся рав-

* При изучении сокращенного курса высшей математики свойства определенного интеграла можно вывести с помощью формулы (8).

ными нулю. В случае $a > b$ (нумерация точек деления идет попрежнему от a к b) получим $\Delta x_k < 0$ и интегральную сумму, которая будет лишь знаком отличаться от интегральной суммы, соответствующей случаю $a < b$ (при этом под λ_n надо понимать наибольшее из чисел $|\Delta x_1|, \ldots, |\Delta x_n|$). Поэтому и пределы соответствующих интегральных сумм будут отличаться лишь знаком.

3°. *Величина определенного интеграла не зависит от названия (обозначения) переменной интегрирования*, что прямо следует из определения (см. п. 152)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

4°. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла*:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Действительно, постоянный множитель можно вынести за знак предела. Поэтому, перейдя к пределу при $\lambda_n \to 0$ в равенстве $\sum cf_k\Delta x_k = c\sum f_k\Delta x_k$, мы получим доказываемое предложение.

5°. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен соответствующей сумме интегралов от слагаемых*:

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx.$$

Действительно, предел суммы двух переменных (имеющих пределы) равен сумме их пределов. Поэтому, перейдя к пределу при $\lambda_n \to 0$ в сумме $\sum (f_k + g_k)\,\Delta x_k = \sum f_k\,\Delta x_k + \sum g_k\Delta x_k$*, мы получим доказываемое соотношение между интегралами.

6°. *Если промежуток $[a, b]$ разбит точкой c на части, то интеграл по всему промежутку равен сумме интегралов по его частям*:

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx. \tag{11}$$

Доказательство. Согласно интегрируемости $f(x)$ величина определенного интеграла не зависит от способа деления промежутка интегрирования на части. Примем точку c за неизменную точку деления $[a, b]$ в каждой из интегральных сумм σ_n, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda_n \to 0}\left(\sum_a^c f_k\,\Delta x_k + \sum_c^b f_k\,\Delta x_k\right) = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx\,*.$$

* Смысл обозначений ясен сам собой.

Заметим, что формула (11) верна при любом расположении точек a, b, c на числовой оси. Например, в случае $a < b < c$ согласно доказанному имеем $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$. Для получения формулы (11) надо переменить пределы у последнего слагаемого (одновременно переменив его знак) и перенести это слагаемое в другую часть равенства.

7°а. *Интеграл от нечетной функции в симметричных пределах интегрирования равен нулю*:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Действительно, разобьем $[-a, a]$ на симметричные относительно начала элементы и выберем в них числа ξ_k тоже симметрично; тогда сумма

$$f(\xi_k)\,\Delta x_k + f(-\xi_k)\,\Delta x_k \tag{12}$$

будет равна нулю, так как $f(-x) = -f(x)$. Вся интегральная сумма состоит из таких пар, поэтому $\sigma_n = 0$ и $\lim \sigma_n = 0$.

7°б. *Если $f(x)$ четна в промежутке $[-a, a]$*, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Действительно, рассуждая так же, как в случае 7°а, получим в силу четности подынтегральной функции, что сумма (12) равна $2f(\xi_k)\Delta x_k$ и $\sigma_n = 2\sum_0^a f(\xi_k)\,\Delta x_k$. Отсюда прямо следует свойство 7°б.

8°а. *Если $f(x)$ непрерывна и положительна в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, то и интеграл от $f(x)$ в пределах от a до b положителен*:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0. \tag{13}$$

Действительно, согласно теореме Вейерштрасса (см. п. 24), в промежутке $[a, b]$ существует точка x_0, в которой функция $f(x)$ достигает наименьшего значения. Поэтому выполнено неравенство $f(x) \geqslant f(x_0) > 0$ для всех x из $[a, b]$. Отсюда следует, что интегральные суммы для $f(x)$ и $f(x_0)$ удовлетворяют соотношению $\sigma_n \geqslant \sum f(x_0)\,\Delta x_k = f(x_0)\,(b-a) > 0$. Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\lambda_n \to 0$, получим неравенство (13)

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant f(x_0)\,(b-a) > 0.$$

8°. *Если* $a < b$, *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$ *и удовлетворяют соотношению* $f(x) > g(x)$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx, \tag{14}$$

т. е. неравенства можно интегрировать, причем большей функции отвечает больший интеграл. Действительно, функция $\omega = f - g > 0$ в $[a, b]$. Поэтому в силу (13) имеем $\int_a^b \omega dx = \int_a^b f\,dx - \int_a^b g\,dx > 0$. Отсюда следует формула (14).

Можно доказать, что если $a < b$ и непрерывные в $[a, b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют соотношению $f(x) \geqslant g(x)$, то $\int_a^b f\,dx \geqslant \int_a^b g\,dx$.

9°. **Теорема** (об оценке интеграла). *Если* $a < b$, *то абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции*:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{15}$$

Действительно, если интегрировать в промежутке $[a, b]$ неравенство $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, то в силу 8° получим $-\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx$. Отсюда следует неравенство (15).

Пример 1. $\left|\int_{10}^{30} \frac{\cos x\,dx}{1+x^{12}}\right| \leqslant 2 \cdot 10^{-11}$, потому что при $10 \leqslant x \leqslant 30$ имеем $\left|\frac{\cos^2 x}{1+x^{12}}\right| \leqslant \frac{1}{1+10^{12}} < 10^{-12}$.

10°а. **Теорема** (о среднем значении в интегральном исчислении). *Если* $f(x)$ *непрерывна в* $[a, b]$, *то интеграл от* $f(x)$ *в пределах от* a *до* b *равен произведению значения подынтегральной функции в некоторой точке* c *из* $[a, b]$ *на длину промежутка интегрирования*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{16}$$

Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса (см. п. 24), в промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет наименьшее значение p и наибольшее значение q, так что $p \leqslant f(x) \leqslant q$. Интегрируя это

неравенство по x в пределах от a до b, в соответствии со свойством 8° получим (если $a < b$)

$$p(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant q\int_a^b f(x)\,dx$$

и после деления на $b - a$ получим $p \leqslant \mu \leqslant q$, где

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{17}$$

Здесь μ (в силу теоремы Коши п. 24) есть одно из значений функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$; поэтому в $[a, b]$ существует точка c такая, что $\mu = f(c)$. Теперь из (17) непосредственно следует формула (16). Теорема доказана при $a < b$. В случае $a > b$ теорема доказывается аналогично.

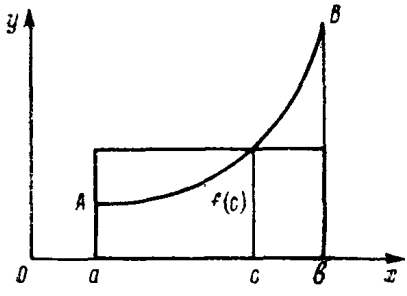

Рис. 100.

Теорема о среднем имеет простое геометрическое истолкование. Если обе части (16) рассматривать как площади (рис. 100), то согласно (16) криволинейная трапеция $ABba$ равновелика прямоугольнику с основанием, равным $b - a$, и высотой, равной $f(c)$.

Понятие среднего значения функции в промежутке. Под средним значением n чисел $y_1, \ldots, y_n$ понимают число $\bar{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \ldots + y_n)$. Но что понимать под средним значением $f(x)$ в $[a, b]$?

Для ответа на этот вопрос разобьем $[a, b]$ на n равных частей длиною $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Допустим, что функция $f(x)$ в каждом элементарном промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ постоянна и равна $f(x_k)$. Среднее значение чисел $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ равно

$$\bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Определим *среднее значение функции* $f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ как предел $\bar{y}_n$ при стремлении n к бесконечности:

$$y_{\text{ср}} = \lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{18}$$

Заметим, что в формуле (16) величина $f(c)$ есть среднее значение $f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Пример 2. Среднее значение функции $y = a \sin x$, где a — постоянная, в промежутке $[0, \pi]$ равно $y_{ср} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} a \sin x\, dx = \frac{2a}{\pi} \approx 0{,}637a$. Именно эту величину показывает амперметр при измерении силы переменного тока, изменяющегося по закону $y = a \sin x$.

10°б. **Обобщенная теорема** (о среднем значении). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в $[a, b]$, причем $g(x)$ знакопостоянна, то существует в промежутке $[a, b]$ такое число c, что имеет место равенство*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx. \tag{19}$$

Утверждение это доказывается аналогично 10°а.

155. Интеграл с переменным верхним пределом. В определенном интеграле от интегрируемой в промежутке $[a, b]$ функции $f(x)$ пределы постоянны и сам интеграл есть число. Если изменить величину верхнего предела не выходя из $[a, b]$, то изменится и величина интеграла, причем каждому значению верхнего предела соответствует определенное значение интеграла. Поэтому интеграл с переменным верхним пределом есть функция верхнего предела; обозначим ее

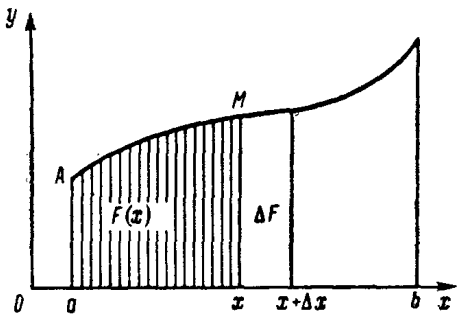

Рис. 101.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{20}$$

Геометрически функцию $F(x)$ можно трактовать как площадь криволинейной трапеции $AMxa$ (рис. 101), если $f(x) > 0$.

Теорема Барроу *. *Если $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, то производная интеграла* (20) *по верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке дифференцирования*:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x). \tag{21}$$

* Исаак Барроу (1630—1677) — английский математик.

Доказательство. Фиксируем x и $x+\Delta x$ в $[a, b]$ и найдем приращение функции $F(x)$. С помощью свойств 6° и 10° определенного интеграла получим

$$\Delta F = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\,\Delta x.$$

Таким образом, имеем $\Delta F = f(c)\,\Delta x$, где c содержится между x и $x+\Delta x$. Следовательно, существует предел

$$\frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to c} f(c) = f(x). \tag{22}$$

Следствие. Непрерывная в промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет в этом промежутке первообразную.

Действительно, такой первообразной является интеграл с переменным верхним пределом $F(x)$, потому что, в силу теоремы Барроу, $F'(x) = f(x)$.

Теорема Барроу есть одна из основных теорем математического анализа. Из нее следует основная формула интегрального исчисления (см. п. 153), которую мы теперь и выведем при условии непрерывности подынтегральной функции.

Теорема. *Если $f(x)$ непрерывна в $[a, b]$, то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a), \tag{23}$$

где $\varphi(x)$ — одна из первообразных $f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Доказательство. Существование первообразной для непрерывной $f(x)$ доказано в теореме Барроу. Одной из таких первообразных служит функция $F(x)$, определяемая равенством (20). Всякая другая первообразная $\varphi(x)$ отличается от $F(x)$ постоянным слагаемым, поэтому имеем $F(x) = \varphi(x) + c$ или $\int_a^x f(t)\,dt = \varphi(x) + c$. При $x = a$ имеем $0 = \varphi(a) + c$, т. е. $c = -\varphi(a)$. Отсюда следует равенство

$$\int_a^x f(t)\,dt = \varphi(x) - \varphi(a),$$

которое при $x = b$ дает формулу Ньютона — Лейбница (23).

156. Способы вычисления определенного интеграла. Первые три способа предполагают знание первообразной для подынтегральной функции.

I. *Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона — Лейбница* рассмотрено в п. 153. Здесь мы ограничимся одним примером.

Пример 1. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = (\ln x)\Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$

II. *Способ интегрирования по частям* основывается на формуле

$$\int\limits_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du, \tag{24}$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — непрерывно дифференцируемые в $[a, b]$ функции x. Формула (24) получается путем интегрирования по x в промежутке $[a, b]$ тождества $u\,dv = d(uv) - v\,du$ (см. п. 49), при этом согласно формуле (23) имеем $\int\limits_a^b d(uv) = \int\limits_a^b (uv)'dx = (uv)\Big|_a^b$.

Пример 2. $\int\limits_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = (x\sin x)\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$

Пример 3. Вычислить $J_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$. Интегрируя по частям, получим

$$J_n = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\,d\cos x = (\sin^{n-1} x\cos x)\Big|_{\pi/2}^{0} +$$

$$+ (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)(J_{n-2} - J_n).$$

Поэтому $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$. В случае $n = 2k$ имеем

$$J_{2k} = \frac{2k-1}{2k} J_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} J_{2k-4}, \qquad J_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно в этом случае получим

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

При $n = 2k+1$ аналогично предыдущему получим

$$J_{2k+1} = \frac{2k(2k-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}. \tag{26}$$

III. *Способ замены переменной* в определенном интеграле основывается на теореме.

Теорема. *Если* 1) $f(x)$ *определена и непрерывна в* $a \leqslant x \leqslant b$, 2) $x = \varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема в* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, *при этом* $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ *и* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *то имеет место формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (27)$$

Доказательство. Функции $F(x) = \int_a^x f(z)\,dz$ при $x = \varphi(t)$ и $\Phi(t) = \int_\alpha^t f(\varphi(z))\,\varphi'(z)\,dz$ имеют одинаковые производные. Действительно, согласно теореме Барроу, имеем

$$F'_t = F'_x x'_t = f(\varphi(t))\,\varphi'(t), \qquad \Phi'_t = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Поэтому $F(x) = \Phi(t) + c$. Здесь $c = 0$, потому что при $t = \alpha$ имеем $x = a$ и $F(a) = \Phi(\alpha) = 0$. Следовательно, $F(x) = \Phi(t)$, где $x = \varphi(t)$. Отсюда при $t = \beta$ следует формула (27).

Формула (27) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле.*

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, т. е. вычислить интеграл $F = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Положим $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t\,dt$. Переменная x изменяется в промежутке $0 \leqslant x \leqslant a$. Значению $x_1 = 0$ соответствует согласно подстановке значение $t_1 = 0$; $x_2 = a$ соответствует $t_2 = \frac{\pi}{2}$. По формуле (27) имеем

$$F = 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)\,dt = \pi ab.$$

Следующие три способа вычисления определенного интеграла не предполагают знания первообразной для подынтегральной функции.

IV. Вычисление определенного интеграла *путем перехода к пределу в интегральной сумме* основано на определении понятия определенного интеграла (см. п. 152). Для иллюстрации способа рассмотрен пример.

Пример 5. Вычислить интеграл $J = \int_a^b e^x\,dx$.

Делим промежуток $[a, b]$ на n равных частей, ограниченных точками $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, ..., $x_k = a + k\Delta x$, ..., $x_n = b$, где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Выберем в k-м промежутке $\xi_k = x_{k-1} = a + (k-1)\Delta x$. Составим интегральную сумму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} e^{\xi_k}\Delta x_k = \Delta x e^a\left[1 + e^{\Delta x} + \ldots + e^{(n-1)\Delta x}\right] =$$

$$= e^a \Delta x\,\frac{1 - e^{n\Delta x}}{1 - e^{\Delta x}} = (e^a - e^b)\,\frac{\Delta x}{1 - e^{\Delta x}}.$$

При $n \to \infty$ второй множитель правой части стремится к минус единице (в чем можно убедиться, например, по правилу Лопиталя). Поэтому $J = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = e^b - e^a$.

V. *Численные методы приближенного вычисления определенного интеграла* основаны на приближенном представлении определенного интеграла интегральной суммой σ_n или величиной, близкой к σ_n:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sigma_n. \qquad (28)$$

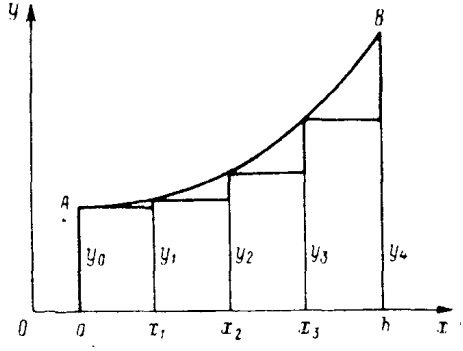

Рис. 102.

Если $f(x) > 0$, то этот определенный интеграл можно трактовать как площадь криволинейной трапеции $ABba$, ограниченной сверху графиком $f(x)$. Интегральная сумма σ_n представляет площадь ступенчатой фигуры, ограниченной сверху ломаной L, звенья которой параллельны координатным осям. Эти площади приблизительно равны между собой при разбиении $[a, b]$ на достаточно малые части. Идея рассматриваемого способа геометрически состоит в том, что график $f(x)$ заменяется близкой к этому графику линией. В одном случае (при выводе формулы прямоугольников) график $f(x)$ заменяется ступенчатой ломаной L (рис. 102).

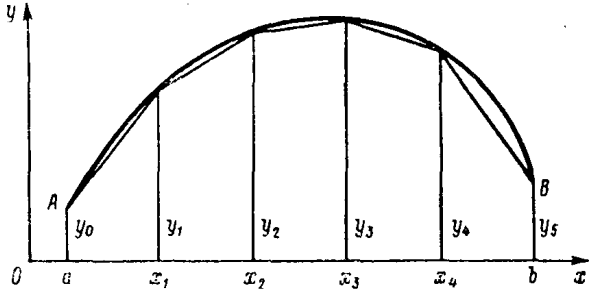

Рис. 103.

В другом случае (при выводе формулы трапеции) график $f(x)$ заменяется ломаной, вписанной в этот график (рис. 103). Наконец, при выводе формулы Симпсона звенья упомянутой ломаной заменяются дугами парабол второй степени. Ниже используется обозначение $y_k = f(x_k)$.

А. Составим интегральную сумму, соответствующую делению $[a, b]$ на n равных частей и выбору точек $\xi_k = x_k$:

$$\sigma_n = \Delta x\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

В соответствии с соотношением (28) приходим к приближенному равенству

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \tag{29}$$

называемому *формулой прямоугольников*. При стремлении n к бесконечности в пределе приближенное равенство (29) переходит в точное согласно определению интеграла (см. п. 152).

Б. Пусть криволинейная трапеция $ABba$ (см. рис. 103) разделена на элементарные трапеции, соответствующие делению $[a, b]$ на n равных частей. Заменяем k-ю элементарную трапецию прямолинейной трапецией с площадью $\frac{1}{2}(y_{k-1} + y_k)\,\Delta x$, где $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Поэтому площадь всей фигуры под кривой AB будет приближенно равна

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right). \tag{30}$$

Это равенство называется *формулой трапеций*.

В. Делим промежуток $[a, b]$ на $2n$ равных частей точками $\{x_k\}$, а кривую AB на $2n$ соответствующих частей, ограниченных точками $\{M_k(x_k, y_k)\}$. Рассмотрим n троек точек AM_1M_2, $M_2M_3M_4$, . . ., $M_{2n-2}M_{2n-1}B$. Ниже доказано, что через каждую такую тройку точек проходит единственная парабола второй степени вида $y = ax^2 + bx + c$ (см. лемму 1) и что площадь k-й криволинейной трапеции равна (см. лемму 2)

$$\frac{b-a}{6n}(y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}). \tag{31}$$

Поэтому в силу (28) имеем приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})], \tag{32}$$

называемое *формулой парабол*, или *формулой Симпсона*. Вывод формулы (31) состоит в доказательстве двух лемм.

Лемма 1. *Через любые три точки A_1, A_2, A_3 с различными абсциссами можно провести единственную параболу второй степени $y = ax^2 + bx + c$ (или прямую $y = bx + c$, если данные точки лежат на одной прямой).*

Действительно, коэффициенты a, b и c однозначно определяются путем решения системы

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1, \quad ax_2^2 + bx_2 + c = y_2, \quad ax_3^2 + bx_3 + c = y_3, \tag{33}$$

потому что определитель этой системы всегда отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) \neq 0.$$

Фактически искомые коэффициенты можно найти по формулам теоремы Крамера. При этом, если данные точки лежат на одной прямой, то получим $a = 0$.

Лемма 2. *Площадь трапеции, ограниченной параболой второй степени (или прямой), проходящей через точки* $A_1(-h, y_1)$, $A_2(0, y_2)$, $A_3(+h, y_3)$ (рис. 104), *равна*

$$F = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3). \qquad (34)$$

Действительно, в нашем случае система (33) имеет вид

$$ah^2 - bh + c = y_1, \qquad c = y_2,$$

$$ah^2 + bh + c = y_3,$$

а из нее следует, что $2ah^2 + 2c = y_1 + y_3$, $c = y_2$. Имеем

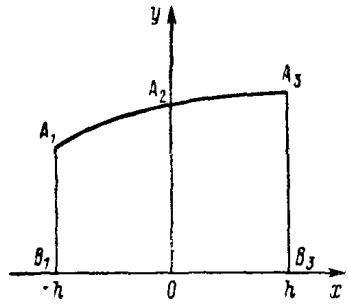

Рис. 104.

$$F = \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Таким образом, выведена формула (31), а вместе с ней и (32), потому что площадь криволинейной трапеции не зависит от того, где эта трапеция расположена на плоскости.

Пример 6, иллюстрирующий численные методы. Рассмотрим интеграл $J = \int_0^{\pi} \sin x\,dx$, точное значение которого равно единице.

По формуле (29) при $n = 3$ получим

$$J \approx \frac{\pi}{6}(y_3 + y_1 + y_2) = \frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\right) \approx 1{,}237.$$

По формуле (30) при $n = 3$ получим

$$J \approx \frac{\pi}{6}\left(\frac{y_0 + y_3}{2} + y_1 + y_2\right) = \frac{\pi}{2}(2 + \sqrt{3}) \approx 0{,}976.$$

По формуле (32) при $n = 2$ имеем

$$J \approx \frac{\pi}{12}[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)] \approx 0{,}99951.$$

Заметим, что все три формулы (29), (30), (32) тем точнее, чем больше n, и их абсолютная погрешность при $n \to \infty$ стремится к нулю в соответствии с определением понятия определенного интеграла.

VI. *Метод статистических испытаний*, или *метод Монте-Карло*. Будем трактовать определенный интеграл $F = \int_a^b f(x)\,dx$ при условии $f(x) \geqslant 0$ и $a < b$ как площадь соответствующей криволинейной трапеции $ABba$ (рис. 105). Рассмотрим прямоугольник $PQba$ с тем же основанием $[a, b]$ и высотой h, которая не меньше наибольшего значения $f(x)$ в $[a, b]$. График $f(x)$ делит этот прямоугольник на две части, одна из которых имеет площадь F.

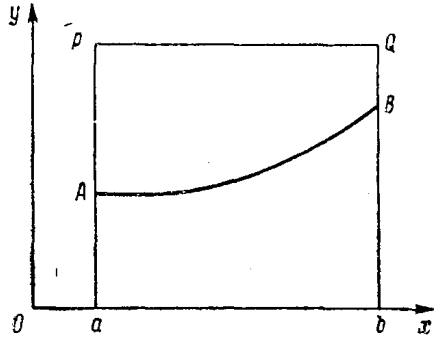

Рис. 105.

Будем производить «обстрел» прямоугольника (случайный выбор точек в прямоугольнике) при условии равной вероятности * «попадания» в любую его часть. Пусть произведено n «выстрелов», причем ниже линии AB оказалось m «попаданий». Тогда при достаточно большом n будет выполнено приближенное равенство $F/(b-a)\,h \approx m/n$. Следовательно,

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{m}{n}\,h\,(b-a). \qquad (35)$$

Например, если $m = 75$ при $n = 100$, то $F \approx 0{,}75\,(b-a)\,h$.

§ 26. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Мы переходим к рассмотрению некоторых приложений понятия определенного интеграла — к вычислению площадей, объемов и других величин. При этом будем руководствоваться во многом наглядными соображениями. Точное определение площади и объема приводится в более подробных курсах **.

157. Вычисление площади. В п. 151 определена площадь криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ и отрезками прямых $x = a$, $x = b$, $y = 0$, как интеграл от функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ при условии, что $f(x) \geqslant 0$.

Площадь области, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и

---

* См. главу XIV.

** См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, § 9.

и двумя непрерывными кривыми $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при условии $f(x) \geqslant g(x)$, определим * как интеграл

$$F = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{1}$$

Это определение можно обосновать интуитивно следующим образом. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, то указанная площадь равна разности площадей криволинейных трапеций рассмотренного выше вида: $F = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$.

Если же $f(x)$ и $g(x)$ имеют произвольные знаки, то в силу их ограниченности существует такая постоянная c, что функции $f_1(x) = f(x) + c$ и $g_1(x) = g(x) + c$ уже не отрицательны. Площадь области, заключенной между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = g_1(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, очевидно, совпадает с предыдущей площадью и равна

$$\int_a^b [f_1(x) - g_1(x)]\, dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

В частности, криволинейная трапеция, заданная равенствами $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = f(x)$, при условии $f(x) \leqslant 0$ имеет площадь

$$F = -\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{2}$$

Следовательно, площадь криволинейной трапеции в случае, когда $f(x)$ может принимать в $[a, b]$ значения разных знаков, равна

$$F = \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{3}$$

Заметим, что при $a < b$ интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ дает алгебраическую сумму площадей, в которой каждая площадь, расположенная под осью Ox, входит со знаком минус. Он может быть отрицательным, в то время как площадь области всегда положительна. Для вычисления площади области более сложного вида надо разбить всю область на части рассмотренного вида, найти площади этих частей и результаты сложить.

Пример 1. Найти площадь области, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и осью абсцисс при условии $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Имеем $y \geqslant 0$, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, и $y \leqslant 0$, если $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, и по формуле (3) получим

$$F = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = 4.$$

Пример 2. Найти площадь области, ограниченной линиями $y = \sin x$ и $y = \frac{2}{\pi} x$ (рис. 106).

---

* См.: С. Банах. Дифференциальное и интегральное исчисление, гл. XIX.

Данные линии пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$. По формуле (1) получим

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi} x \right) dx = \left(-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Вычисление площади в полярных координатах. Требуется определить площадь сектора OAB (рис. 107), ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой AB, заданной в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ — функция, непрерывная в промежутке $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

Решение. 1) Разобьем промежуток $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$ и обозначим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, а λ_n — наибольшее из чисел $\Delta\varphi_1, \ldots, \Delta\varphi_n$. Разобьем данный сектор на n частей лучами $\varphi = \varphi_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$).

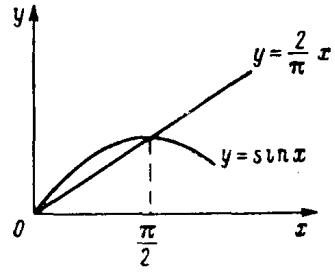

Рис. 106.

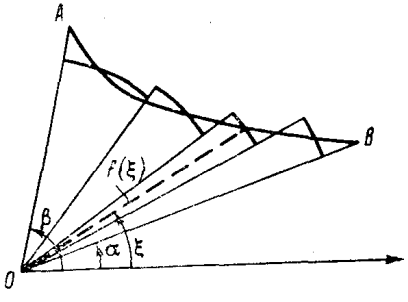

Рис. 107.

2) Заменим k-й элементарный сектор круговым сектором радиусом $r_k = r(\xi_k)$, где $\xi_k \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$. Тогда площадь k-го элементарного сектора будет приближенно равна $\Delta F_k \approx \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi_k$, а площадь всего исходного сектора

$$F = \sum_k \Delta F_k \approx \frac{1}{2} \sum_k r_k^2 \Delta\varphi_k \equiv \sigma_n.$$

3) За величину площади криволинейного сектора примем предел площади ступенчатой фигуры, составленной из указанных круговых секторов при стремлении λ_n к нулю, т. е. определенный интеграл

$$F = \lim_{\lambda_n \to 0} \sigma_n = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi. \qquad (4)$$

Пример 3. Найти площадь области, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$. Учитывая симметрию кривой относительно полярной оси, по формуле (4) получим

$$F = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

158. Вычисление объема. Рассмотрим тело B, содержащееся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ (рис. 108). Пусть для каждого x из промежутка $[a, b]$ дана площадь сечения этого тела $F(x)$, перпендикулярного оси Ox. Требуется найти объем V данного тела при условии непрерывности $F(x)$ в $[a, b]$.

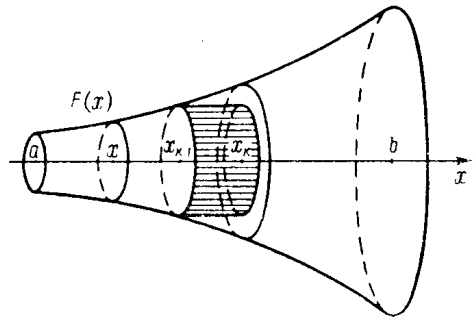

Рис. 108.

Решение. Делим промежуток $[a, b]$ на n элементарных частей и через точки деления проводим плоскости, перпендикулярные оси Ox. Эти плоскости разобьют B на элементарные слои. Рассмотрим k-й слой, ограниченный плоскостями $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$. Объем этого слоя приближенно равен объему цилиндра с основанием, равным $F(x_{k-1})$, и высотой Δx_k, так что $\Delta V_k \approx F(x_{k-1}) \Delta x_k$. Сумма объемов элементарных цилиндров приближенно равна $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_{k-1}) \Delta x_k$.

Объем тела B определим как предел величины σ_n при стремлении λ_n к нулю. Этот предел существует в силу непрерывности $F(x)$ и равен определенному интегралу

$$V = \int_a^b F(x) \, dx. \tag{5}$$

В частности, если тело ограничено поверхностью вращения линии $y = y(x)$ вокруг оси Ox в пределах изменения x от a до b, то $F(x) = \pi y^2$ и

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) \, dx. \tag{6}$$

Пример 4. Вычислить объем шара радиусом R. По формуле (6) при $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ получаем

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) \, dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

159. Вычисление длины дуги. Пусть дуга $\overset{\frown}{AB}$ задана уравнением $y = y(x)$, где $y(x)$ — функция, непрерывно дифференцируемая в $[a, b]$. График $y(x)$ в этом случае есть так называемая *гладкая кривая*. Геометрически это условие значит, что кривая в каждой точке имеет касательную, направляющие косинусы которой непрерывно зависят от x (см. п. 132).

Докажем, что гладкая кривая имеет длину дуги, и найдем эту величину. Для этого разделим кривую AB на n частей (рис. 109) точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и ординатами $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Обозначим $a = x_0$, $b = x_n$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ и λ_n — наибольшую из величин $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$.

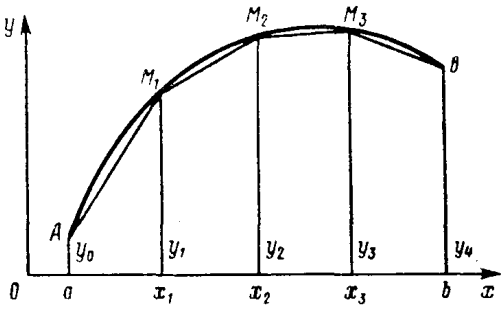

Рис. 109.

Рассмотрим ломаную $AM_1M_2 \ldots B$, вписанную в AB. Длину каждого звена ломаной найдем по теореме Пифагора и суммируя, получим периметр ломаной

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}.$$

Положив здесь согласно формуле конечных приращений $\Delta y_k = y'(c_k)\,\Delta x_k$, получим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + y'^2(c_k)}\;\Delta x_k. \tag{7}$$

Длиной дуги кривой называется предел периметра вписанной в эту дугу ломаной при безграничном уменьшении всех ее звеньев, если этот предел существует и не зависит от выбора ломаной. В наших условиях величина σ_n есть интегральная сумма в промежутке $[a, b]$ функции $\sqrt{1 + y'^2(x)}$, которая непрерывна; поэтому существует упомянутый в определении предел. Этим пределом является интеграл, который и есть длина дуги AB

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx. \tag{8}$$

Если кривая AB задана параметрически уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{9}$$

и кривая гладкая, т. е. существуют непрерывные $x'(t)$ и $y'(t)$, то путем замены переменной $x = x(t)$ в (8) получим длину дуги AB

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt. \tag{10}$$

Формула (10) обобщается на случай гладкой кривой в пространстве, заданной уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Длина такой дуги равна

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \tag{11}$$

Если плоская кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ при $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то параметрические уравнения этой кривой будут $x = r(\varphi)\cos\varphi$, $y = r(\varphi)\times$ $\times \sin\varphi$. Поэтому $x' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$, $y' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$, и по формуле (10) получим

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{12}$$

Пример. Вычислить длину окружности радиусом R. Для этого напишем уравнение окружности в полярных координатах: $r = R$ при $0 \leqslant$ $\leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и по формуле (12) получим $s = \int_0^{2\pi} R\, d\varphi = 2\pi R$.

160. Площадь поверхности вращения. Пусть гладкая дуга AB задана уравнением $y = y(x)$ в $[a, b]$. Требуется найти площадь $F_{\text{вр}}$ поверхности, образованной вращением дуги AB вокруг оси Ox.

Площадью поверхности, образованной вращением плоской дуги вокруг оси, лежащей в плоскости дуги, называется предел площади поверхности, образованной вращением вокруг той же оси вписанной в эту дугу ломаной, при неограниченном уменьшении всех ее звеньев.

Разделим дугу AB точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ на элементы и впишем в нее соответствующую ломаную. Поверхность, образованная вращением k-го звена ломаной, есть боковая поверхность усеченного конуса с площадью $F_k = \pi(y_{k-1} + y_k)\,\Delta l_k$, где

$$\Delta l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + y'^2(c_k)}\,\Delta x_k,$$

$$x_{k-1} < c_k < x_k, \quad y_{k-1} = y(x_{k-1}), \quad y_k = y(x_k).$$

Площадь поверхности вращения ломаной равна

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \pi(y_{k-1} + y_k)\sqrt{1 + y'^2(c_k)}\,\Delta x_k.$$

Согласно определению $F_{\text{вр}} = \lim \sigma_n$ при $\lambda_n \to 0$. Докажем, что если $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны в $[a, b]$, то

$$F_{\text{вр}} = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{13}$$

Для этого рассмотрим интегральную сумму σ_n' функции $2\pi y\sqrt{1+y'^2}$, соответствующую нашему разбиению дуги AB и такому выбору промежуточных точек: $\xi_k = c_k$. Оценим разность

$$\sigma_n - \sigma_n' = \pi \sum_{k=1}^{n} [y_{k-1} + y_k - 2y(c_k)] \sqrt{1+y'^2(c_k)}\,\Delta x_k. \qquad (14)$$

Согласно теореме Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной в замкнутом промежутке, имеем $0 < \sqrt{1+y'^2} < M$. Согласно теореме Кантора, функция $y(x)$ равномерно непрерывна в промежутке $[a, b]$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|y_{k-1} - y(c_k)| < \varepsilon$, $|y_k - y(c_k)| < \varepsilon$ и $|y_{k-1} + y_k - 2y(c_k)| < 2\varepsilon$ при $\lambda_n < \delta$. Следовательно, при $\lambda_n < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_n - \sigma_n'| < 2\pi\varepsilon M(b-a)$, которое показывает, что разность $\sigma_n - \sigma_n'$ есть бесконечно малая при стремлении λ_n к нулю и что переменные σ_n и σ_n' имеют одинаковые пределы, равные величине (13).

Пример. Найти площадь шарового пояса, образованного вращением вокруг оси Ox дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, соответствующей изменению x от a до b. Здесь $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $y' = -\frac{x}{y}$, $1 + y'^2 = \frac{R^2}{y^2}$, и по формуле (13) получим

$$F_{\text{вр}} = 2\pi R \int_a^b dx = 2\pi R(b-a).$$

В частности, при $a = -R$, $b = R$ имеем площадь всей сферы:

$$F_{\text{вр}} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

161. Статические моменты и координаты центра тяжести. *Статическим моментом материальной точки*, находящейся в плоскости Oxy, относительно координатной оси Ox (или Oy) называется произведение массы этой точки на ее ординату (соответственно — абсциссу). *Статическим моментом системы таких точек* $M_1, \ldots, M_n$ относительно координатной оси называется сумма статических моментов всех точек системы относительно этой оси.

Центром тяжести системы материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_n$ называется точка C, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы $m = m_1 + \ldots + m_n$, то ее статический момент по отношению к любой оси равен статическому моменту системы точек относительно той же оси. Поэтому, если обозначить через S_x и S_y статические моменты системы точек относительно координатных осей Ox и Oy, то координаты x_C и y_C центра тяжести C удовлетворяют соотношениям

$$mx_C = S_y = m_1x_1 + \ldots + m_nx_n, \quad my_C = S_x = m_1y_1 + \ldots + m_ny_n, \qquad (15)$$

где x_k, y_k — декартовы координаты точки с массой m_k.

Следовательно, центр тяжести данной системы материальных точек имеет координаты

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{n}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + \ldots + m_n y_n}{n}. \tag{16}$$

Статические моменты и координаты центра тяжести дуги плоской линии. Пусть гладкая дуга AB задана в промежутке $[a, b]$ уравнением $y = y(x)$ и на ней непрерывно распределено вещество с плотностью $\rho(x)$. Разделим дугу AB на n элементов $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Сосредоточим массу каждого из элементов $M_{k-1}M_k$ в одной его точке $N_k(x_k, y_k)$. При этом условии получим приближенные выражения элемента массы $\Delta m_k \approx \approx \rho(x_k)\,\Delta s_k$ и элементарных статических моментов относительно координатных осей $\Delta S_{xk} \approx y_k \Delta m_k$, $\Delta S_{yk} \approx x_k \Delta m_k$.

Суммируя и переходя к пределу при $\lambda_n \to 0$, получим выражение массы материальной дуги

$$m = \int_a^b \rho \sqrt{1 + y'^2}\, dx \tag{17}$$

и ее статических моментов относительно координатных осей

$$S_x = \int_a^b \rho y \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \quad S_y = \int_a^b \rho x \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{18}$$

Для нахождения центра тяжести $C(x_C, y_C)$ материальной дуги AB в соответствии с определением этого понятия составим равенства $mx_C = S_y$ и $my_C = S_x$, из которых следует, что

$$x_C = \frac{S_y}{m}, \quad y_C = \frac{S_x}{m}, \tag{19}$$

где m, S_x и S_y определяются формулами (17) и (18).

Первая теорема Гульдина *. *Пусть дуга AB и прямая α лежат в одной плоскости и не пересекаются. Площадь поверхности, образованной вращением дуги AB вокруг оси α, равна произведению длины дуги s_{AB} на длину окружности, которую описывает ее центр тяжести. Если α есть ось Ox, то*

$$F_{\text{вр}} = 2\pi y_C \cdot s_{AB}. \tag{20}$$

Действительно, если умножить равенство $my_C = S_x$ на 2π, то получим

$$2\pi y_C m = 2\pi \int_a^b \rho y \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

---

* Пауль Гульдин (1577—1643) — швейцарский математик.

Здесь в левой части $m = s_{AB}$ при $\rho = 1$, а правая часть равна $F_{вр}$, согласно (13). Отсюда следует (20).

Пример 1. Найти координаты центра тяжести полуокружности радиусом R с центром в начале координат, симметричной относительно оси Oy при условии $\rho = 1$. Из соображений симметрии заключаем, что $x_C = 0$. Для нахождения y_C полагаем в формуле (20) $F_{вр} = 4\pi R^2$ и $s_{AB} = \pi R$. Получим равенство $4\pi R^2 = 2\pi y_C \cdot \pi R$, из которого следует $y_C = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}637R$.

Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и $y = y(x)$, и на ней распределено вещество с плотностью $\rho = 1$. Разделим промежуток $[a, b]$ на n элементарных частей, а криволинейную трапецию на n соответствующих частей. Заменим каждую элементарную трапецию прямоугольником с основанием, равным Δx_k, и высотой, равной $y_{k-1} = y(x_{k-1})$. Получим элемент массы $\Delta m \approx y\,\Delta x$ и элементарные статистические моменты $\Delta S_x \approx \frac{1}{2} y\,\Delta m$, $\Delta S_y \approx x\,\Delta m$.

Отсюда следуют выражения массы и статических моментов всей фигуры:

$$m = \int_a^b y\,dx, \quad S_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad S_y = \int_a^b xy\,dx. \tag{21}$$

Координаты центра тяжести x_C и y_C определяются, так же как и для материальной дуги, формулами (19), в которых под m, S_x и S_y следует понимать величины (21).

Если умножить равенство $my_C = S_x$ на 2π, то согласно (21) получим $2\pi y_C m = \pi \int_a^b y^2 dx$, где $m = F$, а правая часть согласно (6) есть объем тела вращения. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Вторая теорема Гульдина. *Пусть плоская фигура A и прямая α лежат в одной плоскости и не пересекаются. Объем тела, образованного вращением плоской фигуры A вокруг оси α, равен произведению площади F_A фигуры на длину окружности, которую описывает ее центр тяжести. Если α есть ось Ox, то*

$$V_{вр} = 2\pi y_C F_A. \tag{22}$$

Пример 2. Найти координаты центра тяжести полукруга, симметричного относительно оси Oy с центром в начале координат при условии, что $\rho = 1$. Из симметрии фигуры следует, что $x_C = 0$. Для нахождения y_C полагаем в формуле (22) $V_{вр} = \frac{4}{3}\pi R^3$ и $F_A = \frac{1}{2}\pi R^2$; получим $y_C = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} \approx 0{,}42R$.

§ 27. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

При изучении определенного интеграла от функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ мы предполагали этот промежуток конечным, а функцию в нем ограниченной. При нарушении любого из этих условий нельзя построить определенный интеграл; так, в случае бесконечного промежутка нельзя разбить промежуток на n частей конечной длины; во втором случае σ_n не имеет предела. Однако в естествознании встречаются интегралы по бесконечному промежутку и интегралы от неограниченных функций. Но это уже интегралы не в смысле определенного интеграла. Ниже рассмотрены эти новые понятия.

162. Интеграл по бесконечному промежутку. Пусть $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$. Интеграл от функции $f(x)$ в промежутке $a \leqslant x < \infty$ обозначается символом

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Для каждого b, большего a, существует интеграл с переменным верхним пределом (рис. 110)

$$J(b) = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Определение 1. *Несобственным интегралом от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $a \leqslant x < \infty$* называется предел интеграла (2) при стремлении b к $+\infty$:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Если этот предел конечен, то говорят, что несобственный интеграл (1) *сходится*. Если же интеграл (2) при стремлении b к $+\infty$ не имеет предела, то интеграл (1) называют *расходящимся*.

Заметим, что согласно (3) сходящийся несобственный интеграл есть повторный предел, т. е. предел от предела, так как интеграл (2) при каждом фиксированном b сам является пределом соответствующей интегральной суммы.

Пример 1. $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} [1 - e^{-b}] = 1.$

В этом случае несобственный интеграл сходится. Его можно принять за величину площади фигуры, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$ и $y = e^{-x}$.

Пример 2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$

Следовательно, данный интеграл расходится.

Пример 3. Выяснить, при каких значениях параметра α сходится интеграл $J = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$. Случай $\alpha = 1$ рассмотрен в примере 2. При $\alpha \neq 1$ имеем

$$J(b) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^b = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \xrightarrow[b\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{при } \alpha<1, \\ \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha>1. \end{cases}$$

Следовательно, данный интеграл сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Примечание. Исследование интеграла (1) на сходимость можно заменить исследованием на сходимость интеграла от $f(x)$ в промежутке (a_1, ∞), где $a_1 > a$. Действительно, из равенства

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_1} f(x)\,dx + \int_{a_1}^b f(x)\,dx \qquad (4)$$

следует, что интегралы в промежутках (a, ∞) и (a_1, ∞) вместе сходятся или расходятся.

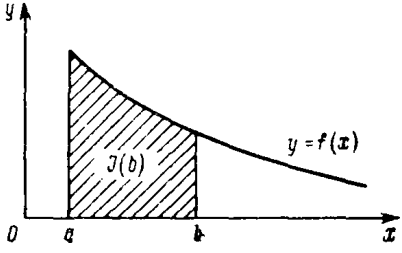

Рис. 110.

Выясним условия сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку. Согласно общему критерию Больцано — Коши (см. п. 20), для существования предела функции $J(b)$ при стремлении b к бесконечности необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало число $N(\varepsilon)$ такое, чтобы выполнялось неравенство $|J(b'') - J(b')| < \varepsilon$ при $b'' > b' > N$.

Принимая во внимание (2), имеем

$$J(b'') - J(b') = \int_a^{b''} f(x)\,dx - \int_a^{b'} f(x)\,dx = \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению: *для сходимости интеграла* (1) *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $N(\varepsilon)$, *чтобы при всех* b' *и* b'', *удовлетворяющих условию* $b'' > b' > N(\varepsilon)$, *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (5)$$

Определение 2. Несобственный интеграл (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Из сходимости интеграла* (6) *следует сходимость интеграла* (1).

Действительно, имеют место неравенства

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

первое — при любых b' и $b'' > b'$ по теореме об оценке интеграла, второе — при $b'' > b' > N$ в силу сходимости интеграла (6) и неравенства (5). Следовательно, выполнено условие сходимости (5) и для интеграла (1). Теорема доказана.

Заметим, что из сходимости интеграла (1) не следует сходимости интеграла (6). Это показывает пример.

Пример 4. Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, но не абсолютно.*

Теорема 2 (теорема сравнения). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \geqslant a$ непрерывны и удовлетворяют соотношению*

$$|f(x)| \leqslant g(x) \tag{7}$$

(по крайней мере при всех достаточно больших x), то из сходимости интеграла

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \tag{8}$$

следует абсолютная сходимость интеграла (1), *а из расходимости интеграла* (6) *следует расходимость* (8).

Действительно, если (8) сходится, то имеют место неравенства

$$\int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{b'}^{b''} g(x)\,dx < \varepsilon,$$

первое — при $b'' > b'$ в силу неравенства (7), второе — при $b'' > b' > N$ в силу сходимости (8). Следовательно, выполнено условие (5) сходимости интеграла (6), и по теореме 1 интеграл (1) сходится абсолютно.

Если (6) расходится, то при $b \to +\infty$ стремится к $+\infty$ интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$, а вместе с ним и интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$, что и доказывает расходимость интеграла (8).

Пример 5. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ сходится абсолютно, так как $\frac{|\cos x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ и интеграл $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}$.

---

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, § 8.

Теорема 3. *Пусть $f(x)$ непрерывна при $x \geqslant a$. Если имеет место неравенство*

$$|f(x)| < \frac{A}{x^{\alpha}} \tag{9}$$

при каких-либо постоянных $A > 0$ и $\alpha > 1$ для всех достаточно больших x, то интеграл (1) сходится абсолютно. Если неравенство

$$f(x) > \frac{A}{x^{\alpha}} \tag{10}$$

выполняется при каких-либо постоянных $A > 0$ и $\alpha \leqslant 1$ при всех достаточно больших x, то интеграл (1) расходится.

Доказательство. Пусть выполнено условие (9). Из теоремы 2 при $g(x) = \frac{A}{x^{\alpha}}$ и примера 3 следует, что интеграл (1) сходится абсолютно.

Пусть выполнено условие (10). Из второй части теоремы 2 при $g(x) = \frac{A}{x^{\alpha}}$ и примера 3 при $\alpha \leqslant 1$ следует расходимость интеграла (1).

Условие (9) называется *признаком Коши абсолютной сходимости* интеграла (1).

Пример 6. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$ сходится абсолютно, так как при $x \geqslant 1$ имеет место неравенство $\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$, т. е. выполнено условие (9) при $A=1$ и $\alpha=2$.

Пример 7. Интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{(1+x)\,dx}{x\sqrt{x}}$ расходится, так как при $x > 1$ имеем $\frac{1+x}{x\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}}$, т. е. выполнено условие (10) при $A=1$ и $\alpha=\frac{1}{2}$.

Интегралы по промежуткам $(-\infty, b]$ и $(-\infty, +\infty)$ определяются соответственно равенствами

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

163. Интеграл от неограниченной функции. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в промежутке $a \leqslant x < b$ и неограничена вблизи точки b. В частности, $f(x) \to \infty$ при $x \to b$.

Интеграл от неограниченной функции обозначается символом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{11}$$

Для выяснения содержания этого понятия рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом $b-\beta$, где $b-a>\beta>0$:

$$J(\beta)=\int_a^{b-\beta} f(x)\,dx. \tag{12}$$

Определение 3. Если существует конечный предел переменной $J(\beta)$ при $\beta\to+0$, то этот предел называется *сходящимся несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$ в промежутке от a до b:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\beta\to+0}\int_a^{b-\beta} f(x)\,dx. \tag{13}$$

Если этот предел не существует (в частности, бесконечен), то говорят, что *несобственный интеграл* (11) *расходится*.

Если функция $f(x)$ неограничена в окрестности точки a и в промежутке $a<x\leqslant b$ непрерывна, то по определению

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{a+\alpha}^b f(x)\,dx. \tag{14}$$

Пример 1. $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\lim_{\alpha\to+0}(1-\sqrt{\alpha})=2$, интеграл сходится.

Пример 2. $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{b-x}=\lim_{\beta\to+0}\ln(b-x)\Big|_a^{b-\beta}=\infty$, интеграл расходится.

Пример 3. Выяснить, при каких значениях параметра α сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}$. Случай $\alpha=1$ рассмотрен в примере 2. При $\alpha\neq1$ имеем

$$J(\beta)=\int_a^{b-\beta}\frac{dx}{(b-x)^\alpha}=\frac{(b-a)^{1-\alpha}-\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\xrightarrow[\beta\to+0]{}\begin{cases}\infty & \text{при } \alpha>1,\\ \text{const} & \text{при } \alpha<1.\end{cases}$$

Следовательно, данный интеграл сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha\geqslant1$.

Выясним условия сходимости несобственного интеграла (11). Согласно общему критерию Больцано — Коши для существования предела функции $J(\beta)$ при стремлении β к нулю, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ существовало соответствующее $\delta(\varepsilon)$ такое, что при любых β' и β'', удовлетворяющих условию $0<\beta'<\beta''<\delta$, имело место неравенство $|J(\beta')-J(\beta'')|<\varepsilon$.

В нашем случае $J(\beta') - J(\beta'') = \int\limits_{b-\beta''}^{b-\beta'} f(x)\,dx$.

Таким образом, мы приходим к следующему критерию Коши сходимости несобственного интеграла от неограниченной функции: *для сходимости интеграла* (11) *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое* $\delta > 0$, *чтобы при всех* β' *и* β'', *удовлетворяющих условию* $0 < \beta' < \beta'' < \delta$, *выполнялось неравенство*

$$\left| \int\limits_{b-\beta'}^{b-\beta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon. \tag{15}$$

Определение 4. Несобственный интеграл (13) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{16}$$

Сформулируем теоремы, которые доказываются так же, как соответствующие теоремы п. 162.

Теорема 1. *Из сходимости интеграла* (16) *следует сходимость интеграла* (11).

Теорема 2 (теорема сравнения). *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в промежутке* $a \leqslant x < b$, *неограничены в окрестности точки* b *и удовлетворяют соотношению* $|f(x)| \leqslant g(x)$ *по крайней мере для всех значений* x *из промежутка* (a, b), *достаточно близких к* b, *то из сходимости интеграла*

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{17}$$

следует абсолютная сходимость интеграла (11).

Теорема 3. *Если* $f(x)$ *в промежутке* $a \leqslant x < b$ *непрерывна и удовлетворяет соотношению*

$$|f(x)| < \frac{A}{(b-x)^\alpha} \tag{18}$$

при каких-либо постоянных $A > 0$ *и* $\alpha < 1$, *то интеграл* (11) *сходится абсолютно. Если в этом промежутке выполняется неравенство*

$$f(x) > \frac{A}{(b-x)^\alpha} \tag{19}$$

при каких-либо постоянных $A > 0$ *и* $\alpha \geqslant 1$, *то интеграл* (11) *расходится.*

164. Интегралы Эйлера. *Гамма-функцией*, или *эйлеровым интегралом второго рода*, называется следующий несобственный интеграл, зависящий от параметра p:

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{20}$$

Докажем, что интеграл (20) сходится при $p>0$. Для этого рассмотрим соответствующие интегралы в промежутках $[0, 1]$ и $[1, \infty]$:

$$J_1(p)=\int_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx \quad \text{и} \quad J_2(p)=\int_1^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx.$$

При $0<p<1$ несобственный интеграл $J_1(p)$ от неограниченной функции ($e^{-x}x^{p-1}\to\infty$ при $x\to+0$) сходится по теореме сравнения, потому что

1) $0<e^{-x}x^{p-1}<x^{p-1}$ при $0<x<1$,

2) $\int_{\alpha}^{1} x^{p-1}\,dx=\frac{1-\alpha^p}{p}\to\frac{1}{p}$ при $\alpha\to+0$.

При $p\geqslant 1$ интеграл $J_1(p)$ существует как определенный интеграл от непрерывной функции.

Для доказательства сходимости несобственного интеграла $J_2(p)$ воспользуемся равенством

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p+1}e^{-x}=0,$$

из которого следуют неравенства $x^{+1}e^{-x}<\varepsilon$ и $x^{p-1}e^{-x}<\frac{\varepsilon}{x^2}$ при всех $x>x_1>1$, где x_1 зависит от ε ($\varepsilon>0$).

Представим $J_2(p)$ в виде суммы

$$J_2(p)=\int_1^{x_1} e^{-x}x^{p-1}\,dx+\int_{x_1}^{\infty} e^{-x}x^{p-1}\,dx.$$

В этой сумме первое слагаемое есть определенный интеграл от непрерывной функции в промежутке $[1, x_1]$, а второе слагаемое — несобственный интеграл, который сходится в силу признака Коши.

Два свойства гамма-функции. 1°. $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. Можно доказать, что, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{\infty} x^p e^{-x}\,dx=-(x^pe^{-x})\Big|_0^{\infty}+p\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx=p\Gamma(p).$$

2°. $\Gamma(n+1)=n!$

Действительно, если $p = n$, то, применяя последовательно формулу $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$, получим

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots =$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!\,\Gamma(1).$$

Здесь $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(1-e^{-b}) = 1$.

Бета-функцией, или *эйлеровым интегралом первого рода*, называется несобственный интеграл, зависящий от параметров p и q, определяемый равенством

$$B(p,\ q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx. \tag{21}$$

Интеграл (21) сходится при $p>0$, $q>0$; он связан с гамма-функцией равенством *

$$B(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{22}$$

§ 28. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

165. Определенные интегралы, зависящие от параметра. Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $A: a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant \delta$, и интегрируема по x в $[a, b]$ при каждом значении y из промежутка $[c, \delta]$. Тогда интеграл

$$J(y) = \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx \tag{1}$$

есть функция параметра y, определенная в промежутке $[c, \delta]$.

Теорема 1. (о непрерывной зависимости интеграла от параметра). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике A, то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра y в промежутке $[c, \delta]$.*

Доказательство. Из непрерывности $f(x, y)$ как функции двух переменных в замкнутой области A следует ее непрерывность по x в $[a, b]$ при каждом фиксированном значении y из $[c, \delta]$ и существование интеграла (1). В силу теоремы Кантора, $f(x, y)$ равномерно непрерывна в A. Это значит, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для любых точек M_1 и M_2 из A при условии $d(M_1, M_2) < \delta$ выполнено неравенство

$$|f(M_1) - f(M_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{2}$$

---

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II, п. 311.

В частности, это неравенство выполнено для точек $M_1(x, y)$ и $M_2(x, y+\Delta y)$, принадлежащих A и удовлетворяющих условию $d(M_1, M_2) = |\Delta y| < \delta$. При этом приращение функции

$$\Delta J = \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\, dx$$

удовлетворяет условию

$$|\Delta J| \leqslant \int_a^b |f(x, y+\Delta y) - f(x, y)|\, dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\, dx = \varepsilon.$$

Следовательно, величина ΔJ бесконечно мала при стремлении Δy к нулю, а функция $J(y)$ непрерывна в $[c, d]$.

Теорема 2 (о предельном переходе под знаком интеграла). *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике A, то при любом y_0 из промежутка $[c, d]$ имеет место равенство*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Согласно обозначению (1), теореме 1 и непрерывности $f(x, y)$ по y в точке y_0 последовательно получаем

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)\, dx = \lim_{y \to y_0} J(y) = J(y_0) =$$

$$= \int_a^b f(x, y_0)\, dx = \int_a^b [\lim_{y \to y_0} f(x, y)]\, dx.$$

Теорема 3 (о дифференцировании интеграла по параметру под знаком интеграла). *Если функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике A, то существует в $[c, d]$ производная интеграла* (1) *по y и имеет место формула*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\, dx. \tag{4}$$

Эта формула выражает так называемое правило Лейбница.

Доказательство. Фиксируем y и $y+\Delta y$ в $[c, d]$ и преобразуем с помощью формулы конечных приращений (см. п. 34) разность $f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ в интеграле

$$\Delta J = \int_a^b [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\, dx = \Delta y \int_a^b f'_y(x, y+\theta\Delta y)\, dx.$$

Разделим обе части равенства на Δy и, перейдя к пределу при стремлении Δy к нулю, получим согласно теореме 2 формулу (4)

$$\frac{dJ}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta J}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f'_y(x,\ y+\theta\Delta y)\,dx =$$

$$= \int_a^b [\lim_{\Delta y \to 0} f'_y(x,\ y+\theta\Delta y)]\,dx = \int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx.$$

Рассмотрим интеграл, пределы которого и подынтегральная функция зависят от параметра y:

$$K(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,\ y)\,dx. \tag{5}$$

Теорема 4. *Если* 1) $f(x, y)$ *и* $f'_y(x, y)$ *непрерывны в* A, 2) $a(y)$ *и* $b(y)$ *дифференцируемы в* $[c, d]$ *и принимают значения в* $[a, b]$ *при* $c \leqslant y \leqslant d$, *то производная от интеграла* $K(y)$ *по* y *существует и равна*

$$\frac{dK}{dy} = \int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx + f(b(y),\ y)\,b'(y) - f(a(y),\ y)\,a'(y). \tag{6}$$

Доказательство. Функция $K(y)$ есть сложная функция y: $K(y) = \varphi(y, b(y), a(y))$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dK}{dy} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{dy} + \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{da}{dy}.$$

Согласно теореме 3 $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \int_a^b f'_y(x,\ y)\,dx$; по теореме Барроу имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial b} = f(b,\ y)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial a} = -\frac{\partial}{\partial a}\int_b^a f(x,\ y)\,dx = -f(a,\ y)$. Отсюда следует равенство (6).

Теорема 5 (об интегрировании по параметру под знаком интеграла). *Если функция* $f(x, y)$ *непрерывна в прямоугольнике* A, *то имеет место следующая формула*:

$$\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,\ y)\,dy\right\} dx. \tag{7}$$

Докажем более общее равенство

$$\int_c^\alpha \left\{\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right\} dy = \int_a^b \left\{\int_c^\alpha f(x,\ y)\,dy\right\} dx \tag{8}$$

при любом α из $]c, \partial]$. Для этого прежде всего убедимся в том, что равны производные по α от обеих частей равенства (8).

Действительно, в силу теоремы Барроу, производная от левой части (8) равна $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$. Производная от правой части (8), согласно правилу Лейбница (4) и теореме Барроу, равна

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b \left\{\int_c^\alpha f(x,\ y)\,dy\right\} dx = \int_a^b \left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_c^\alpha f(x,\ y)\,dy\right\} dx = \int_a^b f(x,\ \alpha)\,dx.$$

Поэтому обе части равенства (8) могут отличаться лишь постоянным слагаемым. Но и это слагаемое равно нулю, потому что при $\alpha = c$ обе части (8) равны нулю. Этим доказано тождество (8).

При $\alpha = \partial$ из (8) следует равенство (7). Теорема доказана.

Обе части формулы (7) представляют так называемые *повторные интегралы*. В левой части (7) в н у т р е н н и й и н т е г р а л берется по x и является функцией y, в н е ш н и й и н т е г р а л берется по y в пределах от c до ∂ и есть число. Это же число получится, если интегрировать непрерывную в A функцию в другом порядке — сначала по y от c до ∂, а затем по x от a до b.

Для повторных интегралов принято обозначение

$$\int_a^b \left\{\int_c^\partial f(x,\ y)\,dy\right\} dx = \int_a^b dx \int_c^\partial f(x,\ y)\,dy,$$

$$\int_c^\partial \left\{\int_a^b f(x,\ y)\,dx\right\} dy = \int_c^\partial dy \int_a^b f(x,\ y)\,dx.$$

Пример. Функция $f(x, y) = 6x^2y$ непрерывна в области: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant 3$. Вычислим обе части (7), получим

$$\int_2^3 dy \int_0^1 6x^2y\,dx = \int_2^3 (2x^3y)\Big|_{x=0}^{x=1} dy = \int_2^3 2y\,dy = y^2\Big|_2^3 = 5,$$

$$\int_0^1 dx \int_2^3 6x^2y\,dy = \int_0^1 (3x^2y^2)\Big|_{y=2}^{y=3} dx = \int_0^1 15x^2\,dx = 5x^3\Big|_0^1 = 5.$$

166. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Пусть $f(x, y)$ определена в полосе A: $a \leqslant x < \infty$, $c \leqslant y \leqslant \partial$. Рассмотрим несобственный интеграл, зависящий от параметра:

$$J(y) = \int_a^\infty f(x,\ y)\,dx. \tag{9}$$

Здесь сформулированы * некоторые достаточные условия

* Доказательство см. в работе Г. М. Фихтенгольца «Основы математического анализа», т. II, пп. 304—306.

непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости интеграла (9).

Теорема 1. *Если* 1) $f(x, y)$ *определена и непрерывна (как функция двух переменных) в полосе* A, 2) $\varphi(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a, \infty)$, 3) $|f(x, y)| \leqslant \varphi(x)$ *для всех* $x \geqslant a$ *при всех значениях* y *из* $[c, d]$, *то интеграл* (9) *является непрерывной функцией* y *в* $[c, d]$.

Теорема 2. *Если* 1) $f(x, y)$ *в полосе* A *определена, непрерывна и имеет непрерывную производную* $f'_y(x, y)$, 2) *интеграл* (9) *существует для всех* y *из* $[c, d]$, 3) $\psi(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a, \infty)$, 4) $|f'_y(x, y)| \leqslant \psi(x)$ *для всех* $x \geqslant a$ *при всех значениях* y *из* $[c, d]$, *то при любом* y *из* $[c, d]$ *имеет место формула*

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\,dx. \tag{10}$$

Пример 1. Требуется вычислить $J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$. Здесь выполнены все условия теоремы 2. Несобственный интеграл $J(\alpha)$ существует в силу теоремы 3 п. 162, так как

1) $\left|e^{-x}\frac{\sin \alpha x}{x}\right| < e^{-x}|\alpha|$,

2) $f'_\alpha(x, \alpha) = e^{-x}\cos \alpha x$ и $|f'_\alpha(x, \alpha)| \leqslant e^{-x}$.

Согласно формуле (10) получим

$$J'(\alpha) = \int_0^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\cos \alpha x dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

Следовательно, $J(\alpha) = \int \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = \operatorname{arctg}\alpha + c$. Здесь $c = 0$, потому что при $\alpha = 0$ данный интеграл обращается в нуль. Окончательно имеем $J(\alpha) = \operatorname{arctg}\alpha$.

Пример 2. Интеграл $J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$ сходится при любом $\alpha \neq 0$ и равен $J(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ при $\alpha > 0$*. Но его дифференцировать по формуле (10) нельзя, так как расходится интеграл $\int_0^\infty f'_\alpha(x, \alpha)\,dx = \int_0^\infty \cos \alpha x\,dx$.

Теорема 3. *При условиях теоремы* 1 *имеет место формула*

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{11}$$

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, п. 84.

Теорема 4. *Если* 1) $f(x, y)$ *определена и непрерывна при* $x \geqslant a$, $y \geqslant c$, 2) $|f(x, y)| < \varphi(x)$ *для всех* $x \geqslant a$ *при всех значениях* $y \geqslant c$, $|f(x, y)| < \psi(y)$ *для всех* $y \geqslant c$ *при всех значениях* $x \geqslant a$, 3) $\varphi(x)$ *интегрируема в промежутке* $[a, \infty)$, $\psi(y)$ *интегрируема в промежутке* $[c, \infty)$, 4) *существует хоть один из интегралов*

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty |f(x, y)|\, dx, \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty |f(x, y)|\, dy,$$

то имеет место формула

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\, dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\, dy. \tag{12}$$

Глава X

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В этой главе дано обобщение понятия определенного интеграла на тот случай, когда областью интегрирования является некоторая область плоскости, или некоторая область трехмерного пространства, или вообще область n-мерного пространства. При изложении настоящей главы мы будем пользоваться интуитивным представлением площади и объема и не будем останавливаться на обосновании некоторых рассуждений, связанных с переходом к пределу.*

§ 29. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

167. Задачи, приводящие к двойному интегралу.

Задача о массе плоской пластины. Пусть плоская область A заполнена веществом с известной плотностью $\rho(M)$. Требуется найти массу (количество вещества) всей материальной области — «пластины». Под плотностью вещества в точке M понимается предел средней плотности бесконечно малой части A, содержащей точку M.

Решение задачи состоит в выполнении следующих действий.

1) Разобьем область A произвольными гладкими линиями (рис. 111) на n элементарных частей $\Delta A_1, \ldots, \Delta A_n$, площади которых обозначим через $\Delta F_1, \ldots, \Delta F_n$, диаметры — $d_1, \ldots, d_n$, а наибольший из диаметров обозначим λ_n. Под *диаметром области* здесь и всюду ниже понимается наибольшее расстояние между граничными точками этой области.

2) Желая получить приближенное выражение искомой массы, предположим, что в пределах каждого элемента плотность по-

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, § 9.

стоянна и равна $\rho(N_k)$ для элемента ΔA_k, где N_k — произвольная фиксированная точка этого элемента. При таком условии масса k-го элемента будет приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\Delta F_k$.

3) Для массы всей пластины получим приближенное выражение

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\,\Delta F_k. \tag{1}$$

Точность этого равенства тем выше, чем больше число элементов n и чем меньше диаметр каждого элемента; оба эти условия можно объединить в одном — чем меньше величина λ_n.

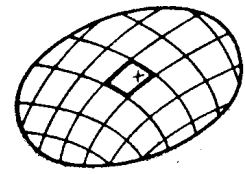

Рис. 111.

4) Масса пластинки (по определению) равна пределу суммы (1) при стремлении λ_n к нулю:

$$m = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\,\Delta F_k = \iint_A \rho(M)\,dF. \tag{2}$$

Пределы такого рода называются *двойными интегралами* и обозначаются так, как указано в правой части равенства (2).

Примечание. Точно так же, как эта задача, решаются задачи о суммарном заряде, распределенном в области A с заданной плотностью $\rho(M)$, о давлении жидкости на дно сосуда, о количестве световой энергии, падающей на площадку A, и многие другие.

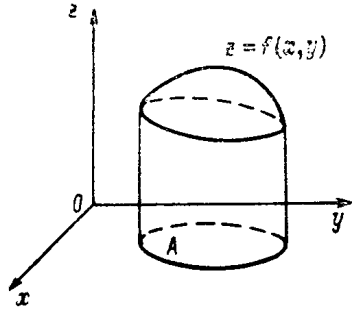

Рис. 112.

Задача об объеме цилиндрического бруса. Пусть дана функция $f(x, y)$, непрерывная и положительная в плоской области A, ограниченной гладким контуром l. Требуется найти объем тела B, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = f(x, y)$ и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которой служит контур l области A (рис. 112). Такое тело называется *цилиндрическим брусом.*

Ниже не только содержится решение задачи, но и дано определение понятия объема цилиндрического бруса.

Разобьем область A произвольными гладкими линиями на n элементарных частей ΔA_1, ΔA_2, . . ., ΔA_n, площади которых обозначим соответственно через ΔF_1, ΔF_2, . . ., ΔF_n, диаметры — d_1, d_2, . . ., d_n, а наибольший из диаметров обозначим символом λ_n. Построим цилиндрические поверхности, направляющими которым служат линии деления области A, а образующие параллельны оси аппликат. Эти цилиндрические поверхности разобьют

цилиндрический брус B на n элементарных частей $\Delta B_1, \Delta B_2, \ldots, \Delta B_n$.

Заменим каждый из элементов $\Delta B_1, \ldots, \Delta B_n$ цилиндром с плоскими основаниями, параллельными плоскости Oxy. Нижнее основание цилиндра пусть совпадает с основанием соответствующего элемента, а высота цилиндра равна одной из аппликат элемента. Объем k-го цилиндра будет равен $f(N_k)\Delta F_k$, где N_k — любая фиксированная точка ΔA_k.

Просуммировав объемы всех цилиндров, получим объем ступенчатого тела, составленного из этих цилиндров:

$$\sigma_n = f(N_1)\,\Delta F_1 + \ldots + f(N_n)\,\Delta F_n. \tag{3}$$

В частности, если в каждой из замкнутых областей ΔA_k выбрать наименьшую из аппликат m_k, а затем наибольшую из аппликат M_k, то можно составить еще два ступенчатых тела с объемами, соответственно равными v_n и V_n, где

$$v_n = m_1\,\Delta F_1 + \ldots + m_n\,\Delta F_n, \quad V_n = M_1\,\Delta F_1 + \ldots + M_n\,\Delta F_n.$$

Первое из этих тел содержится в области B, а второе содержит B, причем $v_n \leqslant \sigma_n \leqslant V_n$.

Желая сблизить величины v_n и V_n, будем увеличивать число n, уменьшая при этом диаметры в с е х элементарных площадок ΔA_k. Пользуясь непрерывностью $f(M)$, можно доказать,* что существуют и равны между собой пределы переменных v_n и V_n при $\lambda_n \to 0$ и эти пределы не зависят от способа деления области A на элементы. Следовательно, переменная σ_n имеет тот же предел: $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} v_n = \lim\limits_{\lambda_n \to 0} V_n = \lim\limits_{\lambda_n \to 0} \sigma_n$.

Под *объемом цилиндрического бруса* B будем понимать предел суммы объемов цилиндров σ_n при стремлении λ_n к нулю:

$$V = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta F_k = \iint\limits_A f(M)\,dF. \tag{4}$$

168. Понятие двойного интеграла. Пусть функция $f(x, y)$ определена в некоторой конечной замкнутой области A, ограниченной гладким или кусочно-гладким контуром l.

Разобьем A произвольными гладкими линиями на n элементарных частей $\Delta A_1, \ldots, \Delta A_n$ с площадями $\Delta F_1, \ldots, \Delta F_n$ соответственно. Множество этих элементарных частей области A назовем *разбиением* δ_n. Обозначим через λ_n наибольший из диаметров элементов $\Delta A_1, \ldots, \Delta A_n$.

Последовательность разбиений $\{\delta_n\}$ будем называть *нормальной*, если $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

---

* См.: В. А. Ильин и Э. Г. Позняк. Основы математического анализа, гл. 11, § 2.

Рассмотрим произвольное разбиение δ_n. Выберем в каждом элементе ΔA_k разбиения δ_n произвольную точку N_k. Составим произведение $f(N_k)\Delta F_k$.

Сумма всех таких произведений

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta F_k \tag{5}$$

называется *интегральной суммой функции* $f(M)$, *соответствующей данному разбиению области* A *и данному выбору точек* N.

Определение. Функция $f(M)$ называется *интегрируемой в области* A, если для каждой нормальной последовательности разбиений $\{\delta_n\}$ соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел, не зависящий от способа деления A на элементарные части и от выбора точек N. Этот предел называется *двойным интегралом от функции* $f(M)$ *по области* A *и обозначается символом*

$$\iint\limits_A f(M)\,dF = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta F_k. \tag{6}$$

Сформулируем теорему * о достаточных условиях интегрируемости функции.

Теорема. *Двойной интеграл* (6) *существует, если в конечной замкнутой области* $\overline{A}$, *ограниченной гладким или кусочно-гладким контуром, функция* $f(x, y)$ *либо непрерывна, либо ограничена и имеет разрывы лишь на конечном числе кусочно-гладких линий.*

Следствие (из определения двойного интеграла). Двойной интеграл от единичной функции равен площади F_A области интегрирования

$$\iint\limits_A dF = F_A. \tag{7}$$

Действительно, если $f(x, y) \equiv 1$ в области A, то $\sigma_n = \sum \Delta F_k = F_A$ и предел постоянной F_A равен этой постоянной.

Всякий двойной интеграл может быть истолкован физически, например как масса соответствующей пластины, и геометрически, например как объем соответствующего цилиндрического бруса, если $f(x, y)$ положительна в области A.

169. Свойства двойного интеграла. Эти свойства аналогичны свойствам определенных интегралов (п. 154) и доказываются, опираясь на определение понятия двойного интеграла, в предположении, что речь идет о функциях, интегрируемых в соответствующих областях.

---

* Доказательство см. в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. II, § 9.

1°. *Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла*:

$$\iint\limits_A cf(M)\,dF = c\iint\limits_A f(M)\,dF.$$

Действительно,

$$\iint\limits_A cf\,dF = \lim \sum\limits_A cf_k\,\Delta F_k = c\lim \sum\limits_A f_k\,\Delta F_k = c\iint\limits_A f\,dF.\ *$$

2°. *Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен соответствующей сумме интегралов от слагаемых.* Например,

$$\iint\limits_A [f(M)+g(M)]\,dF = \iint\limits_A f(M)\,dF + \iint\limits_A g(M)\,dF.$$

Действительно, это равенство получается в результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ в соотношении

$$\sum\limits_A (f_k+g_k)\,\Delta F_k = \sum\limits_A f_k\,\Delta F_k + \sum\limits_A g_k\,\Delta_k.$$

3°. *Если область A разложить на конечное число частей, то двойной интеграл по всей области A равен сумме интегралов по всем ее частям.* Например,

$$\iint\limits_A f(M)\,dF = \iint\limits_{A_1} f(M)\,dF + \iint\limits_{A_2} f(M)\,dF.$$

Действительно, если перейти к пределу при $\lambda_n \to 0$ в равенстве $\sum\limits_A f_k\Delta F_k = \sum\limits_{A_1} f_k\Delta F_k + \sum\limits_{A_2} f_k\Delta F_k$, то получим доказываемое соотношение между интегралами.

4°. *Если в замкнутой области $\overline{A}$ функции $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны и удовлетворяют соотношению $f(M) > g(M)$, то имеет место неравенство* $\iint\limits_A f(M)\,dF > \iint\limits_A g(M)\,dF$.

Действительно, согласно теореме Вейерштрасса (см. п. 123), в области $\overline{A}$ есть точка M_0, в которой функция $\omega(M) = f(M) - g(M)$ достигает наименьшего значения, т. е. выполнено неравенство $\omega(M) \geqslant \omega(M_0) > 0$ для всех точек области A. Соответствующие интегральные суммы для $\omega(M)$ и $\omega(M_0)$ подчинены соотношению $\sigma_n \geqslant \omega(M_0)\,F_A$, где F_A — площадь области A. В результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ в этом неравенстве получим соотношение $\iint\limits_A \omega dF \geqslant \omega(M_0)\,F_A > 0$. Отсюда прямо следует доказываемое неравенство.

Можно доказать, что если $f(M) \geqslant g(M)$, то $\iint\limits_A f dF \geqslant \iint\limits_A g dF$.

---

* Символ $\sum\limits_A f_k\Delta F_k$ означает интегральную сумму для $f(M)$ по области A.

5°. **Теорема** (об оценке интеграла). *Абсолютная величина интеграла не превосходит интеграла от абсолютной величины подынтегральной функции*

$$\left|\iint\limits_A f(M)\,dF\right| \leqslant \iint\limits_A |f(M)|\,dF.$$

Для доказательства достаточно перейти к пределу при $\lambda_n \to 0$ в неравенстве $\left|\sum\limits_A f(N_k)\Delta F_k\right| \leqslant \sum\limits_A |f(N_k)|\,\Delta F_k$.

6°. **Теорема** (о среднем значении). *Если $f(M)$ и $g(M)$ непрерывны в конечной замкнутой области $\bar{A}$ и $g(M)$ знакопостоянна в $\bar{A}$, то имеет место формула*

$$\iint\limits_A f(M)\,g(M)\,dF = f(M_*)\iint\limits_A g(M)\,dF \quad (M_* \in A). \tag{8}$$

В частности, при $g(M) \equiv 1$ в $\bar{A}$ имеем

$$\iint\limits_A f(M)\,dF = f(M_*)\,F_A. \tag{9}$$

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса (см. п. 123), в замкнутой области $\bar{A}$ функция $f(M)$ достигает своего наименьшего значения p и наибольшего значения q. Поэтому выполняется неравенство $p \leqslant f(M) \leqslant q$. Умножим его на $g(M)$ (пусть для определенности $g(M) > 0$) и, интегрируя по области A, получим

$$p\iint\limits_A g\,dF \leqslant \iint\limits_A fg\,dF \leqslant q\iint\limits_A g\,dF.$$

Разделим все члены этого неравенства на двойной интеграл от $g(M)$. Получим $p \leqslant \mu \leqslant q$, где

$$\mu = \frac{1}{\iint\limits_A g\,dF}\iint\limits_A fg\,dF. \tag{10}$$

Здесь, в силу теоремы Коши (см. п. 123), число μ есть одно из значений функции $f(M)$ в $\bar{A}$, т. е. $\mu = f(M_*)$, где $M_* \in A$. Поэтому из (10) следует формула (8). Теорема доказана.

В соответствии с равенством (9) под *средним значением функции* $y = f(M)$ в области A понимают отношение двойного интеграла к площади области A:

$$\bar{y} = \frac{1}{F_A}\iint\limits_A f(M)\,dF$$

170. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике A,

заданном неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant \partial$. Данная функция интегрируема в A, поэтому двойной интеграл от $f(x, y)$ по области A не зависит от способа деления A на элементы и от выбора точек N_k. Разобьем A на элементы прямыми, параллельными координатным осям (рис. 113) и проходящими через точки $x_1, \ldots, x_{m-1}$ оси Ox и точки $y_1, \ldots, y_{p-1}$ оси Oy. Тогда площадь элемента ΔA_k будет равна $\Delta F_k = \Delta x_i \Delta y_j$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Выберем в ΔA_k точку $N_k(x_i, y_j)$.

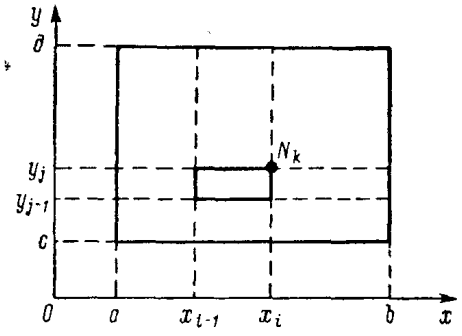

Рис. 113.

Интегральную сумму σ_n представим в виде следующей повторной суммы:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta F_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j)\,\Delta y_j.$$

Внутренняя сумма при каждом фиксированном i есть интегральная сумма для функции одной переменной $f(x_i, y)$, которая непрерывна и, следовательно, интегрируема в $[c, \partial]$. Эта сумма при $\lambda_{1p} \to 0$ (где λ_{1p} — наибольшее из $|\Delta y_1|, \ldots, |\Delta y_p|$) имеет конечный предел, равный

$$\lim_{\lambda_{1p} \to 0} \sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j)\,\Delta y_j = \int_c^{\partial} f(x_i, y)\,dy = \Phi(x_i), \tag{11}$$

где $\Phi(x) = \int_c^{\partial} f(x, y)\,dy$. Отсюда следует равенство

$$\sum_{j=1}^{p} f(x_i, y_j)\,\Delta y_i = \Phi(x_i) + \alpha_i, \tag{12}$$

где α_i — бесконечно малая при $\lambda_{1p} \to 0$. Теперь σ_n можно представить в виде

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{m} \Phi(x_i)\,\Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\,\Delta x_i. \tag{13}$$

Докажем, что второе слагаемое правой части (13) стремится к нулю при $\lambda_{1p} \to 0$. Из (11) и (12) следует, что

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} \left[f(x_i, y_j)\,\Delta y_j - \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i, y)\,dy \right].$$

Преобразовав каждый из этих интегралов по теореме о среднем, получим

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p} |f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j*})| \Delta y_j.$$

Пусть ε — любое положительное число. Согласно равномерной непрерывности $f(x_i, y)$ в промежутке $[c, \partial]$ существует число $\delta > 0$ такое, что $|f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j*})| < \varepsilon$ при $|\lambda_{1p}| < \delta$. Поэтому имеем $|\alpha_i| < \varepsilon \sum_{j=1}^{p} \Delta y_j = \varepsilon(\partial - c)$. Следовательно,

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \Delta x_i \right| < \varepsilon(\partial - c) \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i = \varepsilon(\partial - c)(b - a),$$

и наше утверждение доказано.

Первое слагаемое правой части равенства (13) при $\lambda_{2m} \to 0$, где λ_{2m} — наибольшее из $\{|\Delta x_i|\}$, имеет предел, равный

$$\lim_{\lambda_{2m} \to 0} \sum_{i=1}^{m} \Phi(x_i) \Delta x_i = \int_a^b \Phi(x)\, dx,$$

так как $\Phi(x)$ непрерывна.

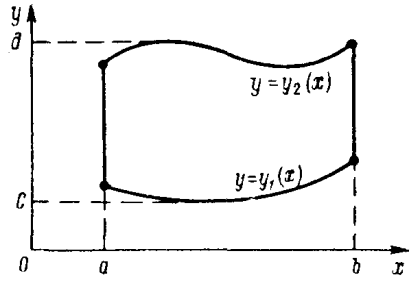

Рис. 114.

Отсюда следует, что если диаметры всех элементов ΔA_k стремятся к нулю (при этом $\lambda_{1p} \to 0$ и $\lambda_{2m} \to 0$), то предел σ_n равен $\int_a^b \Phi(x)\, dx$. Принимая во внимание определение $\Phi(x)$, получим окончательно

$$\iint_A f(x, y)\, dF = \int_a^b dx \int_c^{\partial} f(x, y)\, dy. \qquad (14)$$

Таким образом, вычисление двойного интеграла сведено к вычислению соответствующего повторного интеграла. Можно доказать, что формула (14) верна и для кусочно-непрерывной функции $f(x, y)$.

Случай криволинейной области. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна или кусочно-непрерывна в области A, заданной неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \qquad (15)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны в $[a, b]$. Заключим область интегрирования A в прямоугольник B: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant \partial$, где c — наименьшее значение $y_1(x)$ в $[a, b]$, а ∂ — наибольшее значение

$y_2(x)$ в $[a, b]$ (рис. 114). Определим в этом прямоугольнике функцию $f_*(x, y)$ следующими равенствами:

$$f_*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если точка } (x, y) \text{ принадлежит } A, \\ 0 & \text{во всех других точках прямоугольника } B. \end{cases}$$

Функция $f_*(x, y)$ кусочно-непрерывна в прямоугольнике B. Согласно формуле (14) имеем

$$\iint\limits_B f_*(x, y)\, dF = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\partial f_*(x, y)\, dy.$$

Отсюда следует формула

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dF = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{16}$$

Действительно, в соответствии с определением $f_*(x, y)$ имеем

1) $$\iint\limits_B f_*\, dF = \iint\limits_A f_*\, dF + \iint\limits_{B-A} f_*\, dF = \iint\limits_A f(x, y)\, dF,$$

2) $$\int\limits_c^\partial f_*\, dy = \int\limits_c^{y_1} f_*\, dy + \int\limits_{y_1}^{y_2} f_*\, dy + \int\limits_{y_2}^\partial f_*\, dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} f\, dy,$$

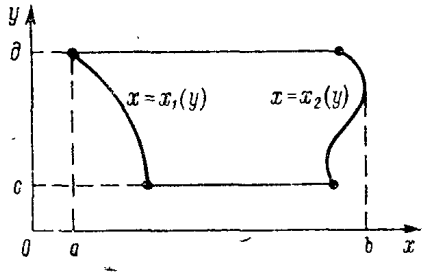

Рис. 115.

потому что равны нулю интегралы по области $B - A$ и по промежуткам $[c, y_1]$ и $[y_2, \partial]$, где $f_* = 0$. Отсюда следует равенство (16).

Если область интегрирования задана неравенствами $c \leqslant y \leqslant \partial$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$ (рис. 115), то, меняя в формуле (16) роли x и y, придем к аналогичной формуле

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dF = \int\limits_c^\partial dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx. \tag{17}$$

В частности, если область интегрирования есть прямоугольник $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant \partial$, то согласно (14) и (17) имеем

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^\partial f(x, y)\, dy = \int\limits_c^\partial dy \int\limits_a^b f(x, y)\, dx.$$

Выражение $dF = dx\, dy$ называется *элементом площади в декартовых прямоугольных координатах.*

Сформулируем основную формулу (16) в виде правила приведения двойного интеграла к повторному. Пусть область A пере-

секается прямыми, параллельными оси Oy, не более чем в двух точках.

1) Проектируем область A (т. е. все ее точки) на ось Ox; получим промежуток $[a, b]$, в котором изменяется переменная x.

2) Составим уравнения контура области A : $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. Для этого при каждом фиксированном в $[a, b]$ значении x_0 проводим прямую $x = x_0$, параллельную оси Oy, и находим ординаты $y_1(x_0)$ и $y_2(x_0)$ точек пересечения этой прямой с контуром l.

3) Составим повторный интеграл согласно (16).

Формулы (16) и (17) выведены при условии, что область интегрирования A пересекается прямыми, параллельными оси Oy (соответственно Ox), не более чем в двух точках. Если это условие нарушено, то A разбивают на части рассмотренного выше вида, вычисляют интегралы по этим частям и, сложив результаты, получают интеграл по всей области A.

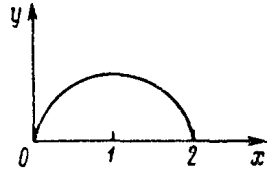

Рис. 116.

Пример. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = 2xy$ по замкнутой области $\overline{A}$, определенной неравенствами $x^2 + y^2 \leqslant 2x$ и $y \geqslant 0$. Первое из этих неравенств определяет круг, ограниченный окружностью $(x - 1)^2 + y^2 = 1$; второе неравенство определяет верхнюю полуплоскость, включая ось абсцисс. Поэтому область A есть полукруг (рис. 116). Границу области можно представить уравнениями $y = 0$ и $y = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$. По формуле (16) имеем

$$J = \iint\limits_A 2xy\, dF = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} 2xy\, dy.$$

Последовательно интегрируя, получаем

$$J = \int\limits_0^2 (xy^2) \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} dx = \int\limits_0^2 x\,(2x - x^2)\, dx = \frac{4}{3}.$$

Этот же двойной интеграл можно вычислить по формуле (17)

$$J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=1+\sqrt{1-y^2}} 2xy\, dx = \int\limits_0^1 y\,[(1 + \sqrt{1 - y^2})^2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})^2]\, dy =$$

$$= 4 \int\limits_0^1 y \sqrt{1 - y^2}\, dy = \frac{4}{3}.$$

171. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах. При вычислении двойного интеграла (6) в полярных координатах область A разбивается на элементы координатными линиями полярной системы координат, т. е. дугами окружностей с центром в полюсе и лучами, исходящими из полюса (рис. 117). Такое

разбиение допустимо потому, что $f(x, y)$ интегрируема в A, и поэтому величина интеграла не зависит от способа разбиения области A на элементы.

Две пары близких координатных линий r и $r + \Delta r$, φ и $\varphi + \Delta\varphi$ ограничивают элементарную часть области A, представляющую криволинейный четырехугольник. Его можно принять приближенно за прямоугольник со сторонами Δr и $r\Delta\varphi$, площадь которого равна $\Delta F = r\Delta r\Delta\varphi$. Поэтому двойной интеграл (6) можно представить в полярных координатах в виде такого предела:

$$J = \iint\limits_A f(x, y)\,dF = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_A f(x_k, y_k)\,\Delta F_k =$$

$$= \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_A f(r_k \cos\varphi_k, r_k \sin\varphi_k)\, r_k\, \Delta r_k\, \Delta\varphi_k.$$

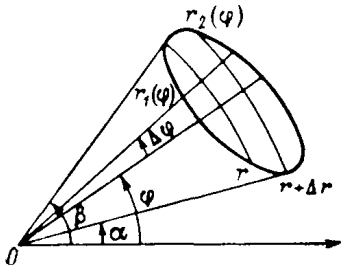

Рис. 117.

Здесь правая часть есть двойной интеграл от функции $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r$. Отсюда следует формула вычисления двойного интеграла в полярных координатах

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dF =$$

$$= \iint\limits_A f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi. \qquad (18)$$

Выражение $dF = r\,dr\,d\varphi$ называется *элементом площади в полярных координатах.*

Для вычисления интеграла (18) путем сведения его к повторному интегралу можно применить правило п. 170, учитывая, что роль переменных интегрирования играют r и φ. Таким образом, приходим к равенству

$$\iint\limits_A f(x, y)\,dF = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr, \qquad (19)$$

где α и β — соответственно наименьшее и наибольшее значения переменной φ в области A; $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$ — уравнения границы A (см. рис. 117).

В случае, когда область A ограничена координатными линиями полярной системы координат $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $r = r_1$, $r = r_2$, пределы интегрирования в формуле (19) получатся постоянными. Именно поэтому вычисление двойного интеграла в таких случаях целесообразно, вообще говоря, в полярных координатах.

Пример 1. Вычислим интеграл примера п. 170 в полярных координатах. Полюс выберем в точке (1, 0), т. е. в центре полукруга A, а полярную ось направим вдоль положительного направления оси Ox. В этой системе координат область A характеризуется неравенствами $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Формулы связи с декартовыми координатами суть $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. В полярных координатах получим

$$J = \iint\limits_A 2xy\,dF = \int\int\limits_A 2(1 + r\cos\varphi)\, r\sin\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^1 r^2(1 + r\cos\varphi)\,dr = 2\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cos\varphi\right)d\varphi = \frac{4}{3}.$$

Пример 2. Если $f(x, y) \equiv 1$ внутри круга $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, то по формуле (19) получим, что площадь круга равна

$$\iint\limits_A dF = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\,dr = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \pi R^2.$$

172. Интеграл Эйлера—Пуассона.* Так называется следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx. \tag{20}$$

Он встречается, например, в теории вероятностей и статистической физике. Докажем, что он сходится, и найдем его величину. Для этого рассмотрим переменную $e^{-x^2-y^2}$ в областях A, B и C (рис. 118), где A — четверть круга радиусом R, B — квадрат со стороною R, содержащий A, и C — четверть круга радиусом $R\sqrt{2}$, содержащая B.

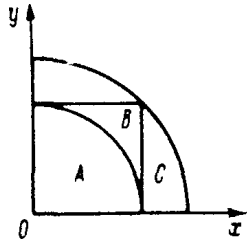

Рис. 118.

Согласно свойству 3° двойного интеграла и положительности подынтегральной функции имеем

$$\iint\limits_A e^{-x^2-y^2}\,dF < \iint\limits_B e^{-x^2-y^2}\,dF < \iint\limits_C e^{-x^2-y^2}\,dF. \tag{21}$$

Интегралы по областям A и C вычислим в полярных координатах

$$\iint\limits_A e^{-x^2-y^2}\,dF = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

$$\iint\limits_C e^{-x^2-y^2}\,dF = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2R^2}\right).$$

Интеграл по области B сведем к квадрату определенного интеграла

$$\iint\limits_B e^{-x^2-y^2}\,dF = \int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx \int\limits_0^R e^{-y^2}\,dy = \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

---

* Симон Дени Пуассон (1781—1840) — французский математик и физик.

Соотношение (21) теперь примет вид

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)<\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2<\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

Крайние члены этого неравенства при $R\to\infty$ стремятся к $\frac{\pi}{4}$. Поэтому в силу теоремы о пределе сжатой переменной (см. п. 15) средний член неравенства имеет тот же предел, что и крайние члены. Следовательно, сходится интеграл (20) и он равен

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{22}$$

173. Системы криволинейных координат на плоскости. Под системой координат понимают совокупность условий, определяющих положение точек линии, поверхности или пространства с помощью систем чисел. Эти числа называются координатами точки в соответствующей системе координат (см. начало гл. IV, а также пп. 62, 89, 97).

Рассмотрим две системы координат на плоскости — декартову прямоугольную систему (x, y) и какую-либо другую систему (u, v). Обозначим через x и y координаты точки M в системе (x, y), а через u и v — координаты этой точки в системе (u, v).

Докажем, что имеет место функциональная зависимость между координатами точек плоскости в рассматриваемых системах

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v), \tag{23}$$

$$u=u(x, y),\quad v=v(x, y). \tag{24}$$

Действительно, паре чисел u, v соответствует точка M, а точке M соответствует пара чисел x, y; отсюда следуют зависимости (23). Так же устанавливаются функциональные зависимости (24).

Предположим, что правые части равенств (23) и (24) суть непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов, а функциональный определитель $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ не обращается в нуль ни в одной точке плоскости, отличной от начала координат.

Координатной линией системы координат (u, v) называется геометрическое место точек, где координата u или v сохраняет постоянное значение. Пусть точка M_0 имеет координаты u_0 и v_0 в системе (u, v). Через точку M_0 проходят две координатные линии $u=u_0$ и $v=v_0$. Уравнения этих координатных линий в декартовой системе координат суть $u(x, y)=u_0$ и $v(x, y)=v_0$.

Параметрические уравнения этих координатных линий получим с помощью равенств (23); уравнения линии u: $x=x(u_0, v)$, $y=y(u_0, v)$, уравнения линии v: $x=x(u, v_0)$, $y=y(u, v_0)$.

Две координатные линии одного семейства, например $u=u_0$

и $u = u_1 \neq u_0$, не имеют общих точек, потому что в противном случае в общей точке координата u имела бы два различных значения u_0 и u_1, что противоречит условию определенности координат в каждой точке плоскости.

Каждая координатная линия одного семейства пересекается с каждой линией второго семейства, и притом только в одной точке. Действительно, координатные линии $u = u_1$ и $v = v_1$ пересекаются в точке $M_1(u_1, v_1)$ и только в ней. Если бы они пересекались еще в точке M_2, отличающейся от M_1, то точка M_2 имела бы те же координаты, что и M_1; это противоречит определению систем координат.

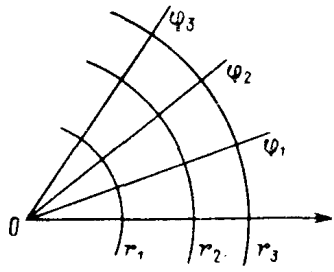

Рис. 119.

Через каждую точку M_0 плоскости проходят только две пересекающиеся координатные линии различных семейств $u = u_0$ и $v = v_0$, которые и определяют координаты u_0 и v_0 точки M_0 в системе (u, v).

Например, в декартовой системе координат координатными линиями служат прямые, параллельные координатным осям. В полярной системе координат координатными линиями являются полупрямые, исходящие из полюса системы, и окружности с центром в полюсе (рис. 119); через каждую точку M_0 плоскости, кроме полюса, проходят две координатные линии различных семейств $\varphi = \varphi_0$ и $r = r_0$, которые пересекаются под прямым углом.

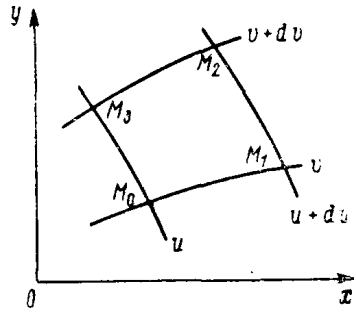

Рис. 120.

Система координат называется *ортогональной*, если ее координатные линии пересекаются только под прямым углом. Ортогональными являются, например, декартова прямоугольная и полярная системы координат.

Система координат называется *криволинейной*, если среди ее координатных линий имеются кривые. Например, полярная система координат — криволинейная, а декартова система — прямолинейная.

Элемент площади в криволинейных координатах. Рассмотрим плоскую фигуру $M_0M_1M_2M_3$ (рис. 120), ограниченную двумя парами бесконечно близких координатных линий, которые определяются соответственно уравнениями $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$. Площадь ΔF этой фигуры зависит от координат u_0 и v_0 точки M_0 и приращений координат du и dv. Величины M_0M_1 и M_0M_3 суть приращения дуг координатных линий, соответствующие изменению координаты u на величину du и v на dv. Координаты вершин рассматриваемого криволинейного четырехугольника найдем

с помощью формулы Тейлора (сохранив в ней лишь младшие члены разложения). Получим с точностью до бесконечно малых высших порядков следующие приближенные выражения:

$$x_0 = x(u_0,\ v_0), \qquad y_0 = y(u_0,\ v_0), \qquad M_0$$

$$x_1 = x(u_0 + du,\ v_0) \approx x_0 + x'_u\,du,\ y_1 \approx y_0 + y'_u\,du,\ N_1$$

$$x_2 = x(u_0 + du,\ v_0 + dv) \approx x_0 + x'_u\,du + x'_v\,dv,$$

$$y_2 = y(u_0 + du,\ v_0 + dv) \approx y_0 + y'_u\,du + y'_v\,dv, \qquad N_2$$

$$x_3 = x(u_0,\ v_0 + dv) \approx x_0 + x'_v\,dv,\quad y_3 \approx y_0 + y'_v\,dv.\ N_3$$

Справа имеем координаты некоторых точек M_0, N_1, N_2 и N_3.

Отсюда следует, что четырехугольник $M_0M_1M_2M_3$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков) есть параллелограмм $M_0N_1N_2N_3$. Действительно,

$$x_2 - x_1 = x'_v\,dv = x_3 - x_0, \quad y_2 - y_1 = y'_v\,dv = y_3 - y_0.$$

Следовательно, отрезки N_1N_2 и M_0N_3 равны и одинаково направлены; то же верно и для отрезков M_0N_1 и N_3N_2; отсюда следует наше утверждение.

Определение. Величина площади указанного параллелограмма называется *элементом площади в криволинейных координатах*. Обозначим ее dF.

Для нахождения этой величины воспользуемся выражением площади треугольника в виде определителя (см. п. 67)

$$dF = 2S_{\Delta N_1N_2N_3} = \pm\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\begin{vmatrix} x'_u\,du, & -x'_v\,dv \\ y'_u\,du, & -y'_v\,dv \end{vmatrix} = \mp\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} du\,dv.$$

Получено следующее *выражение элемента площади в криволинейных координатах*:

$$dF = |D|\,du\,dv, \tag{25}$$

где D есть функциональный определитель, соответствующий переходу от криволинейных координат к декартовым по формулам (23)

$$D = \frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}. \tag{26}$$

В частности, в декартовых координатах имеем $u = x$, $v = y$, поэтому $D = 1$ и

$$dF = dx\,dy. \tag{27}$$

В полярных координатах имеем $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, поэтому $D = r$, и согласно (25) элемент площади в полярных координатах равен

$$dF = r\,dr\,d\varphi. \tag{28}$$

Замечание. Формула (25) позволяет выяснить геометрический смысл якобиана D. Рассмотрим отображение области B плоскости Ouv (в которой u и v трактуются как декартовы координаты) на область A плоскости Oxy, определяемое формулами (23). Это отображение переводит лежащий в B бесконечно малый прямоугольник, ограниченный прямыми $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$ и имеющий площадь $dF = du\,dv$, в параллелограмм, площадь которого согласно (25) равна $dF_1 = |D|\,du\,dv = |D|\,dF$. Следовательно, $|D|$ представляет собой *коэффициент растяжения площади* в точке (u_0, v_0) при отображении области B на A согласно равенствам (23).

Пример. Преобразование $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ переводит прямоугольник B: $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant R$ плоскости $O\varphi r$ в четверть круга A: $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ плоскости Oxy. В этом случае $D = r$. Поэтому элементарные прямоугольники области B, соответствующие разным r, преобразуются в четырехугольники области A, имеющие разные площади.

174. Вычисление двойного интеграла в криволинейных координатах. Задача состоит в том, чтобы в двойном интеграле (6) перейти к криволинейным координатам u, v, которые связаны с декартовыми координатами x, y формулами (23).

Пусть правые части формул (23) удовлетворяют условиям, сформулированным в п. 173. Предположим, что функция $f(x, y)$ интегрируема в области A, ограниченной гладким (или кусочно-гладким контуром). Это условие обеспечивает существование рассматриваемого интеграла и тем самым независимость его от способа деления области A на элементарные части.

Для решения поставленной задачи разделим A на элементы координатными линиями системы координат (u, v). При этом получим элементы двух видов: 1) элементы ΔA, ограниченные только координатными линиями, и 2) $\Delta A'$, ограниченные не только координатными линиями. Элементы вида $\Delta A'$ мы не будем принимать во внимание при составлении интегральной суммы, потому что они не окажут влияния на величину двойного интеграла.

Элементы вида ΔA мы заменим параллелограммами, о которых шла речь в конце п. 173 и для площадей которых dF установлена формула (25). Такая замена криволинейных четырехугольников соответствующими бесконечно близкими параллелограммами также не окажет влияния * на величину двойного интеграла.

---

* См.: Б. М. Будак и С. В. Фомин. Кратные интегралы и ряды.

Таким образом, с помощью определения двойного интеграла и формул (23) и (25) получим

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dF = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_A f(x_k, y_k)\, \Delta F_k =$$

$$= \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_A f(x(u_k, v_k), y(u_k, v_k))\, |D|\, \Delta u_k\, \Delta v_k.$$

Здесь правая часть есть предел интегральной суммы по области A для функции $f(x(u, v), y(u, v))\, |D(u, v)|$. Поэтому окончательно имеем

$$\iint\limits_A f(x, y)\, dF = \iint\limits_A f(x(u, v), y(u, v))\, |D(u, v)|\, du\, dv. \quad (29)$$

Формула (29) называется *формулой замены переменных в двойном интеграле*. Пределы интегрирования по переменным u и v зависят от вида области A и определяются аналогично тому, как это было указано в п. 171 для случая полярных координат.

Примечание. Иногда переменные u и v трактуют как прямоугольные координаты, и тогда формулы (24) дают преобразование плоскости, при котором точка, имевшая прямоугольные координаты x и y, преобразуется в точку с прямоугольными координатами u и v. Такое преобразование отображает область A в новую область A_1. При такой точке зрения интеграл в правой части (29) берется по области A_1.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Введем обобщенные полярные координаты, положив $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. В этой системе координат эллипс является координатной линией $r = 1$. В нашем случае якобиан равен

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} +a\cos\varphi, & -ar\sin\varphi \\ b\sin\varphi, & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr,$$

и по формуле (29) получим

$$F = \iint\limits_A dF = \iint\limits_A abr\, dr\, d\varphi = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\, dr = \pi ab. \quad (30)$$

175. Приложения двойного интеграла. Приложения двойного интеграла в науке и технике необъятны. С некоторыми из них мы встретились в п. 167. Остановимся на некоторых приложениях в механике.

Рассмотрим материальную поверхность, т. е. плоскую область A, на которой распределено некоторое вещество с плотностью $\rho(M)$ (см. п. 167). Функция $\rho(M)$ предполагается непрерывной или по крайней мере интегрируемой в A. Разобьем A на элементарные части. Элементарная масса равна $dm = \rho dF$. Элементарные статические моменты относительно координатных осей определяются равенствами

$$dS_x = y\, dm, \quad dS_y = x\, dm.$$

Поэтому для всей области A получим

$$m=\iint\limits_A \rho\, dF,\quad S_x=\iint\limits_A y\rho\, dF,\quad S_y=\iint\limits_A x\rho\, dF. \tag{31}$$

Согласно определению центра тяжести системы материальных точек (см. п. 161) выполняются условия $mx_C = S_y$, $my_C = S_x$. Следовательно, центр тяжести материальной области A имеет координаты

$$x_C=\frac{S_y}{m},\quad y_C=\frac{S_x}{m}, \tag{32}$$

где величины, входящие в правые части, определяются формулами (31).

Элементарные *моменты инерции относительно координатных осей* определяются равенствами

$$dJ_x=y^2\,dm,\quad dJ_y=x^2\,dm.$$

Поэтому моменты инерции всей фигуры будут равны

$$J_x=\iint\limits_A y^2\rho\, dF,\quad J_y=\iint\limits_B x^2\rho\, dF. \tag{33}$$

Пример. Для однородного ($\rho=1$) полукруга $x^2+y^2\leqslant R^2$, $y\geqslant 0$, имеем

$$S_y=\iint\limits_A x\,dF=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{R} r^2\cos\varphi\, dr=0,$$

$$J_y=\iint\limits_A x^2 dF=\int\limits_0^{\pi} d\varphi\int\limits_0^{R}(r\cos\varphi)^2\, r\, dr=\frac{1}{8}\pi R^4.$$

§ 30. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

176. Понятие тройного интеграла. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой трехмерной конечной замкнутой области B, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью S.

Разобьем B произвольными гладкими поверхностями на n элементарных частей $\Delta B_1, \ldots, \Delta B_n$ с объемами $\Delta\tau_1, \ldots, \Delta\tau_n$ соответственно. Множество этих элементарных частей области B назовем *разбиением* δ_n. Обозначим через λ_n наибольший из диаметров элементов $\Delta B_1, \ldots, \Delta B_n$.

Последовательность разбиений $\{\delta_n\}$ будем называть *нормальной*, если $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$.

Рассмотрим произвольное разбиение δ_n. Выберем произвольным образом в каждой элементарной части ΔB_k, входящей в состав

разбиения, по одной точке N_k. Составим произведение $f(N_k)\Delta\tau_k$.

Сумма всех таких произведений

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\tau_k \tag{1}$$

называется *интегральной суммой функции* $f(M)$, *соответствующей данному разбиению области* B *и данному выбору точек* N.

Определение. Функция $f(M)$ называется *интегрируемой в области* B, если для каждой нормальной последовательности разбиений $\{\delta_n\}$ соответствующая последовательность интегральных сумм $\{\sigma_n\}$ имеет конечный предел, не зависящий от способа деления B на элементарные части и от выбора точек N. Этот предел называется *тройным интегралом от функции* $f(M)$ *по области* B и обозначается символом

$$\iiint_B f(M)\,d\tau = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\tau_k. \tag{2}$$

Теорема. *Функция* $f(M)$ *интегрируема в конечной замкнутой области* B, *если* $f(M)$ *либо непрерывна в* B, *либо ограничена и имеет разрывы лишь на конечном числе кусочно-гладких поверхностей.**

Аналогично определяется многомерный интеграл от функции n переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ по n-мерной области D как предел соответствующей интегральной суммы

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{D} f(x_1, \ldots, x_n)\,d\omega = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\,\Delta\omega_k.$$

Следствие. Из определения следует, что при $f(M) \equiv 1$ в B интегральная сумма $\sigma_n = \sum \Delta\tau_k = V_B$ постоянна и равна объему области B. Поэтому тройной интеграл от единичной функции равен объему области интегрирования

$$\iiint_B d\tau = V_B. \tag{3}$$

Одно из возможных физических истолкований тройного интеграла заключается в следующем. Пусть в области B распределено вещество с плотностью $\rho(M)$. Требуется определить массу (количество) вещества, содержащегося во всей области B. Задача решается путем деления B на элементы ΔB_k. Приближенно масса элемента ΔB_k равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\Delta\tau_k$, а масса всего тела равна

* Доказательство см. в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. II, § 9.

$m \approx \sum_k \rho(N_k)\Delta\tau_k$. В результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ получим точное значение искомой величины

$$m = \iiint_B \rho(M)\, d\tau.$$

Каждый тройной интеграл (2) можно трактовать, например, как количество некоторой физической величины, распределенной в области B с плотностью $\rho(M)$.

Тройные интегралы обладают свойствами, аналогичными свойствам двойных интегралов (п. 169). Эти свойства устанавливаются на основе определения так же, как в п. 169 были установлены свойства двойных интегралов.

177. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Предположим, что область B пересекается прямыми, параллельными координатной оси Oz, не более чем в двух точках.

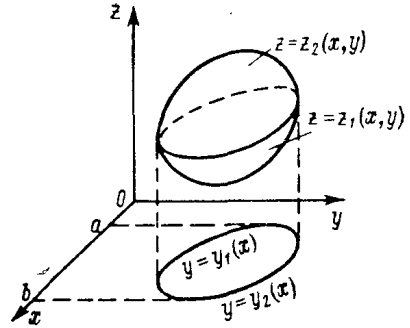

Рис. 121.

Теорема. *Пусть $f(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области B, ограниченной поверхностями* 1) $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ *с непрерывными правыми частями в замкнутой области $\overline{A}$ плоскости Oxy, ограниченной кусочно-гладким контуром l, и* 2) *цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, направляющей которой служит l* (рис. 121).

При этих условиях имеет место формула

$$\iiint_B f(x, y, z)\, d\tau = \iint_A dF \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (4)$$

Теорема эта является обобщением теоремы о вычислении двойного интеграла в декартовых координатах (п. 170) и может быть доказана * аналогично.

Если при этом область A ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, то, перейдя согласно (16) п. 170 в формуле (4) от двойного интеграла к повторному, получим формулу

$$\iiint_B f(x, y, z)\, d\tau = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (5)$$

Согласно (5) вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов, из которых

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, § 6.

внутренний интеграл зависит от параметров x и y, следующий — промежуточный интеграл — зависит от x, внешний интеграл вычисляется по переменной x, имеет постоянные пределы и есть постоянная величина.

В частности, если область B есть параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям, то в формуле (5) пределы интегрирования будут постоянными:

$$\iiint_B f(M)\,d\tau = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_h^H f(M)\,dz. \qquad (6)$$

Отсюда следует правило приведения тройного интеграла (2) к повторному. С целью нахождения пределов интегрирования для повторного интеграла (5) надо: 1) спроектировать данную область B на плоскость Oxy (получим область A); проектируя A на ось абсцисс, получим промежуток $[a, b]$, 2) составить уравнения контура l области A: $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, 3) составить уравнения поверхности S, ограничивающей область B: $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ в A.

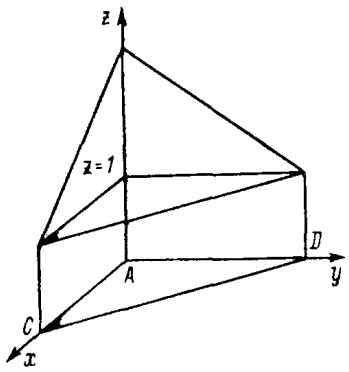

Рис. 122.

Если область B пересекается прямыми, параллельными координатным осям более чем в двух точках, то для вычисления интеграла (2) надо разбить область B поверхностями на части рассмотренного вида, вычислить интеграл по всем таким частям области B и результаты сложить.

Пример. Вычислить $J = \iiint_B 24x\,d\tau$, где B — пирамида, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$, $x + y + z = 2$ (рис. 122). Область A здесь треугольник со сторонами $x = 0$, $y = 0$ и $x + y = 1$. Проекция A на ось абсцисс есть промежуток $0 \leqslant x \leqslant 1$. Уравнение прямой CD : $y = 1 - x$.

Область B ограничена снизу плоскостью $z = 1$, сверху — плоскостью $z = 2 - x - y$. По формуле (5) получим

$$J = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_1^{2-x-y} 24x\,dz = 24 \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy =$$

$$= 12 \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = 1.$$

178. Системы криволинейных координат в пространстве. Некоторые начальные сведения о системах координат содержатся в п. 173, именно понятие системы координат, понятие координат точки. Любая система координат в пространстве характеризуется тремя семействами координатных поверхностей и тремя семействами координатных линий.

Координатной поверхностью системы координат (u, v, w) называется геометрическое место точек, где координата u, v или w сохраняет постоянное значение. Через каждую точку пространства $M_0(u_0, v_0, w_0)$ проходят три пересекающиеся координатные поверхности $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$.

Координатной линией системы координат называется линия пересечения координатных поверхностей этой системы. Поскольку координатные поверхности одного семейства не имеют общих точек, то здесь речь идет о пересечении координатных поверхностей различных семейств. Так, координатная линия u есть линия пересечения поверхностей $v = v_0$ и $w = w_0$; на этой линии изменяется лишь величина u, а v и w сохраняют постоянные значения. Через каждую точку пространства проходят три пересекающиеся координатные линии системы (u, v, w).

Система координат называется *ортогональной*, если ее координатные линии пересекаются только под прямым углом. Система координат называется *криволинейной*, если среди ее координатных линий есть не прямые линии. Например, цилиндрическая и сферические системы есть ортогональные криволинейные системы координат (см. п. 97).

Рассмотрим в трехмерном пространстве две системы координат: декартову прямоугольную систему (x, y, z) и какую-либо иную систему (u, v, w). Между множеством точек пространства и каждым из множеств троек вещественных чисел $\{x, y, z\}$ и $\{u, v, w\}$ имеет место взаимно-однозначное соответствие. Отсюда следует существование функциональных зависимостей

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \tag{7}$$

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z), \tag{8}$$

правые части которых предполагаются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов, а функциональный определитель $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}$ — не обращающимся в нуль вне начала координат.

Зависимости (7) и (8) взаимно-обратны, поэтому имеют место тождества

$$x = x(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \text{ и др.} \tag{9}$$

Элементы дуг координатных линий. Рассмотрим координатные линии системы (u, v, w), проходящие через точку M_0. Параметрические уравнения, например координатной линии u, получим, положив в (7) $v = v_0$, $w = w_0$:

$$x = x(u, v_0, w_0), \quad y = y(u, v_0, w_0), \quad z = z(u, v_0, w_0). \tag{10}$$

Под *элементами дуг координатных линий* понимают дифференциалы длин дуг этих линий

$$ds_u = s'_u du, \quad ds_v = s'_v dv, \quad ds_w = s'_w dw. \tag{11}$$

Пользуясь известным выражением длины дуги линии, заданной параметрически (см. п. 159):

$$s = \int_{u_0}^{u} \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\, du,$$

путем дифференцирования этого равенства получим выражение дифференциала дуги координатной линии u, соответствующее изменению параметра u на величину du:

$$ds_u = \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u}\, du. \tag{12}$$

Таким образом, получим

$$ds_u = H_u\, du, \quad ds_v = H_v\, dv, \quad ds_w = H_w\, d_w, \tag{13}$$

где

$$H_u = \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u},$$

$$H_v = \sqrt{x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v},$$

$$H_w = \sqrt{x'^2_w + y'^2_w + z'^2_w}. \tag{14}$$

Величины H_u, H_v и H_w, определяемые формулами (14), называются *коэффициентами Ламе* * *системы координат* (u, v, w). Эти величины суть функции u, v и w. Каждый коэффициент Ламе характеризует скорость изменения длины дуги соответствующей координатной линии. Например, $H_u = \frac{ds_u}{du}$.

Вычислим коэффициенты Ламе в двух важных случаях. В случае цилиндрической системы координат имеем (см. п. 97) $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ и, полагая $u = \rho$, $v = \varphi$, $w = z$, по формулам (14) получим

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1. \tag{15}$$

В случае сферической системы координат имеем (см. п. 97) $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ и, полагая: $u = r$, $v = \varphi$, $w = \theta$, по формулам (14) получим

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r \sin \theta, \quad H_\theta = r. \tag{16}$$

Элемент объема в криволинейных координатах. Рассмотрим трехмерную область (рис. 123), ограниченную тремя парами координатных поверхностей: $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 + dv$, $w = w_0$, $w = w_0 + dw$. При достаточно малых $|du|, |dv|, |dw|$ эту область в первом приближении можно принять за параллелепипед с ребрами, соответственно равными ds_u, ds_v, ds_w и направленными по касательным к координатным линиям. *Под элементом объема в системе*

* Габриель Ламе (1795—1870) — французский математик.

координат (u, v, w) *понимают объем этого параллелепипеда.* В частном случае, когда система координат (u, v, w) ортогональна, упомянутый параллелепипед — прямоугольный и его объем равен произведению его измерений: $d\tau = ds_u ds_v ds_w$. С помощью формул (13) получаем *выражение элемента объема в ортогональной системе координат*

$$d\tau = H_u H_v H_w \, du \, dv \, dw. \tag{17}$$

В общем случае координатные линии могут пересекаться не под прямым углом. Обозначим через $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ единичные векторы касательных к соответствующим координатным линиям в рассматриваемой точке M_0, направленные в сторону возрастания координат (см. рис. 123). В общем случае элемент объема есть объем параллелепипеда, ребрами которого служат векторы $ds_u \mathbf{e}_u$, $ds_v \mathbf{e}_v$, $ds_w \mathbf{e}_w$. Он равен абсолютной величине смешанного произведения этих векторов (см. п. 96):

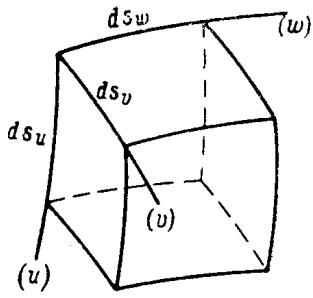

Рис. 123.

$$d\tau = \pm ([ds_u \mathbf{e}_u, \quad ds_v \mathbf{e}_v], \quad ds_w \mathbf{e}_w). \tag{18}$$

Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, проекции которого x, y, z связаны с u, v, w равенствами (7). Дифференцируя $\mathbf{r}$ по u, v, w, получим три вектора:

$$\mathbf{r}'_u = x'_u \mathbf{i} + y'_u \mathbf{j} + z'_u \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'_v = x'_v \mathbf{i} + y'_v \mathbf{j} + z'_v \mathbf{k}, \tag{19}$$
$$\mathbf{r}'_w = x'_w \mathbf{i} + y'_w \mathbf{j} + z'_w \mathbf{k},$$

направленные по касательным к соответствующим координатным линиям (см. п. 185). Длины векторов (19) соответственно равны значениям коэффициентов Ламе:

$$|\mathbf{r}'_u| = \sqrt{x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u} = H_u, \quad |\mathbf{r}'_v| = H_v, \quad |\mathbf{r}'_w| = H_w. \tag{20}$$

Поэтому согласно (13) имеем

$$s'_u \mathbf{e}_u = H_u \mathbf{e}_u = \mathbf{r}'_u, \quad s'_v \mathbf{e}_v = \mathbf{r}'_v, \quad s'_w \mathbf{e}_w = \mathbf{r}'_w.$$

С помощью равенств (19) получим

$$ds_u \mathbf{e}_u = x'_u \, du \, \mathbf{i} + y'_u \, du \, \mathbf{j} + z'_u \, du \, \mathbf{k},$$
$$ds_v \mathbf{e}_v = x'_v \, dv \, \mathbf{i} + y'_v \, dv \, \mathbf{j} + z'_v \, dv \, \mathbf{k}, \tag{21}$$
$$ds_w \mathbf{e}_w = x'_w \, dw \, \mathbf{i} + y'_w \, dw \, \mathbf{j} + z'_w dw \, \mathbf{k}.$$

Из (18) и (21), учитывая представление смешанного произведения векторов через проекции сомножителей (см. п. 96), следует *выражение элемента объема в системе координат* (u, v, w)

$$d\tau = |D| \, du \, dv \, dw, \tag{22}$$

где

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$$

Геометрически функциональный определитель D представляет отношение, в котором преобразование (7) изменяет объем.

179. Вычисление тройного интеграла в криволинейных координатах. *В цилиндрической системе координат* координатными поверхностями, проходящими через точку M_0, являются: цилиндрическая поверхность $\rho = \rho_0$, полуплоскость $\varphi = \varphi_0$ и плоскость $z = z_0$. Три пары координатных поверхностей $\rho = \rho_0$, $\rho = \rho_0 + d\rho$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$, $z = z_0$, $z = z_0 + dz$ ограничивают область (рис. 124), которую можно принять в первом приближении за прямоугольный параллелепипед с ребрами, длины которых суть $M_0A = d\rho$, $M_0B = \rho d\varphi$, $M_0C = dz$. Поэтому элемент объема в цилиндрической системе координат равен

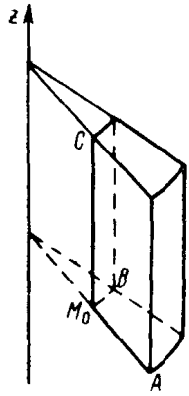

Рис. 124.

$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (23)$$

Этот же результат получается по формулам (15) и (17) или (22), так как $D = \rho$.

Для вычисления тройного интеграла (2) в цилиндрической системе координат следует разбить область B на элементы координатными поверхностями системы и составить интегральную сумму (1). В результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ с учетом формулы (23) получим

$$\iiint_B f(x, y, z)\, d\tau = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_B f(x_k, y_k, z_k)\, \Delta\tau_k =$$

$$= \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_B f(\rho_k \cos\varphi_k, \rho_k \sin\varphi_k, z_k)\, \rho_k\, \Delta\rho_k\, \Delta\varphi_k\, \Delta z_k.$$

Окончательно имеем

$$\iiint_B f(x, y, z)\, d\tau = \iiint_B f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz. \qquad (24)$$

Если область B ограничена координатными поверхностями системы (u, v, w), то соответствующий повторный интеграл будет иметь постоянные пределы для каждой из переменных интегрирования.

Пример 1. Вычислить объем тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ из шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$. Решение

$$V = \iiint_B d\tau = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} dz = 4\pi \int_0^1 \rho \sqrt{4-\rho^2}\, d\rho = \frac{4\pi}{3}(8 - 3^{3/2}).$$

В сферической системе координат координатными поверхностями системы, проходящими через M_0, являются сфера $r = r_0$, полуплоскость $\varphi = \varphi_0$ и коническая поверхность $\theta = \theta_0$.

Три пары координатных поверхностей $r = r_0$, $r = r_0 + dr$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$, $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0 + d\theta$ ограничивают область (рис. 125), которую можно принять приближенно за прямоугольный параллелепипед с ребрами, длины которых суть $M_0A = rd\theta$, $M_0B = r\sin\theta\, d\varphi$, $M_0C = dr$. Поэтому элемент объема в сферических координатах равен

$$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta. \tag{25}$$

Тот же результат получается по формулам (16) и (17), а также по формуле (22), так как $D = r^2 \sin\theta$.

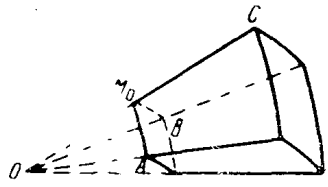

Рис. 125.

Замена переменных в тройном интеграле (2) приводит согласно (25) к равенству

$$\iiint\limits_B f(x,\ y,\ z)\, d\tau =$$

$$= \iiint\limits_B f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta. \tag{26}$$

Вычисление тройного интеграла в сферических координатах можно рекомендовать, если область B ограничена координатными поверхностями этой системы. В этом случае повторный интеграл в формуле (26) будет иметь постоянные пределы интегрирования, что, вообще говоря, упрощает вычисления.

Пример 2. Вычислить объем шара радиусом R. По формуле (26) имеем

$$V = \iiint\limits_B d\tau = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{R} r^2\, dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

В общем случае любой криволинейной системы координат $(u,\ v,\ w)$, связанной с декартовой системой $(x,\ y,\ z)$ равенствами (7), элемент объема представлен формулой (22). Замена переменных (7) в тройном интеграле (2) приведет к равенству

$$\iiint\limits_B f(x,\ y,\ z)\, d\tau =$$

$$= \iiint\limits_B f(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w))\, |D|\, du\, dv\, dw. \tag{27}$$

Здесь правые части (7) предполагаются непрерывно дифференцируемыми в $\overline{B}$, якобиан D — сохраняющим знак в $\overline{B}$, $f(M)$ — непрерывной в $\overline{B}$. Формула (27) выводится аналогично формуле (29) п. 174.

Если область B ограничена координатными поверхностями системы (u, v, w), то в соответствующем повторном интеграле пределы получатся постоянными.

Пример 3. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Вводим обобщенные сферические координаты (r, φ, θ), связанные с декартовыми координатами равенствами

$$x=ar\sin\theta\cos\varphi,\quad y=br\sin\theta\sin\varphi,\quad z=cr\sin\theta.$$

В новой системе координат эллипсоид представляет координатную поверхность $r=1$. Якобиан преобразования координат в нашем случае равен $D=abcr^2\sin\theta$. Поэтому искомый объем равен

$$V=\iiint\limits_B d\tau=abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^{1}r^2dr=\frac{4}{3}\pi abc.$$

180. Приложения тройного интеграла в механике. Рассмотрим трехмерную область B, в которой непрерывно распределено вещество с плотностью $\rho\,(M)$. Разделим B на элементарные части. Элементарная масса равна $dm=\rho\,d\tau$.

Элементарные *статические моменты относительно координатных плоскостей* определяются равенствами

$$dS_{xy}=z\,dm,\quad dS_{yz}=x\,dm,\quad dS_{xz}=y\,dm.$$

Поэтому для массы и статических моментов всего тела получим следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} m&=\iiint\limits_B\rho\,d\tau,\quad S_{xy}=\iiint\limits_B z\rho\,d\tau,\\ S_{yz}&=\iiint\limits_B x\rho\,d\tau,\quad S_{xz}=\iiint\limits_B y\rho\,d\tau. \end{aligned}\tag{28}$$

Координаты центра тяжести $C\,(x_C, y_C, z_C)$ тела согласно определению этого понятия удовлетворяют соотношениям $mx_C=S_{yz}$, $my_C=S_{xz}$, $mz_C=S_{xy}$, поэтому имеем

$$x_C=\frac{S_{yz}}{m},\quad y_C=\frac{S_{xz}}{m},\quad z_C=\frac{S_{xy}}{m},\tag{29}$$

где величины, входящие в правые части, определяются формулами (28).

Моментом инерции системы точек относительно оси называется величина, равная сумме произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до оси. Элементарные моменты инерции относительно координатных осей в общем случае равны

$$dJ_x=(y^2+z^2)\,dm,\quad dJ_y=(x^2+z^2)\,dm,\quad dJ_z=(x^2+y^2)\,dm,$$

где y^2+z^2, x^2+z^2 и x^2+y^2 суть квадраты расстояний от точки $M(x, y, z)$ соответственно до осей Ox, Oy и Oz. Поэтому моменты инерции всего тела равны

$$J_x=\iiint\limits_B (y^2+z^2)\,\rho\,d\tau, \quad J_y=\iiint\limits_B (x^2+z^2)\,\rho\,d\tau,$$

$$J_z=\iiint\limits_B (x^2+y^2)\,\rho\,d\tau.$$

Пример. Вычислить момент инерции шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant R$ относительно его диаметра, если плотность постоянна и равна единице.

Решение. Вычислим интеграл J_z в сферических координатах. Получим

$$J_z=\iiint\limits_B r^4 \sin^3\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta=\int\limits_0^R r^4\,dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\frac{8}{15}\pi R^5.$$

Глава XI

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

181. Понятие поля. Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. Векторный анализ является средством изучения полей.

При рассмотрении физических явлений встречаются величины трех видов: скалярные, векторные и тензорные. Соответственно этому различают три вида полей: скалярные, векторные и тензорные. В общем случае *полем величины α называется область B трехмерного пространства, с каждой точкой которой в каждый момент времени связано определенное значение величины α*. Поэтому α есть функция точки M и времени t. Заметим, что областью B может быть и все трехмерное пространство. Если величина α скалярная (температура, давление, потенциал и т. д.), то и поле называется скалярным. Если α есть вектор (сила, скорость и т. д.), то соответствующее поле называется векторным. Если α — тензор (напряженности, проводимости и т. п.), поле называется тензорным.

Поле величины α называется *стационарным*, или *установившимся*, если α не зависит от времени t. В противном случае оно называется неустановившимся.

Пример скалярного поля. Пусть данная область заполнена газом, температура которого есть функция точки и времени. Однако со временем может наступить тепловое равновесие, в результате которого температура в каждой точке области стабилизируется во времени. Температура станет функцией лишь точки, поле температур станет стационарным.

Примеры векторных полей. 1. Пусть область B заполнена жидкостью (или газом), причем скорость течения $\mathbf{v}(M)$ не зависит от времени и является функцией точки наблюдения M. Поставив в соответствие каждой точке M области B вектор $\mathbf{v}(M)$, получим векторное поле, называемое *полем скоростей стационарного потока жидкости*.

2. Пусть в некоторой области пространства распределено некоторое вещество. Тогда на материальную точку с единичной массой действует сила

тяготения, зависящая от местоположения точки. Эти силы образуют векторное поле, называемое *полем тяготения*, или гравитационным полем, соответствующим данному распределению масс.

3. Если в некоторой области пространства распределены электрические заряды, то на единичный электрический заряд, находящийся в точке M, эти заряды действуют с некоторой силой $\mathbf{E}(M)$. Эти силы образуют векторное поле, называемое *электростатическим*, соответствующим данному распределению зарядов.

Примером тензорного поля является *поле* тензора *упругих напряжений* тела, с каждой точкой которого связано определенное значение тензора напряжения. При этом в каждой системе координат тензор в данной точке можно представлять системой девяти чисел (в то время как скаляр можно представить одним числом, а вектор — системой трех чисел).

§ 31. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

182. Скалярное поле. Поверхности и линии уровня. Пусть дано стационарное скалярное поле $\varphi(M)$. Если выбрать систему декартовых координат (x, y, z), то каждая точка M будет иметь координаты x, y, z и функция точки $\varphi(M)$ станет функцией трех независимых переменных $\varphi(x, y, z)$. Мы всегда будем предполагать эту функцию непрерывно дифференцируемой в рассматриваемой области.

Основным вопросом исследования скалярного поля является вопрос об изменении функции φ при переходе из одной точки пространства в другую. Для выяснения этого вопроса рассмотрим прежде всего *геометрическое место точек, в которых величина φ сохраняет постоянное значение*, оно называется *поверхностью уровня*. Через каждую точку M_0 области B проходит единственная поверхность уровня. Ее уравнение в выбранной системе координат имеет вид

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0) \equiv c. \qquad (1)$$

Следовательно, поверхности уровня, отвечающие различным постоянным c, заполняют всю область, в которой определено поле, и никакие две поверхности уровня, отвечающие различным значениям c, не имеют общих точек. Задание всех поверхностей уровня с указанием соответствующих значений c равносильно заданию самого поля.

Указанный способ изображения поля особенно удобен, если речь идет о поле, заданном в плоской области A двух переменных. Такое поле описывается функцией двух переменных $\varphi(x, y)$, определенной в области A. Равенство $\varphi(x, y) = c$ определяет, вообще говоря, некоторую кривую, называемую *линией уровня* плоского скалярного поля. С помощью линий уровня изображается, например, рельеф местности на топографических картах (путем задания поля высот точек местности над уровнем моря). В случае поля температур на плоскости линии уровня называются изотермами, в случае поля давлений — изобарами и т. д.

183. Производная по направлению. Проследим за изменением данной скалярной величины $\varphi(M)$ при перемещении точки M в каком-либо заданном направлении $\mathbf{m}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (рис. 126).

Определение. *Производной скалярной функции* $\varphi(M)$ *по направлению* $\mathbf{m}$ *в точке* M называется предел (если он существует) отношения приращения $\Delta\varphi$ функции при смещении точки M в направлении вектора m к величине этого смещения $\rho = d(M, N)$, когда последнее стремится к нулю; она обозначается символом

Рис. 126.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial m} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\varphi(N)-\varphi(M)}{\rho}. \qquad (2)$$

Производная скалярной функции $\varphi(M)$ по направлению $\mathbf{m}$ характеризует скорость изменения величины φ в точке M в направлении вектора $\mathbf{m}$, что следует из определения. В каждой точке пространства имеется бесконечное множество различных направлений, поэтому функция $\varphi(M)$ в каждой точке имеет бесконечное множество производных, соответствующих различным направлениям.

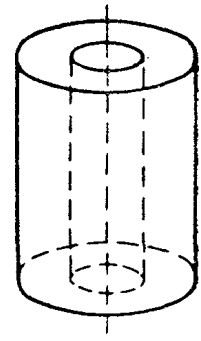

Рис. 127.

Понятие производной функции по направлению является обобщением понятия частной производной, потому что частные производные функции $\varphi(x, y, z)$ являются производными этой функции в направлении соответствующих координатных осей.

Для вывода формулы производной по направлению, удобной в вычислительном отношении, обозначим через x, y и z координаты фиксированной точки M. Тогда точка N будет иметь координаты $x+\rho\cos\alpha$, $y+\rho\cos\beta$, $z+\rho\cos\gamma$. Величины x, y, z, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ фиксированы, поэтому $\varphi(N)$ является функцией только смещения ρ. Обозначим эту функцию через

$$\psi(\rho) \equiv \varphi(x+\rho\cos\alpha,\ y+\rho\cos\beta,\ z+\rho\cos\gamma). \qquad (3)$$

При $\rho = 0$ имеем $\psi(0) = \varphi(x, y, z)$. Следовательно, производная φ по направлению $\mathbf{m}$ равна производной от ψ по ρ в точке $\rho = 0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial m} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\psi(\rho)-\psi(0)}{\rho} = \psi'(0). \qquad (4)$$

Дифференцируя $\psi(\rho)$ по ρ как сложную функцию, получим

$$\psi'(\rho) = \varphi'_x(N)\cos\alpha + \varphi'_y(N)\cos\beta + \varphi'_z(N)\cos\gamma.$$

Положив $\rho = 0$, получим окончательно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma. \tag{5}$$

Формула (5) представляет выражение производной скалярной функции $\varphi(M)$ по любому данному направлению $\mathbf{m}$ ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) через производные этой функции по трем взаимно перпендикулярным направлениям $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$.

Пример. Рассмотрим поле температур $\varphi(M)$, создаваемое бесконечно длинным прямолинейным источником тепла, расположенным по оси Oz (рис. 127).

Пусть, например, $\varphi = (x^2 + y^2)^{-1}$. Поверхностями уровня являются цилиндрические поверхности вращения вокруг источника тепла. Производную функции φ по направлению $\mathbf{m}$ ($\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$) найдем по формуле (5)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = -2 (x^2 + y^2)^{-2} (x \cos \alpha + y \cos \beta).$$

В частности, если $\mathbf{m} = \mathbf{k}$, то $\cos \alpha = \cos \beta = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0$ (вдоль источника тепла температура не меняется). Если $\mathbf{m} = \mathbf{r}(x, y)$, то $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\cos \beta = \frac{y}{r}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial m} = -\frac{2(x^2+y^2)}{r^5} = -\frac{2}{r^3} < 0$ (чем дальше от источника тепла, тем холоднее). Если $\mathbf{m} = -\mathbf{r}(x, y)$, то получим $\frac{\partial \varphi}{\partial m} = +\frac{2}{r^3}$ (в направлении к источнику тепла температура возрастает).

184. Градиент скалярного поля. Пусть дано скалярное поле $\varphi(x, y, z)$. Среди различных возможных направлений в данной фиксированной точке M пространства выделим направление, перпендикулярное к поверхности уровня скалярной функции $\varphi(x, y, z)$, проходящей через точку M. Одно из двух таких направлений представлено вектором

$$\mathbf{n}(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z) \tag{6}$$

(см. п. 133). Вектор $\mathbf{n}$ играет важную роль в теории поля и называется его градиентом.

Формальное определение градиента: *градиентом скалярного поля* $\varphi(M)$ *в точке* M называется вектор, обозначаемый $\mathbf{n} = \operatorname{grad} \varphi(M)$ и определяемый равенством

$$\operatorname{grad} \varphi(M) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}. \tag{7}$$

Если функция $\varphi(x, y, z)$ имеет частные производные первого порядка, то в каждой точке M эта функция имеет свой градиент. Таким образом, скалярное поле $\varphi(M)$ порождает векторное поле $\operatorname{grad} \varphi(M)$.

Пример. Дана функция $u = x^2 + y^2 + z^2$ и точка M_1 (0, 1, 0). Выражение градиента этой функции в произвольной точке найдем по формуле (7)

$$\operatorname{grad} u = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}.$$

В частности, в точке M_1 имеем $(\operatorname{grad} u)_{M_1} = 2\mathbf{j}$.

Правую часть формулы (5) можно рассматривать как скалярное произведение векторов $\mathbf{n} = \operatorname{grad}\varphi$ и единичного вектора $\mathbf{m}$ ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), в направлении которого берется производная. Поэтому имеет место соотношение между производной по направлению и градиентом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial m} = (\operatorname{grad}\varphi,\ \mathbf{m}) = \operatorname{пр}_{\mathbf{m}} \operatorname{grad}\varphi. \tag{8}$$

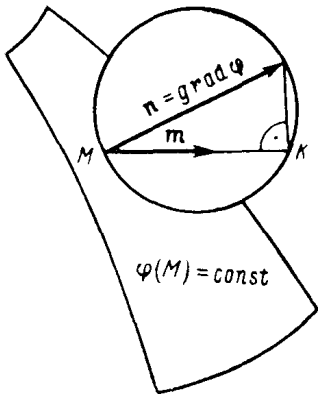

Рис. 128.

Следствие 1. *Производная скалярной функции* φ *в направлении* $\mathbf{m}$ *равна проекции* $\operatorname{grad}\varphi$ *на направление вектора* $\mathbf{m}$. В частности, производная по направлению, касательному к поверхности уровня, равна нулю. Зависимость (8) допускает такое геометрическое представление. Если провести в точке M вектор $\operatorname{grad}\varphi$ к соответствующей поверхности уровня и построить на этом векторе сферу как на диаметре (рис. 128), то величина хорды MK сферы, направленная вдоль вектора $\mathbf{m}$, будет равна $\frac{\partial\varphi}{\partial m}$. Это следует из прямоугольного треугольника, одним из катетов которого является MK, а гипотенузой служит вектор $\operatorname{grad}\varphi$.

Следствие 2. Из соотношения (8) следует формула

$$\frac{\partial\varphi}{\partial m} = |\operatorname{grad}\varphi| \cos(\mathbf{n},\ \mathbf{m}), \tag{9}$$

которая показывает, что производная скалярной функции φ в точке M имеет *наибольшее значение в направлении градиента*, потому что при этом $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 1$. Другими словами, в направлении градиента скалярная функция изменяется быстрее, чем в других направлениях. Это наибольшее значение производной по направлению равно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = |\operatorname{grad}\varphi| = \sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \varphi_z'^2}. \tag{10}$$

Заметим, что градиент скалярного поля направлен перпендикулярно соответствующей поверхности уровня в сторону возрастания величины φ, потому что согласно (10) имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial n} >$

>0. В частности, в примере п. 183 градиент направлен к источнику тепла.

Отсюда следует инвариантное определение градиента: *градиентом скалярной величины* φ *называется вектор, имеющий направление быстрейшего увеличения* φ *и равный по модулю производной* φ *по этому направлению.* Оба определения градиента — формальное и инвариантное — равносильны, потому что они определяют векторы, одинаково направленные и имеющие одинаковые длины.

Формальные свойства градиента. Пусть $\varphi(M)$ и $\psi(M)$ — две скалярные функции точки и f — скалярная функция одной или нескольких переменных. Все эти функции предполагаются дифференцируемыми. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&1^\circ.\ \operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi,\\
&2^\circ.\ \operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi,\\
&3^\circ.\ \operatorname{grad} f(\varphi)=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi,\\
&4^\circ.\ \operatorname{grad} f(\varphi,\ \psi)=f'_\varphi\operatorname{grad}\varphi+f'_\psi\operatorname{grad}\psi.
\end{aligned}\tag{11}$$

Действительно, в случаях, например, 1° и 3° имеем

$$\operatorname{grad}(\varphi+\psi)=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x}\,\mathbf{i}+\ldots=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathbf{i}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\mathbf{i}+\ldots=$$

$$=\operatorname{grad}\varphi+\operatorname{grad}\psi,$$

$$\operatorname{grad} f(\varphi)=\frac{\partial f(\varphi)}{\partial x}\,\mathbf{i}+\ldots=f'(\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i+\ldots\right)=f'(\varphi)\operatorname{grad}\varphi.$$

Примечание. Многоточия всюду означают, что следует дописать второе и третье слагаемые, аналогичные первому и получающиеся из него путем замены x на y и z, а $\mathbf{i}$ на $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ соответственно.

185. Векторная функция скалярного аргумента. Частным случаем векторной функции является векторная функция $\mathbf{a}(\tau)$, зависящая только от скалярного аргумента τ. Переменная векторная величина $\mathbf{a}(\tau)$ называется функцией скалярного аргумента τ в области T, если каждому значению τ из T соответствует определенное значение вектора $\mathbf{a}$.

Пусть выбрана декартова система координат. Тогда задание векторной функции равносильно заданию трех скалярных функций — проекций векторной функции на оси выбранной системы координат, потому что разложение вектора в координатном базисе единственно: $\mathbf{a}(\tau)=a_x(\tau)\,\mathbf{i}+a_y(\tau)\,\mathbf{j}+a_z(\tau)\,\mathbf{k}$.

Предполагая величину $\mathbf{a}(\tau)$ свободным вектором, совместим начало этого вектора с фиксированной точкой пространства (например, с началом координат). Тогда при изменении аргумента в промежутке T конец вектора опишет некоторую линию l, которая называется *годографом* вектора $\mathbf{a}(\tau)$.

Понятие предела векторной функции скалярного аргумента вводится аналогично тому, как это сделано для скалярной функции.

Пределом $\mathbf{a}(\tau)$ при стремлении τ к τ_0 называется вектор $\mathbf{b}$ такой, что

$$\lim_{\tau \to \tau_0} |\mathbf{a}(\tau) - \mathbf{b}| = 0. \tag{12}$$

Известно, что $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2$.

Следовательно, условие (12) равносильно трем скалярным соотношениям:

$$\lim_{\tau \to \tau_0} a_x = b_x, \quad \lim_{\tau \to \tau_0} a_y = b_y, \quad \lim_{\tau \to \tau_0} a_z = b_z. \tag{13}$$

Если выполнено равенство (12) и $b \neq 0$, то вектор $\mathbf{a}(\tau)$ стремится к $\mathbf{b}$ как по модулю, так и по направлению.

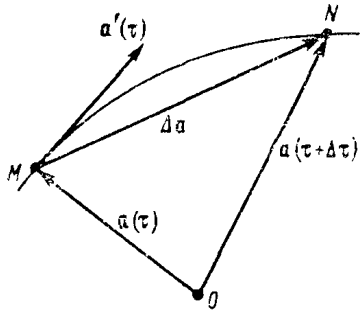

Рис. 129.

Из равносильности равенств (12) и (13) следует, что для векторных функций скалярного аргумента имеют место теоремы о пределе суммы, произведения и другие теоремы теории пределов скалярных величин (см. гл. I). Однако теоремы, связанные с неравенствами, не распространяются на векторные величины, так как векторы (не их модули) нельзя соединять знаками неравенств. *

Понятие производной $\mathbf{a}(\tau)$. Совместим начало вектора $\mathbf{a}$ с началом координат при всех значениях τ. Фиксируем τ и $\tau + \Delta\tau$. На годографе $\mathbf{a}(\tau)$ этим фиксируются соответствующие точки M и N, так что $\mathbf{OM} = \mathbf{a}(\tau)$, $\mathbf{ON} = \mathbf{a}(\tau + \Delta\tau)$ (рис. 129). Приращением векторной функции называется разность $\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{a}(\tau)$. Этот вектор направлен по секущей MN. Отношение $\Delta\mathbf{a}/\Delta\tau$ есть вектор, коллинеарный $\Delta\mathbf{a}$.

Производной векторной функции скалярного аргумента $\mathbf{a}(\tau)$ *по ее аргументу* τ называется предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда это последнее стремится к нулю (если этот предел существует); он обозначается символом $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, или $\mathbf{a}'(\tau)$. Имеем

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\tau} = \mathbf{a}'(\tau) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta\tau}. \tag{14}$$

Следовательно, производная $\mathbf{a}'(\tau)$ есть вектор, направленный по касательной к годографу функции $\mathbf{a}(\tau)$ в соответствующей точке (см. рис. 129). Если вектор $\mathbf{a}(\tau)$ задан своими проекциями

* В некоторых специальных курсах встречаются упорядоченные множества векторов.

$a_x(\tau)$, $a_y(\tau)$, $a_z(\tau)$, то $\Delta\mathbf{a} = \Delta a_x\,\mathbf{i} + \Delta a_y\,\mathbf{j} + \Delta a_z\,\mathbf{k}$. Разделив это равенство на $\Delta\tau$ и перейдя к пределу, получим

$$\mathbf{a}'(\tau) = a_x'\,\mathbf{i} + a_y'\,\mathbf{j} + a_z'\,\mathbf{k}. \qquad (15)$$

Следовательно, дифференцирование векторной функции по τ сводится к дифференцированию ее проекций. Из (15) также следует, что длина вектора $\mathbf{a}'$ определяется формулой

$$|\mathbf{a}'| = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2}.$$

Пример. Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ винтовой линии: $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = vt$. По формуле (15) получим $\mathbf{r}_t' = -a\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + a\omega\cos\omega t\,\mathbf{j} + v\mathbf{k}$.

186. Векторные линии и трубки. Пусть дана векторная функция точки

$$\mathbf{a}(M) = P(M)\,\mathbf{i} + Q(M)\,\mathbf{j} + R(M)\,\mathbf{k},$$

где $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ — проекции вектора $\mathbf{a}(M)$ на координатные оси. Задание векторной функции $\mathbf{a}(M)$ может быть осуществлено путем задания трех скалярных функций — его проекций на координатные оси.

Векторной линией поля $\mathbf{a}(M)$ называется линия l, касательная к которой в каждой точке l имеет направление вектора $\mathbf{a}(M)$ в точке касания. В частности, если $\mathbf{a}(M)$ есть поле скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, то его векторные линии — это траектории частиц жидкости, называемые линиями тока жидкости.

Если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — параметрические уравнения векторной линии l, то ее радиус-вектор равен $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$. Вектор $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ направлен по касательной к l. По определению векторной линии векторы $\mathbf{a}$ и $d\mathbf{r}$ коллинеарны в каждой точке l. Условие коллинеарности

$$\frac{dx}{P} = \frac{\partial y}{Q} = \frac{dz}{R}$$

представляет систему дифференциальных уравнений векторных линий поля.

Поверхности, составленные из векторных линий, называются *векторными поверхностями*. Если L — какой-нибудь замкнутый контур, не совпадающий с векторной линией, то векторные линии, проходящие через точки этого контура, образуют поверхность, называемую *векторной трубкой*.

Пример. Дано векторное поле $\mathbf{a} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Векторные линии этого поля характеризуются равенствами $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt$. Из них следует, что $x = x_0e^t$, $y = y_0e^t$, $z = z_0e^t$. Эти уравнения определяют (если $x_0y_0z_0 \neq 0$) лучи, исходящие из начала координат, которые и представляют собой векторные линии данного поля.

Рассмотрим векторную трубку, «направляющей» которой служит окружность, заданная уравнениями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 1$. Геометрически очевидно, что векторной трубкой в этом случае является коническая поверхность вращения вокруг оси Oz. Ее уравнение получим, исключив параметр t из соотношений $(x^2 + y^2)\, e^{-2t} = R^2$, $z = e^t$. Имеем $R^2 z^2 = x^2 + y^2$.

§ 32. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

187. Задачи, приводящие к криволинейным интегралам. *Задача о массе изогнутого стержня.* Пусть на дуге AB пространственной кривой распределено какое-либо вещество с плотностью $\rho\,(M)$. Требуется найти массу данной дуги («изогнутого стержня»). Под плотностью вещества в точке M мы понимаем предел средней плотности распределения вещества на бесконечно малой дуге, содержащей точку M.

Решение задачи состоит в выполнении следующих действий.

1) Делим дугу AB на n произвольных элементарных частей $\Delta l_1, \ldots, \Delta l_n$, длины которых обозначим соответственно через $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$, а наибольшую из этих длин обозначим λ_n.

2) Найдем массу Δm_k вещества, содержащегося в элементарной дуге Δl_k, в предположении, что в пределах каждой элементарной дуги Δl_k плотность вещества постоянна и равна $\rho\,(N_k)$, где N_k — одна из точек элементарной дуги Δl_k, безразлично какая. Получим приближенное выражение $\Delta m_k \approx \rho\,(N_k)\,\Delta s_k$.

3) Масса всей дуги AB будет приближенно равна

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho\,(N_k)\,\Delta s_k.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше длина каждого элемента и чем больше n, т. е. чем меньше λ_n.

4) Точное значение массы материальной дуги получим, перейдя к пределу при $\lambda_n \to 0$:

$$m = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho\,(N_k)\,\Delta s_k = \int_{AB} \rho\,(M)\,ds. \qquad (1)$$

Пределы такого вида называются *криволинейными интегралами первого рода* и обозначаются символом, изображенным в правой части равенства (1).

Задача о работе силового поля. Пусть в каждой точке M трехмерной области B на помещенную в ней единичную массу действует определенная сила $\mathbf{a}\,(M)$, зависящая только от положения точки M. При этих условиях область B называется *силовым полем*, а сила $\mathbf{a}\,(M)$, действующая на единичную массу, называется *напряжением поля в точке* M. Требуется вычислить работу E, которую совершают силы поля при перемещении точки M единичной массы вдоль данной кривой AB из положения A в положение B.

Речь идет о вычислении работы переменной силы на криволинейном участке пути.

Решение задачи состоит в выполнении следующих действий.

1) Разделим дугу AB точками $M_k(x_k, y_k, z_k)$ на n произвольных элементарных частей Δl_k с длинами Δs_k. Наибольшую из Δs_k обозначим λ_n (рис. 130).

2) Ввиду малости Δs_k можно приближенно принять, что а) вектор силы $\mathbf{a}$ сохраняет на Δl_k постоянное значение, равное $\mathbf{a}(N_k)$, где N_k — одна из точек элемента Δl_k, безразлично какая, б) дуга Δl_k может быть заменена хордой $M_{k-1}M_k$, стягивающей концы этого элемента. Вектор $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ равен приращению радиус-вектора $\mathbf{r}(M)$: $\Delta\mathbf{r}_k = \mathbf{r}(M_k) - \mathbf{r}(M_{k-1})$. Тогда на элементе дуги Δl_k работа сил поля выразится скалярным произведением $\Delta E_k \approx \mathbf{a}(N_k)\,\Delta\mathbf{r}_k$.

3) Пусть вектор $\mathbf{a}(M)$ имеет проекции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ на соответствующие координатные оси. Тогда работа силового поля вдоль всей дуги AB будет приближенно равна

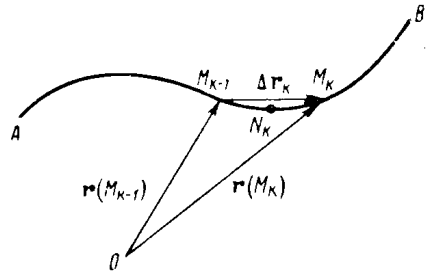

Рис. 130.

$$E \approx \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}(N_k)\,\Delta\mathbf{r}_k = \sum_{k=1}^{n} [P(N_k)\,\Delta x_k + Q(N_k)\,\Delta y_k + R(N_k)\,\Delta z_k], \quad (2)$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

4) Перейдя к пределу при $\lambda_n \to 0$, получим точное выражение работы

$$E = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} a(N_k)\,\Delta r_k = \int_{AB} \mathbf{a}(M)\,d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Пределы такого вида называются *криволинейными интегралами от векторной функции точки вдоль дуги AB*. В правой части равенства (3) указано одно из обозначений этого интеграла.

188. Определение криволинейных интегралов, их свойства. Пусть AB — дуга гладкой кривой, на которой определены и непрерывны скалярная функция $F(M)$ и векторная функция $\mathbf{a}(M)$, имеющая проекции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ на оси выбранной декартовой системы координат.

1. Разобьем дугу AB в направлении от A к B с помощью точек деления $M_k(x_k, y_k, z_k)$ на n элементарных частей $\Delta l_1, \ldots, \Delta l_n$, длины которых обозначим соответственно $\Delta s_1, \ldots, \Delta s_n$, а наибольшую из этих длин обозначим λ_n (см. рис. 130).

2. Выберем на каждой элементарной дуге произвольную точку N_k и составим суммы двух видов:

$$1)\quad \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} F(N_k)\,\Delta s_k, \tag{4}$$

$$2)\quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} [P(N_k)\,\Delta x_k + Q(N_k)\,\Delta y_k + R(N_k)\,\Delta z_k], \tag{5}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Определение 1. Конечный предел интегральной суммы α_n при $\lambda_n \to 0$ (если он существует и не зависит от способа деления дуги AB на элементы и выбора точек N_k) называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $F(M)$ по дуге AB* и обозначается так:

$$\int_{AB} F(M)\,ds \equiv \int_{AB} F(x,\ y,\ z)\,ds = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} F(N_k)\,\Delta s_k. \tag{6}$$

Физическое истолкование интеграла (6): например, это масса изогнутого стержня с плотностью распределения вещества $F(M)$. Его специальное свойство — величина криволинейного интеграла первого рода не зависит от направления обхода пути интегрирования, что прямо следует из определения 1:

$$\int_{AB} F(M)\,ds = \int_{BA} F(M)\,ds. \tag{7}$$

Определение 2. Конечный предел интегральной суммы β_n при $\lambda_n \to 0$ (если он существует и не зависит от способа деления дуги AB на элементы и выбора точек N_k) называется *криволинейным интегралом второго рода от векторной функции* $\mathbf{a}(P, Q, R)$ *по дуге AB* и обозначается символом $\int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}$ или $\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$. Имеем

$$\int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} \equiv \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \lim_{\lambda_n \to 0} \beta_n. \tag{8}$$

Физическое истолкование интеграла (8): например, это работа силы $\mathbf{a}(M)$ вдоль дуги AB (см. п. 187). Специальное свойство криволинейного интеграла второго рода заключается в следующем: при изменении направления обхода дуги AB интеграл меняет лишь знак. Это свойство непосредственно следует из определения 2, если принять во внимание, что при изменении направления пути интегрирования нумерация элементов ведется от B и A, что влечет лишь изменение знаков у Δx_k, Δy_k и Δz_k:

$$\int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = -\int_{BA} \mathbf{a}\,d\mathbf{r}. \tag{9}$$

Интеграл (8) представляет, очевидно, сумму трех интегралов:

$$\int\limits_{AB} P(M)\,dx, \quad \int\limits_{AB} Q(M)\,dy, \quad \int\limits_{AB} R(M)\,dz, \tag{10}$$

отвечающих векторам $(P, 0, 0)$, $(0, Q, 0)$ и $(0, 0, R)$, на которые разлагается вектор (P, Q, R).

В определениях 1 и 2 предел интегральной суммы понимается в том смысле, как это было и в случае определенного интеграла (см. п. 152).

Рассмотрим радиус-вектор точки M : $\mathbf{r}(M) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Общий член интегральной суммы (5) приведем к виду

$$P(N_k)\,\Delta x_k + Q(N_k)\,\Delta y_k + R(N_k)\,\Delta z_k =$$
$$= \mathbf{a}(N_k)\,\Delta\mathbf{r}_k = a(N_k)\cos(\mathbf{a},\ \Delta\mathbf{r})\,\Delta r_k.$$

Пользуясь этим соотношением, можно доказать,* что имеет место следующая зависимость между криволинейными интегралами первого и второго рода:

$$\int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} a_\tau(M)\,ds, \tag{11}$$

где $\tau(M)$ — вектор, направленный по касательной к дуге AB в точке M и соответствующий направлению дуги от A и B; $a_\tau(M) = a(M)\cos(\mathbf{a}, \tau)$ — проекция вектора $\mathbf{a}(M)$ на $\tau(M)$.

Примечание. Можно доказать, что при наших предположениях о гладкости дуги AB и непрерывности функций $F(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ интегралы (6) и (8) существуют. Они существуют и при более широких условиях — кусочной гладкости AB и наличии у функций $F(M)$ и $\mathbf{a}(M)$ лишь конечного числа разрывов первого рода.

Общие свойства криволинейных интегралов вытекают из их определения и доказываются, следуя той же логической схеме, как в случае двойных или определенных интегралов (см. пп. 154, 169).

1°. *Постоянный множитель можно вынести за знак криволинейного интеграла.*

2°. *Криволинейный интеграл от алгебраической суммы функций равен соответствующей сумме интегралов от слагаемых.*

3°. *Если путь интегрирования разбит на конечное число частей, то интеграл по всему пути равен сумме интегралов по всем его частям.*

4°. *Криволинейный интеграл вдоль замкнутого контура не зависит от выбора начальной точки на этом контуре.*

---

* Доказательство см. в работе Б. М. Будак и С. В. Фомина «Краткие интегралы и ряды», гл. 4.

Действительно, если принять за начальную точку A, то в силу 3° (рис. 131) получим $\int\limits_{ABCDA} = \int\limits_{ABC} + \int\limits_{CDA}$. Если же за начальную точку принять C, то получим $\int\limits_{CDABC} = \int\limits_{CDA} + \int\limits_{ABC}$.

Из равенства правых частей следует равенство их левых частей, и свойство 4° установлено.

Первые четыре свойства имеют место для любых криволинейных интегралов. Следующее свойство рассматривается для криволинейного интеграла первого рода.

5°. **Теорема о среднем.** *Если функция $F(M)$ определена и непрерывна на гладкой дуге AB (включая ее концы), то на этой дуге найдется такая точка M_*, что*

$$\int\limits_{AB} F(M)\,ds = F(M_*)\,s_{AB}, \qquad (12)$$

где s_{AB} — длина дуги AB, т. е. криволинейный интеграл первого рода равен произведению среднего значения подынтегральной функции на длину пути интегрирования.

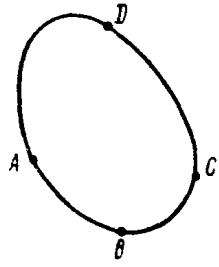

Рис. 131.

Для доказательства рассмотрим параметрические уравнения дуги AB

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta), \qquad (13)$$

причем значению параметра α соответствует точка A, значению β — точка B. Обозначим через p и q соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $F(x(t), y(t), z(t))$ в промежутке $[\alpha, \beta]$ (в силу непрерывности этой функции в замкнутом промежутке числа p и q существуют). Имеем $p \leqslant F(M) \leqslant q$. Строим интегральные суммы для всех членов этого неравенства и, перейдя к пределу при $\lambda_n \to 0$, получим

$$ps_{AB} \leqslant \int\limits_{AB} F(M)\,ds \leqslant qs_{AB}.$$

Следовательно, $p \leqslant \mu \leqslant q$, где $\mu = \dfrac{1}{s_{AB}} \int\limits_{AB} F(M)\,ds$. Из условия теоремы следует, что на AB имеется точка M_* такая, что $F(M_*) = \mu$. Отсюда следует формула (12).

189. Вычисление криволинейных интегралов. Пусть гладкая дуга AB задана параметрически уравнениями (13). На этой дуге определены и непрерывны функции $F(M)$, $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$.

Для вычисления криволинейного интеграла первого рода (6) представим приращение длины дуги Δs_k в виде интеграла (см. п. 159) и с помощью теоремы о среднем (см. п. 154) получим

$$\Delta s_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\Big|_{t=t_k^*} \Delta t_k,$$

где среднее значение аргумента t_k^* принадлежит промежутку $[t_{k-1}, t_k]$. Выберем в качестве точки N_k дуги $M_{k-1}M_k$ точку N_k^*, соответствующую значению параметра t_k^*. Получим

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} F(N_k^*)\,\Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} F(x(t_k^*),\ y(t_k^*),\ z(t_k^*))\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\Big|_{t_k^*}\Delta t_k.$$

Правая часть этого равенства есть интегральная сумма в смысле Римана (см. п. 152) для функции $F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ в промежутке $[\alpha, \beta]$. Поэтому в результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ получим формулу, связывающую криволинейный интеграл первого рода с соответствующим определенным интегралом

$$\int_{AB} F(x,\ y,\ z)\,ds = \int_{\alpha}^{\beta} F(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt. \qquad (14)$$

Пример 1. Найти массу четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, если плотность в каждой точке равна ее ординате.

Решение. Составим параметрические уравнения окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$. Следовательно, $x'^2 + y'^2 = R^2$; согласно (1) и (14) получим

$$m = \int_{AB} \rho\,ds = \int_{AB} y\,ds = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sin t\,dt = R^2.$$

Для вычисления криволинейного интеграла второго рода $\int_{AB} P(M)\,dx$ представим величину Δx_k с помощью формулы Лагранжа в виде произведения $\Delta x_k = x'(t_k^*)\,\Delta t_k$, где t_k^* принадлежит промежутку (t_{k-1}, t_k). Выберем в качестве точки N_k дуги $M_{k-1}M_k$ точку N_k^*, соответствующую значению t_k^*. Нашему криволинейному интегралу соответствует интегральная сумма

$$\sum_k P(N_k^*)\,\Delta x_k = \sum_k P(x(t_k^*),\ y(t_k^*),\ z(t_k^*))\,x'(t_k^*)\,\Delta t_k.$$

Правая часть этого равенства есть вместе с тем интегральная сумма для функции $P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t)$ в промежутке $[\alpha, \beta]$ (см. п. 152). Поэтому в результате предельного перехода при $\lambda_n \to 0$ получим формулу, связывающую криволинейный интеграл второго рода с соответствующим определенным интегралом

$$\int_{AB} P(x,\ y,\ z)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t)\,dt. \qquad (15)$$

Аналогично выводятся формулы

$$\int\limits_{AB} Q(x,\ y,\ z)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} R(x,\ y,\ z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)\,dt.$$

Сложив почленно последние три равенства, получим

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (Px' + Qy' + Rz')\,dt. \tag{16}$$

Из формул (15) и (16) вытекает следующая схема вычисления криволинейного интеграла второго рода. 1) Составим параметрические уравнения дуги AB вида (13), установим пределы изменения параметра t на дуге AB. Пусть это α и β, причем точка A соответствует значению параметра α, точка B — значению β.

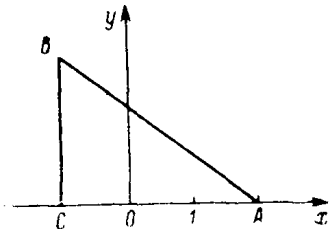

Рис. 132.

2) Положим под знаком криволинейного интеграла $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $dx = x'\,dt$, $dy = y'\,dt$, $dz = z'\,dt$.

3) Вычислим полученный определенный интеграл в пределах от α до β.

В частности, если дуга AB плоская и задана уравнением $y = y(x)$ в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ (роль параметра t играет величина x), то согласно (15) имеем

$$\int\limits_{AB} P(x,\ y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(x,\ y(x))\,dx. \tag{17}$$

Пример 2. Вычислить работу силы $\mathbf{a} = 2xy\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ при перемещении точки M из положения A (2, 0) в положение B (−1, 3): 1) вдоль прямой AB, 2) вдоль ломаной ACB (рис. 132).

Задача сводится к вычислению криволинейного интеграла

$$E = \int\limits_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int\limits_{AB} 2xy\,dx + x\,dy. \tag{16а}$$

1) Вдоль прямой AB имеем $y = 2 - x$, $dy = -dx$ и по формуле (16а) получаем

$$E_1 = \int\limits_{2}^{-1} [2x(2-x) - x]\,dx = \frac{3}{2}.$$

2) Вдоль ломаной ACB на участке AC имеем $y = 0$ и $dy = 0$, на участке CB имеем $x = -1$, $dx = 0$. Поэтому

$$E_2 = \int\limits_{AC} 2xy\,dx + x\,dy + \int\limits_{CB} 2xy\,dx + x\,dy = -\int\limits_0^3 dy = -3.$$

Следовательно, $E_1 \neq E_2$ и величина работы данного векторного поля зависит от пути, вдоль которого совершается работа.

Пример 3. Требуется вычислить работу силового поля $\mathbf{a} = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ вдоль пути AB. Здесь

$$E = \int\limits_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy.$$

В этом случае интеграл не зависит от пути (см. теорему п. 191). Если A (2, 0) и B (−1, 3), то путем прямых расчетов нетрудно убедиться, что $E = 3$.

190. Формула Грина.* Формула Грина связывает двойной интеграл по плоской области с криволинейным интегралом по контуру этой области.

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$, $Q'_x(x, y)$ непрерывны в замкнутой области A, ограниченной контуром l. Предположим, что этот контур пересекается прямыми, параллельными осям координат не более чем в двух точках (рис. 133), что он гладкий или кусочно-гладкий и что его уравнения суть $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

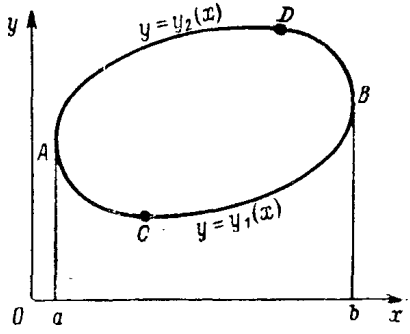

Рис. 133.

Преобразуем двойной интеграл $\iint\limits_A P'_y\,dx\,dy$ следующим образом:

$$\iint\limits_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \underset{\text{I}}{=} \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \underset{\text{II}}{=} \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\,dx -$$

$$- \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\,dx \underset{\text{III}}{=} \int\limits_{ADB} P(x, y)\,dx - \int\limits_{ACB} P(x, y)\,dx \underset{\text{IV}}{=}$$

$$= -\int\limits_l P(x, y)\,dx.$$

Переход I выполнен по правилу вычисления двойного интеграла путем сведения его к повторному интегралу, преобразование II выполнено по формуле Ньютона — Лейбница, переход III основывается на формуле (17), переход IV содержит два преобразо-

* Джорж Грин (1793—1841) — английский математик.

вания — в первом из интегралов изменено направление обхода контура ADB на BDA, в связи с чем изменен знак первого слагаемого, затем оба интеграла объединены согласно свойству 4° криволинейных интегралов. Имеем $\iint\limits_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dF = -\int\limits_l P\,dx$. Аналогично получим $\iint\limits_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dF = \int\limits_l Q\,dy$.

В результате вычитания этих равенств приходим к формуле Грина

$$\iint\limits_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dF = \int\limits_l P\,dx + Q\,dy. \tag{18}$$

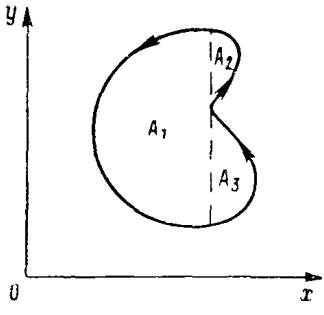

Рис. 134.

В этой формуле контур l обходится *в положительном направлении*; это значит, что при обходе контура область A остается с л е в а.

П р и м е ч а н и е. Формула Грина (18) имеет место при следующих более общих условиях.

1. Граница l области A может пересекаться прямыми, параллельными координатным осям, более чем в двух точках. Так, в случае, изображенном на рис. 134, область A можно разделить на части A_1, A_2, A_3 прямой, параллельной оси Oy. Если написать формулу (18) для каждой части области A и результаты сложить, то в левой части получится двойной интеграл по всей области A, а в правой части — криволинейный интеграл только по контуру l, потому что криволинейные интегралы по линии разреза области A встречаются по два раза, обходятся в противоположных направлениях и при сложении взаимно уничтожаются.

2. Область A может быть многосвязной. * Действительно, например в случае, изображенном на рис. 135, для доказательства нашего утверждения достаточно провести разрез так, чтобы получилась односвязная область, и убедиться в том, что интегралы вдоль линий разреза взаимно уничтожатся. Важно подчеркнуть, что в формуле Грина для многосвязной области контур l тоже обходится в положительном направлении.

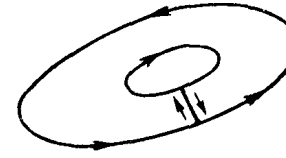

Рис. 135.

С помощью формулы Грина можно получить выражение площади плоской фигуры криволинейным интегралом по контуру этой фигуры. Для этого достаточно выбрать функции P и Q удовлетворяющими условию $Q'_x - P'_y \equiv 1$ в области A. Тогда двой-

---

* Плоская область A называется *односвязной*, если любой замкнутый контур, лежащий внутри этой области, ограничивает конечную часть плоскости, принадлежащую A. Если область не односвязна, то она называется *многосвязной*.

ной интеграл дает величину площади F_A области A. В частности, если $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$, то получим

$$F_A = \frac{1}{2}\int_l x\,dy - y\,dx. \tag{19}$$

Пример. Вычислим по формуле (19) площадь фигуры, заключенной внутри эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. Получим

$$F_A = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab.$$

191. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Пусть в плоской области $\bar{A}$ заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и M_0M — гладкая дуга, лежащая в $\bar{A}$. Рассмотрим вопрос о независимости от пути интеграла

$$\int_{M_0M} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{20}$$

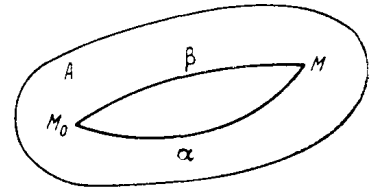

Рис. 136.

Теорема. *Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $P'_y(x, y)$ и $Q'_x(x, y)$ определены и непрерывны в односвязной ограниченной, замкнутой области $\bar{A}$ плоскости Oxy. Тогда следующие четыре условия равносильны между собой* (т. е. выполнение любого одного из них влечет за собой выполнение остальных трех условий).

1. *Криволинейный интеграл $\int_l P\,dx + Q\,dy$ по любому замкнутому контуру l, лежащему в области $\bar{A}$, равен нулю*:

$$\int_l P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{I}$$

2. *Интеграл* (20) *не зависит от пути интегрирования в области $\bar{A}$, а зависит лишь от положения конечных точек M_0 и M этого пути* (рис. 136) *и от функций P и Q*:

$$\int_{M_0\alpha M} P\,dx + Q\,dy = \int_{M_0\beta M} P\,dx + Q\,dy. \tag{II}$$

3. *Выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т. е. в области A существует такая функция $u(x, y)$, что*

$$du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{III}$$

4. В каждой точке области $\overline{A}$ выполнено условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{IV}$$

Логическая схема доказательства теоремы такова: докажем, что из условия (I) следует условие (II), из условия (II) — условие (III), из (III) следует (IV), а из (IV) следует (I).

1. Пусть выполнено условие (I), тогда будет равен нулю интеграл по замкнутому контуру $M_0\alpha M\beta M_0$, изображенному на рис. 136. Поэтому $\int\limits_{M_0\alpha M} + \int\limits_{M\beta M_0} = 0$ и $\int\limits_{M_0\alpha M} = \int\limits_{M_0\beta M}$. Доказательство этого результата в случае, когда кривые $M_0\alpha M$ и $M_0\beta M$ имеют более двух общих точек, мы опускаем.*

2. Пусть выполнено условие (II). Рассмотрим две точки области A: фиксированную точку $M_0(x_0, y_0)$ и переменную точку $M(x, y)$. В силу условия (II) интеграл (20) не зависит от пути, он является функцией точки $M(x, y)$. Определим функцию $u(x, y)$ равенством

$$u(x, y) = \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy. \tag{21}$$

Докажем, что эта функция имеет непрерывные частные производные первого порядка. Согласно условию (II) и формуле (21) величину $\Delta_x u = u(x + \Delta x, y) - u(x, y)$ можно рассматривать как криволинейный интеграл по пути, соединяющему точки $M(x, y)$ и $N(x + \Delta x, y)$:

$$\Delta_x u = \int\limits_{M_0MN} P\,dx + Q\,dy - \int\limits_{M_0M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{MN} P\,dx + Q\,dy. \tag{22}$$

По условию (II) криволинейный интеграл (22) не зависит от пути, поэтому можно принять в качестве пути интегрирования прямолинейный отрезок MN, параллельный оси Ox. Тогда под знаком интеграла (22) величина y будет сохранять постоянное значение, а $dy = 0$, и криволинейный интеграл (22) будет равен определенному интегралу, зависящему от параметра y; преобразуем его по теореме о среднем:

$$\Delta_x u = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x, y)\,dx = P(x + \theta\,\Delta x, y)\,\Delta x.$$

В силу непрерывности $P(x, y)$ отсюда следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta\,\Delta x, y) = P(x, y).$$

---

* См.: Г. М. Фихтенгольц. Основы математического анализа, т. II.

Аналогично выводится равенство $u'_y = Q(x, y)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \tag{23}$$

Отсюда следует, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

3. Пусть выполнено условие (III) и, следовательно, имеют место равенства (23). По теореме о равенстве смешанных производных имеем

$$P'_y = u''_{xy} = u''_{yx} = Q'_x,$$

т. е. выполнено условие (IV), так как P'_y и Q'_x непрерывны.

4. Пусть выполнено условие (IV). Фиксируем в области A любой замкнутый контур l, гладкий или кусочно-гладкий. Обозначим через ω область, ограниченную l; она будет односвязной, так же как и A. Напишем формулу Грина

$$\iint\limits_{\omega} (Q'_x - P'_y)\,dF = \int\limits_{l} P\,dx + Q\,dy.$$

Левая часть этого равенства равна нулю в силу условия (IV) и поэтому равна нулю и его правая часть, т. е. выполнено условие (I). Теорема полностью доказана.

Обобщение теоремы на случай трехмерного пространства. Аналогично можно доказать при соответствующих условиях равносильность следующих четырех условий:

I_0. $\int\limits_{l} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = 0.$

II_0. $\int\limits_{M_0 \alpha M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{M_0 \beta M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$

III_0. Существует $u(x, y, z)$ такая, что

$$du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{24}$$

Именно $u(x, y, z) = \int\limits_{M_0 M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$

IV_0. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$

Задача. Найти функцию $u(x, y)$, если известно выражение ее полного дифференциала $du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

Ограничимся пока случаем, когда функции P, Q, P'_y и Q'_x непрерывны в односвязной плоской области A.

В процессе доказательства теоремы мы установили одно из решений этой задачи, представленное формулой (21). Однако самое общее решение будет

$$u(x,\ y) = c + \int_{M_0}^{M} P\,dx + Q\,dy, \tag{25}$$

потому что если две функции имеют одинаковые дифференциалы, то они либо равны, либо отличаются постоянным слагаемым. Форма записи интеграла (25) подчеркивает, что он не зависит от пути интегрирования. Если в равенстве (25) совместить точку M с M_0, то получим $u(x_0,\ y_0) = c$. Поэтому общее решение задачи имеет вид

$$u(x,\ y) = u(x_0,\ y_0) + \int_{M_0}^{M} P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy. \tag{26}$$

В качестве пути интегрирования можно взять, например, ломаную, звенья которой параллельны осям координат.

Функцию $u(x,\ y)$ можно вычислить иначе. Сначала найти такую функцию $f(x,\ y)$, что $f'_x = P$. Затем, положив $u(x, y) = f(x, y) + \varphi(y)$, подобрать $\varphi(y)$, так чтобы выполнялось условие $u'_y = Q$.

Пример 1. Найти $u(x,\ y)$ из условия $du = 2xy\,dx + x^2\,dy$.

Решение. Имеем $P = 2xy$, $Q = x^2$, $P'_y = Q'_x = 2x$. Поэтому $u'_x = 2xy$ и $u'_y = x^2$. Из условия $u'_x = 2xy$ следует, что $u = x^2y + \varphi(y)$. Условие $u'_y = x^2$ дает $x^2 + \varphi'(y) = x^2$, т. е. $\varphi'(y) = 0$ и $\varphi = c$, где c — постоянная. Окончательно получаем $u(x,\ y) = x^2y + c$.

Замечание о криволинейных интегралах в многосвязной области. Пусть по-прежнему функции P, Q, P'_y и Q'_x непрерывны в замкнутой ограниченной области $\overline{A}$, но $\overline{A}$ многосвязна. Пусть, например, $\overline{A}$ — двухсвязная область — это область $\overline{B}$, из которой исключена область C, поэтому $\overline{A} = \overline{B} - C$.

Пусть в области $\overline{A}$ выполнено условие (IV). Тогда

1) Криволинейный интеграл (20) по любому контуру l, проходящему в A и не охватывающему область C, будет равен нулю (в силу формулы Грина).

2) Если же контур l охватывает C, то величина интеграла (20), вообще говоря, будет отлична от нуля. Но и в этом случае она не зависит от выбора контура l, охватывающего C:

$$\int_{l_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{l_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{27}$$

Действительно, рассмотрим односвязную область ω, ограниченную линиями l_1, l_2 и разрезом ab (рис. 137), который обходится два раза в противоположных направлениях. Условие (I) в этом

случае примет вид $\int\limits_{l_1} + \int\limits_{ab} + \int\limits_{-e_2} + \int\limits_{ba} = 0$. Отсюда следует равенство (27).

Пример 2. $J = \int\limits_l \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$.

Если контур l не охватывает начало координат, то $J = 0$ по теореме п. 191, потому что функции P, Q, P'_y и Q'_x внутри контура и на нем непрерывны и $P'_y = Q'_x$.

Если же контур l охватывает начало координат, то теорема эта не применима, потому что функции P и Q в начале координат не определены. Поэтому исключим некоторую окрестность начала координат. В оставшейся области функции P, Q, P'_y и Q'_x непрерывны и выполнено условие (IV). Поэтому величина интеграла J по любому контуру l, охватывающему начало, не зависит от формы l и постоянна. Для вычисления этой постоянной выберем в качестве контура l окружность $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогда $x^2+y^2 = r^2$, $x\,dy - y\,dx = r^2 d\varphi$ и $J = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$. При каждом обходе начала координат против часовой стрелки интеграл приобретает эту постоянную.

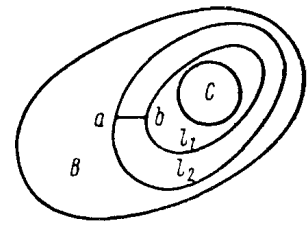

Рис. 137.

Задача о количестве тепла, поглощенного газом при переходе из одного состояния в другое. Рассмотрим некоторую массу газа, например 1 кг. Состояние газа характеризуется тремя величинами — его объемом v, давлением p и абсолютной температурой T. Если считать газ идеальным, то эти три величины связаны уравнением Клапейрона: $pv = RT$. Таким образом, для определения состояния газа достаточно знать две из трех величин, пусть это будут v и p. Тогда точка плоскости (v, p) будет служить изображением состояния газа.

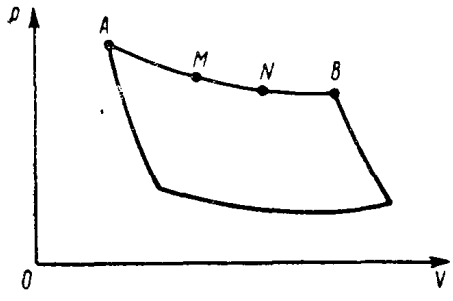

Рис. 138.

Если состояние газа меняется от некоторого начального состояния, соответствующего точке A, до конечного состояния, определенного точкой B, то весь процесс изменения характеризуется кривой AB, устанавливающей последовательность непрерывно меняющихся состояний. Процесс предполагается квазистатическим, когда все параметры меняются бесконечно медленно, так что система все время находится в состоянии равновесия.

Требуется установить количество тепла Q, поглощенного (или выделенного) данной массой газа во время процесса, характеризуемого кривой AB.

Для этого рассмотрим «бесконечно малый» элементарный процесс, переводящий газ из состояния $M(v, p)$ в бесконечно близкое состояние $N(v + dv, p + dp)$; ему отвечает элемент MN кривой AB (рис. 138). При переходе из состояния M в состояние N газу было сообщено количество тепла δQ, определяемое известной формулой

$$\delta Q = \frac{1}{R}\,(vc_v dp + pc_p dv), \qquad (28)$$

где c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме; c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении. Для нахождения общего количества тепла Q, сообщенного газу в течение всего процесса, представленного кривой AB, надо «просуммировать» элементы δQ вдоль всей кривой и мы получим выражение Q в виде криволинейного интеграла

$$Q = \int\limits_{AB} \delta Q = \int\limits_{AB} \frac{vc_v}{R}\, dp + \frac{pc_p}{R}\, dv. \tag{29}$$

Если считать, как это обычно делается, величины c_v и c_p постоянными, то выражение, находящееся под знаком интеграла (29), не является полным дифференциалом, потому что $c_p > c_v$ и

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{pc_p}{R}\right) = \frac{c_p}{R} \neq \frac{c_v}{R} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{vc_v}{R}\right).$$

Функциями состояния называются величины, не зависящие от предыстории процесса и полностью определяемые их состоянием в данный момент. Количество тепла Q **не является** функцией состояния и зависит от процесса, который к этому состоянию приводит. Действительно, в нашем случае величина Q представлена криволинейным интегралом, который **зависит** от пути AB. Поэтому при циклическом процессе, возвращающем газ в его первоначальное состояние, газ может приобрести или потерять некоторое количество тепла.

Если выражение элементарного количества тепла (28) разделить на $T = \frac{pv}{R}$, то получим равенство $\frac{\delta Q}{T} = \frac{c_p}{v}\, dv + \frac{c_v}{p} dp$. Его правая часть представляет собой полный дифференциал, так как

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{c_p}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{c_v}{p}\right) = 0.$$

Первообразной здесь служит функция $S(v, p) = c_p \ln v + c_v \ln p$.

Криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(v_0,\ p_0)}^{(v,\ p)} \frac{\delta Q}{T} = S(v, p) - S(v_0, p_0) \tag{30}$$

уже **не зависит** от пути интегрирования. Этот интеграл определяет так называемую *энтропию* — физическую величину, которая является функцией состояния.

192. Потенциальное векторное поле. Пусть в области B определена векторная функция $\mathbf{a}(M)$ с проекциями $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ на соответствующие координатные оси декартовой системы. Пусть l — кривая, проходящая в B. *Работой векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *вдоль пути* l называется величина интеграла

$$\int\limits_l \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \int\limits_l P\, dx + Q\, dy + R\, dz. \tag{31}$$

Если контур l представляет замкнутую линию, то работа векторного поля называется *циркуляцией вектора вдоль этого замкнутого контура.*

О п р е д е л е н и е. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *потенциальным* в области B, если работа этого поля не зависит от пути.

Условие потенциальности векторного поля, указанное в определении, равносильно (см. п. 191) любому из условий:

циркуляция вектора $\mathbf{a}(M)$ вдоль каждого замкнутого контура, принадлежащего B, равна нулю;

имеют место в области B тождества $P'_y = Q'_x$, $Q'_z = R'_y$, $R'_x = P'_z$;

выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$ в области B.

Пусть поле $\mathbf{a}(M)$ потенциально. *Потенциалом* такого поля в точке M называется функция

$$u(M) = u(M_0) + \int\limits_{M_0 M} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{32}$$

Заметим, что иногда под потенциалом векторного поля понимают не $u(M)$, а $-u(M)$.

Теорема 1. *Работа потенциального векторного поля вдоль любого пути равна разности значений потенциала этого поля в конце и в начале пути.*

Действительно, из (31) и (32) следует равенство

$$\int\limits_{M_0 M} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = u(M) - u(M_0). \tag{33}$$

Теорема 2. *Для потенциальности векторного поля* $\mathbf{a}(M)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} u(M). \tag{34}$$

Действительно, если поле $\mathbf{a}(M)$ потенциально, то $P = u'_x$, $Q = u'_y$, $R = u'_z$. Поэтому $\mathbf{a} = u'_x\mathbf{i} + u'_y\mathbf{j} + u'_z\mathbf{k} = \operatorname{grad} u$.

Обратно, если выполнено условие (34), то $P = u'_x$, $Q = u'_y$, $R = u'_z$ и $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du$ и, следовательно, поле потенциально.

П р и м е р 1. Электростатическое поле точечного заряда величины q, помещенного в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, характеризуется вектором напряженности $\mathbf{E}$, который в точке $M(x, y, z)$ равен

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\,\mathbf{r}, \tag{35}$$

если принять равным единице коэффициент, характеризующий среду, и положить $\mathbf{r} = (x - x_0)\,\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\,\mathbf{k}$. Действительно, согласно закону Кулона, величина E прямо пропорциональна величине заряда q и обратно пропорциональна квадрату расстояния между источником M_0 и точкой наблюдения M. Вектор напряженности $\mathbf{E}$ направлен от M_0 к M и орт этого направления равен $\mathbf{r}/r$. Поэтому имеем формулу (35).

Докажем, что вектор напряженности $\mathbf{E}$ равен градиенту скалярной функции $u(M) = -q/r$. Для этого найдем частные производные $u'_x = u'_r r'_x =$

$= q(x - x_0)/r^3$, $u'_y = q(y - y_0)/r^3$, $u'_z = q(z - z_0)/r^3$ и по формуле (7) п. 183 получим

$$\operatorname{grad} u = \frac{q}{r^3}[(x-x_0)\,\mathbf{i} + (y-y_0)\,\mathbf{j} + (z-z_0)\,\mathbf{k}] = \frac{q\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{E}.$$

Следовательно, выполнено условие (34) и функция $u(M) = -q/r$ есть потенциал векторного поля $\mathbf{E}(M)$.

Пример 2. Рассмотрим поле, создаваемое материальной точкой массы m. Так же, как в примере 11, получим выражение силы, с которой притягивается единичная масса, помещенная в точке M, $\mathbf{F}(M) = -\frac{m\mathbf{r}}{r^3}$, если постоянную тяготения принять равной единице. Сила тяготения $\mathbf{F}$ является градиентом скалярной функции $u = m/r$ и поэтому u есть *потенциал поля тяготения*, создаваемого точечным источником.

Пример 3. Пусть дано центральное поле; это значит, что векторы этого поля направлены в одну точку M_0 (называемую центром) или из нее. Поэтому

$$\mathbf{a} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{36}$$

где $\mathbf{r} = (x-x_0)\,\mathbf{i} + (y-y_0)\,\mathbf{j} + (z-z_0)\,\mathbf{k}$. Следовательно, $P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$

$$= f(r)\left[\frac{x-x_0}{r}\,dx + \frac{y-y_0}{r}\,dy + \frac{z-z_0}{r}\,dz\right] = f(r)\,dr = du(r),$$

где

$$u(r) = \int f(r)\,dr. \tag{37}$$

Отсюда следует, что центральное векторное поле (36) потенциально и его потенциал определяется равенством (37).

В частности, если $f(r) = kq/r^2$ ($k = +1$ или $k = -1$), что соответствует случаю поля тяготения и электростатического поля при наличии точечного источника в однородной среде, то

$$u(M) = kq\int \frac{dr}{r^2} = -\frac{qk}{r}.$$

По теореме 1 получаем выражение работы центрального поля в рассматриваемом случае

$$\int_{M_0 M} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = u(M) - u(M_0) = -\frac{qk}{r} + \frac{qk}{r_0}. \tag{38}$$

§ 33. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

193. Определение поверхностных интегралов, их свойства. Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов. Рассмотрим прежде всего задачу, которая приведет к понятию поверхностного интеграла первого рода.

Задача о массе изогнутой пластины. Пусть на поверхности S непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(M)$. При этом под плотностью вещества в точке M поверхности S понимается предел средней плотности на бесконечно малом элементе, содержащем точку M. Требуется определить всю массу материальной поверхности S.

Решение задачи состоит в выполнении следующих действий (рис. 139). 1. Разделим поверхность S произвольными гладкими линиями на n элементарных частей ΔS_k с площадями $\Delta\sigma_k$, наибольшую из этих площадей обозначим λ_n.

2. Предположим, что в каждой элементарной части ΔS_k плотность постоянна и равна $\rho(N_k)$, где N_k — одна из точек ΔS_k, безразлично какая. Тогда масса k-го элемента будет приближенно равна $\Delta m_k \approx \rho(N_k)\,\Delta\sigma_k$.

3. Для массы всей поверхности получим приближенное выражение $m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\,\Delta\sigma_k$.

4. Определим массу материальной поверхности («изогнутой пластины») как предел полученной суммы при стремлении λ_n к нулю:

$$m = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\,\Delta\sigma_k = \iint_S \rho(M)\,d\sigma. \tag{1}$$

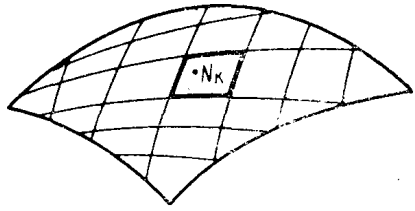

Рис. 139.

Пределы такого вида называются *поверхностными интегралами первого рода.*

Сформулируем определение поверхностного интеграла первого рода в общем случае. Пусть функция $F(M)$ определена на гладкой поверхности S. Разделим, как и выше, S на элементы $\Delta S_1, \ldots, \Delta S_n$ с площадями $\Delta\sigma_1, \ldots, \Delta\sigma_n$ соответственно и обозначим через λ_n наибольшую из этих площадей. Выберем на каждом элементе ΔS_k произвольную точку N_k и составим такую интегральную сумму:

$$\alpha_n \equiv \sum_{k=1}^{n} F(N_k)\,\Delta\sigma_k.$$

О п р е д е л е н и е 1. Конечный предел интегральной суммы α_n при стремлении λ_n к нулю (если этот предел существует и не зависит от способа деления S на элементарные части и от выбора точек N) называется *поверхностным интегралом первого рода от функции $F(M)$ по поверхности S* и обозначается символом

$$\iint_S F(M)\,d\sigma = \lim_{\lambda_n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(N_k)\,\Delta\sigma_k. \tag{2}$$

Его физическое истолкование: например, это масса материальной поверхности с плотностью распределения вещества $F(M)$.

Введем понятие с т о р о н ы п о в е р х н о с т и. Пусть S — гладкая поверхность (см. п. 133), не содержащая особых точек. Выберем на ней внутреннюю точку M_0, проведем через нее

нормаль к S и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений; пусть оно представлено единичным вектором $\mathbf{n}$. Проведем на S через M_0 какой-либо замкнутый контур l, не имеющий общих точек с границей поверхности. Будем перемещать точку M из положения M_0 вдоль l так, чтобы вектор $\mathbf{n}$ оставался все время нормальным к S и чтобы его направление менялось при этом непрерывно. Возможны только два случая: после обхода контура мы вернемся в M_0 либо с тем же направлением нормали, либо с направлением, противоположным исходному.

Гладкая поверхность S называется двусторонней, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на S и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали.

Введем понятие поверхностного интеграла второго рода. Пусть S — гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем ту сторону этой поверхности, которая представлена выбранным единичным вектором нормали к поверхности $\mathbf{n} = \mathbf{n}(M)$. Пусть в каждой точке поверхности S определена векторная функция точки $\mathbf{a}(M)$, имеющая непрерывные проекции $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ на координатные оси.

Разобьем поверхность каким-либо способом на элементы ΔS_k с площадями $\Delta\sigma_k$ и обозначим наибольшую из этих площадей через λ_n. На каждом элементе выберем произвольную точку N_k и рассмотрим сумму

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}(N_k)\,\mathbf{n}(N_k)\,\Delta\sigma_k,$$

где $\mathbf{a}(N_k)$ — значение вектора $\mathbf{a}(M)$ в точке N_k; $\mathbf{n}(N_k)$ — единичный вектор нормали в этой точке; $\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}$ — скалярное произведение этих векторов.

Определение 2. Конечный предел интегральной суммы β_n при стремлении λ_n к нулю (если он существует и не зависит от способа деления S на элементы и выбора точек N) называется *поверхностным интегралом второго рода от векторной функции* $\mathbf{a}(P, Q, R)$ *по выбранной стороне поверхности* и обозначается символом

$$\iint_S \mathbf{an}\,d\sigma = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}(N_k)\,\mathbf{n}(N_k)\,\Delta\sigma_k. \tag{3}$$

Из определения следует, что при изменении стороны поверхности поверхностный интеграл второго рода меняет лишь знак. Действительно, если изменить направление $\mathbf{n}$ на противоположное, то изменит знак сумма β_n и ее предел (3).

Обозначим направляющие косинусы вектора $\mathbf{n}$, соответствующего выбранной стороне поверхности, через $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Интегральную сумму β_n можно записать в виде

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]_{N_k}\,\Delta\sigma_k. \tag{4}$$

Перейдя в (4) к пределу при $\lambda_n \to 0$, согласно (2) и (3) получим

$$\iint_S \mathbf{an}\, d\sigma = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma. \tag{5}$$

Примечание 1. Если $d\sigma$ — бесконечно малый элемент площади поверхности, то выражения $\cos\alpha d\sigma$, $\cos\beta d\sigma$, $\cos\gamma d\sigma$ представляют собой проекции элемента $d\sigma$ на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy; поэтому мы обозначим их $dydz$, $dxdz$ и $dxdy$ соответственно.

На основании этого интеграл (3) записывают также в другой форме:

$$\iint_S \mathbf{an}\, d\sigma = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iint_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy. \tag{6}$$

Если интегральную сумму β_n представить в виде $\beta_n = \sum_{k=1}^{n} a_n(N_k)\,\Delta\sigma_k$, где $a_n(M)$ — проекция вектора $\mathbf{a}(M)$ на нормаль $\mathbf{n}(M)$, и перейти в этом равенстве к пределу, то получим следующую формулу связи между поверхностными интегралами первого и второго рода:

$$\iint_S \mathbf{an}\, d\sigma = \iint_S a_n(M)\, d\sigma. \tag{7}$$

Примечание 2. Можно доказать, что при наших предположениях о гладкости поверхности S и непрерывности функций $F(M)$, $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ интегралы (2) и (3) существуют.

Общие свойства поверхностных интегралов.

1°. *Постоянный множитель можно вынести за знак поверхностного интеграла.*

2°. *Поверхностный интеграл от алгебраической суммы функций равен соответствующей сумме интегралов от слагаемых.*

3°. *Если поверхность разбить на конечное число частей, то интеграл по всей поверхности равен сумме интегралов по всем ее частям.*

4°. *Меньшей функции соответствует меньший интеграл, т. е. из неравенства* $f(M) \leqslant g(M)$, *которое выполняется на* S, *следует неравенство* $\iint_S f(M)\, d\sigma \leqslant \iint_S g(M)\, d\sigma$ *и, например,* $\iint_S f(M)\, dxdy \leqslant \iint_S g(M)\, dxdy$, *если* $\cos(\mathrm{n}, z) > 0$.

5°. **Теорема о среднем.** *Если* $F(M)$ *непрерывна на поверхности* S (*с площадью* σ), *то на* S *имеется такая точка* M_*, *что*

$$\iint_S F(M)\, d\sigma = F(M_*)\,\sigma.$$

Все эти свойства поверхностных интегралов вытекают из их определения и выводятся так же, как свойства определенных, кратных и криволинейных интегралов (см. пп. 154, 169, 188).

194. **Поток вектора через поверхность.** Пусть в области B дана векторная функция точки $\mathbf{a}(M)$ с непрерывными проекциями $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ на координатные оси.

На поверхности S, ограничивающей B, выберем определенную сторону и рассмотрим интеграл (3). Он допускает следующее физическое истолкование. Будем трактовать векторную функцию $\mathbf{a}(M)$ как скорость потока однородной жидкости с плотностью $\rho = 1$. Тогда произведение

$$\mathbf{a}(N_k)\,\mathbf{n}(N_k)\,\Delta\sigma_k = a(N_k)\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{n})_{N_k}\,\Delta\sigma_k, \tag{8}$$

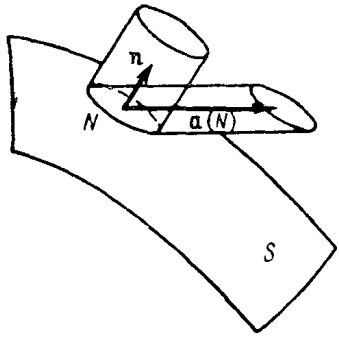

Рис. 140.

представляющее общий член интегральной суммы (3), может быть истолковано либо как объем цилиндра (любого из двух равновеликих цилиндров, изображенных на рис. 140 с основанием $\Delta\sigma_k$ и высотой, равной проекции вектора $\mathbf{a}$ на нормаль $\mathbf{n}$), либо как отнесенное к единице времени количество жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma_k$ в сторону нормали $\mathbf{n}$ (так как $\rho = 1$).

Следовательно, интеграл (3) дает общее количество жидкости, протекающей через поверхность S в сторону выбранной нормали $\mathbf{n}$, отнесенное к единице времени.

Поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S \mathbf{an}\,d\sigma \tag{9}$$

(независимо от конкретного смысла вектора $\mathbf{a}$) называется *потоком вектора* $\mathbf{a}(M)$, или *потоком векторного поля* $\mathbf{a}(M)$, через поверхность S в сторону нормали $\mathbf{n}$. Заметим, что при перемене направления $\mathbf{n}$ интеграл меняет лишь знак.

Пример. Рассмотрим поле температур $u(M)$. Через элемент $d\sigma$ поверхности S в сторону нормали $\mathbf{n}$ за время dt вследствие теплопроводности переместится количество тепла, равное $dQ = -kd\sigma\,\dfrac{\partial u}{\partial n}\,dt$, где k — положительное число, называемое коэффициентом внутренней теплопроводности. Введем в рассмотрение так называемый *вектор потока тепла* $\mathbf{q} = -k\,\mathrm{grad}\,u$. В соответствии с формулой (8) п. 184 имеем $dQ = q_n\,d\sigma dt$. Поэтому через всю поверхность S переместится количество тепла (отнесенное к единице времени), равное потоку вектора $\mathbf{q}$ через поверхность S в направлении нормали $\mathbf{n}$: $Q = \iint\limits_S q_n d\sigma$.

195. **Вычисление поверхностных интегралов.** Пусть гладкая по-

верхность S задана уравнением

$$z = f(x,\ y), \tag{10}$$

правая часть которого определена в области A, представляющей проекцию поверхности S на плоскость Oxy. Предполагаемая гладкость поверхности S означает непрерывность частных производных $f'_x \equiv p$ и $f'_y \equiv q$.

Для нахождения направляющих косинусов нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S запишем уравнение (10) в виде $\varphi \equiv f(x,\ y) - z = 0$ и найдем $\varphi'_x = p$, $\varphi'_y = q$, $\varphi'_z = -1$. Получим (см. п. 133)

$$\cos\alpha = \frac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{11}$$

Выберем ту сторону поверхности, для которой выполнено условие $\cos\gamma > 0$ (рис. 141). Поэтому в формулах (11) перед корнем следует выбрать знак минус и тогда, в частности, получим

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}. \tag{12}$$

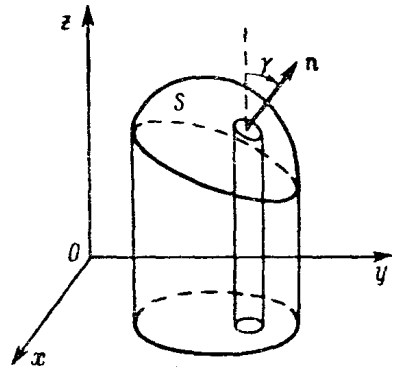

Рис. 141.

Заметим, что величина $\Delta\sigma$ площади элемента поверхности S связана с площадями проекций $\Delta\sigma_{yz}$, $\Delta\sigma_{xz}$, $\Delta\sigma_{xy}$ этого элемента на координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy соотношениями

$$\Delta\sigma_{yz} = \Delta\sigma\cdot\cos\alpha, \quad \Delta\sigma_{xz} = \Delta\sigma\cdot\cos\beta, \quad \Delta\sigma_{xy} = \Delta\sigma\cdot\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ суть направляющие косинуса нормали к S в некоторой точке N^* элемента ΔS. Следовательно, имеем

$$\Delta\sigma = \sqrt{1+p^2+q^2}\Big|_{N^*}\Delta\sigma_{xy}. \tag{13}$$

Заменим в интегральной сумме, соответствующей интегралу (2), величину $\Delta\sigma$ по формуле (13), а величину z — по формуле (10). Получим

$$\sum_k F(x_k,\ y_k,\ z_k)\,\Delta\sigma_k = \sum_k F(x_k,\ y_k,\ f(x_k,\ y_k))\,\sqrt{1+p^2+q^2}\Big|_{N_k^*}(\Delta\sigma_{xy})_k. \tag{14}$$

Если в качестве точки N_k выбрать точку N_k^* и перейти в этом равенстве к пределу при $\lambda_n \to 0$, то получим формулу,

связывающую поверхностный интеграл первого рода с двойным интегралом:

$$\iint\limits_S F(x,\ y,\ z)\,d\sigma = \iint\limits_A F(x,\ y,\ f(x,y))\ \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \quad (15)$$

При $F(M) \equiv 1$ на S по определению поверхностного интеграла имеем

$$\iint\limits_S d\sigma = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_n = F_S,$$

где F_S — площадь поверхности S. В этом случае формула (15) дает выражение площади поверхности в виде двойного интеграла:

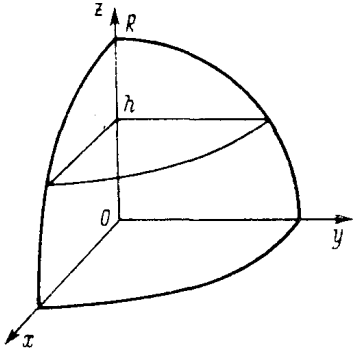

Рис. 142.

$$F_S = \iint\limits_A \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy. \quad (16)$$

Пример 1. Найти площадь части сферической поверхности $x^2+y^2+z^2=R^2$, вырезанной из нее плоскостью $z=h$, где $0 \leqslant h < R$ (рис. 142).

Здесь $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, поэтому $p=-x/z$, $q=-y/z$ и $1+p^2+q^2=R^2/z^2$. Область A есть круг радиусом $R_1=\sqrt{R^2-h^2}$ с центром в точке с координатами $x_0=y_0=0$, $z_0=0$. По формуле (16) получим

$$F_S = \iint\limits_A \frac{R}{z}\,dF = 4R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R_1} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}} = 2\pi R \sqrt{R^2-r^2}\,\Big|_{R_1}^{0} = 2\pi R\,(R-h).$$

С целью сведения поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S R\,(M)\,dx\,dy$ к двойному интегралу заменим в соответствующей интегральной сумме величину z по формуле (10); получим

$$\sum_k R\,(x_k,\ y_k,\ z_k)\,(\Delta\sigma_{xy})_k = \sum_k R\,(x_k,\ y_k,\ f\,(x_k,\ y_k))\,(\Delta\sigma_{xy})_k.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $\lambda_n \to 0$, получим значение нашего интеграла по верхней стороне поверхности

$$\iint\limits_S R\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy = \iint\limits_A R\,(x,\ y,\ f\,(x,\ y))\,dx\,dy. \quad (17)$$

Аналогично вычисляются поверхностные интегралы второго рода по координатам x, z и y, z.

Вычисление поверхностного интеграла от векторной функции точки сводится к вычислению поверхностного интеграла первого рода с помощью формулы (5).

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy$, где S — верхняя сторона поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=b$ и $z=0$.

Решение. Проекция S на плоскость Oxy есть прямоугольник A, определяемый неравенствами $-a\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$. По формуле (17) находим

$$\iint\limits_S (y^2+z^2)\,dx\,dy=\iint\limits_A (y^2+a^2-x^2)\,dx\,dy=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_0^b (y^2+a^2-x^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{b^3}{3}+a^2b-x^2b\right)dx=\frac{2}{3}\,ab\,(2a^2+b^2).$$

196. Формула Остроградского.* Формула Остроградского связывает тройной интеграл по трехмерной области с поверхностным интегралом по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область.

Пусть дана замкнутая конечная трехмерная область $\overline{B}$, ограниченная поверхностью S. Относительно S предполагается, что она гладкая или кусочно-гладкая и что прямые, параллельные осям координат, пересекают ее не более чем в двух точках. Проекция S на плоскость Oxy есть область A (рис. 143).

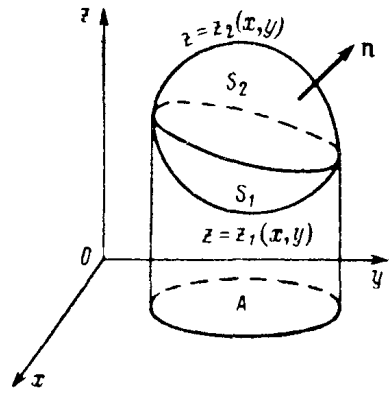

Рис. 143.

Пусть $z=z_1(x, y)$ и $z=z_2(x, y)$ суть уравнения соответствующих частей S — нижней части S_1 и верхней S_2, где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывны в области A.

Данные функции P, Q и R непрерывны вместе со своими частными производными P'_x, Q'_y, R'_z в замкнутой области $\overline{B}$.

Рассмотрим тройной интеграл от R'_z по области $\overline{B}$ и преобразуем его, как указано ниже, в двойной интеграл и, наконец, в поверхностный интеграл второго рода:

$$\iiint\limits_B \frac{\partial R}{\partial z}\,d\tau \underset{\text{I}}{=} \iint\limits_A dx\,dy \int\limits_{z_1(x,\,y)}^{z_2(x,\,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz \underset{\text{II}}{=} \iint\limits_A [R(x,\ y,\ z_2(x,\ y))-$$

$$-R(x,\ y,\ z_1(x,\ y))]\,dx\,dy \underset{\text{III}}{=} \iint\limits_{S_2} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy-$$

$$-\iint\limits_{S_1} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy \underset{\text{IV}}{=} \iint\limits_{S_2} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy+$$

$$+\iint\limits_{S_1} R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy=\iint\limits_S R(x,\ y,\ z)\,dx\,dy. \qquad (18)$$

* Михаил Васильевич Остроградский (1801—1861) — русский математик и механик.

Преобразование I основано на правиле вычисления тройного интеграла, II — на формуле Ньютона — Лейбница, III — на формуле (17); в результате получаются интегралы по верхним сторонам поверхностей S_1 и S_2. Преобразование IV приводит к поверхностным интегралам по внешним сторонам S_1 и S_2. Затем эти интегралы объединены в один интеграл по внешней стороне поверхности S.

Аналогично получим

$$\iiint\limits_B Q'_y\,d\tau = \iint\limits_S Q\,dx\,dz, \quad \iiint\limits_B P'_x\,d\tau = \iint\limits_S P\,dy\,dz. \tag{19}$$

Сложив эти три равенства, придем к так называемой *формуле Остроградского* (в координатной форме)

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau, \tag{20}$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности S.

Примечание. При выводе формулы Остроградского мы считали, что поверхность S, ограничивающая область B, пересекается прямыми, параллельными координатным осям, не более чем в двух точках. Можно доказать справедливость формулы Остроградского при условии, что B есть ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

197. Дивергенция вектора. Пусть дана векторная функция точки $\mathbf{a}(M)$, проекции которой $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$ на координатные оси имеют частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$.

Определение. *Дивергенцией, или расходимостью, вектора* $\mathbf{a}(M)$ называется скалярная функция точки, определяемая равенством

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{21}$$

С помощью понятий дивергенции вектора и потока вектора (см. п. 194) формула Остроградского может быть записана в векторной форме

$$\iint\limits_S a_n\,d\sigma = \iiint\limits_B \operatorname{div}\mathbf{a}\,d\tau \tag{22}$$

и сформулирована так: *поток вектора* $\mathbf{a}$ *через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен интегралу от дивергенции этого вектора, взятому по области, ограниченной этой поверхностью.*

Инвариантное (по отношению к выбору системы координат) определение дивергенции вектора получим с помощью формулы (22). Для этого фиксируем точку M векторного поля $\mathbf{a}(M)$, окру-

жим ее поверхностью S и обозначим через B область, ограниченную S. Напишем для области B формулу Остроградского (22) и по теореме о среднем для тройного интеграла получим

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M_*)V_B = \iint\limits_S a_n\,d\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M) = \lim_{(S)\to M} \frac{\iint\limits_S a_n\,d\sigma}{V_B}, \tag{23}$$

т. е. *дивергенция вектора в каждой точке поля M есть предел отношения потока этого вектора через бесконечно малую замкнутую поверхность, окружающую M, к величине объема области, ограниченной этой поверхностью.*

Физический смысл понятия дивергенции позволяет выяснить формула (23). Для этого будем трактовать $\mathbf{a}(M)$ как вектор скорости течения однородной несжимаемой жидкости (с плотностью $\rho = 1$). В п. 194 установлено, что интеграл $J = \iint\limits_S a_n d\sigma$ равен количеству жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S в сторону нормали $\mathbf{n}$. Пусть S — замкнутая поверхность и $\mathbf{n}$ — ее внешняя нормаль.

Если величина потока $J > 0$, то из области B, ограниченной поверхностью S, вытекает больше жидкости, чем втекает в нее. Следовательно, внутри B должны быть и с т о ч н и к и жидкости, обильность (интенсивность) которых характеризуется величиной потока J. Если $J < 0$, то внутри B есть с т о к и жидкости. Обильностью, мощностью, или интенсивностью, источника (стока) назовем величину потока вектора через бесконечно малую поверхность, охватывающую источник или сток.

Более точной характеристикой обильности источников и стоков в области B служит удельная обильность, т. е. отношение величины потока к объему области, ограниченной S: J/V_B. Именно эта величина содержится в формуле (23) под знаком предела. Для того чтобы получить характеристику удельной обильности источника или стока в точке M, надо перейти к пределу в полученном отношении, когда область B стягивается к точке M. При этом согласно формуле (23) получим значение дивергенции вектора скорости в точке M.

Следовательно, если $\mathbf{a}(M)$ есть скорость потока однородной несжимаемой жидкости, то $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ характеризует удельную обильность источника или стока в точке M рассматриваемого поля скоростей.

В общем случае, когда вектор $\mathbf{a}(M)$ может быть не является вектором скорости потока жидкости, величина $\iint\limits_S a_n\,d\sigma$ есть поток вектора $\mathbf{a}$ через поверхность S. Поэтому, рассуждая так же, как

выше, придем к выводу, что $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ характеризует мощность источника или стока поля в точке M.

Поэтому точки, в которых $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)>0$, называются *источниками векторного поля*; точки, в которых $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)<0$, называются *стоками векторного поля* $\mathbf{a}(M)$.

Заметим, что иногда в физике под интенсивностью источника (стока) понимают не $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$, а $\frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$.

Формальные свойства дивергенции. Пусть $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{b}(M)$ — векторные функции точки и $\varphi(M)$ — скалярная функция точки. Тогда

$$1^\circ.\ \operatorname{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\operatorname{div}\mathbf{a}+\operatorname{div}\mathbf{b}, \tag{24}$$

$$2^\circ.\ \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a})=\varphi\operatorname{div}\mathbf{a}+(\operatorname{grad}\varphi,\ \mathbf{a}). \tag{25}$$

Действительно, согласно определению дивергенции имеем *

$$1)\ \operatorname{div}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\frac{\partial(a_x+b_x)}{\partial x}\mathbf{i}+\ldots=\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{i}+\ldots+\frac{\partial b_x}{\partial x}\mathbf{i}+\ldots=$$

$$=\operatorname{div}\mathbf{a}+\operatorname{div}\mathbf{b},$$

$$2)\ \operatorname{div}(\varphi\mathbf{a})=\frac{\partial(\varphi a_x)}{\partial x}\mathbf{i}+\ldots=\varphi\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\mathbf{i}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x+\ldots\right)=\varphi\operatorname{div}\mathbf{a}+(\operatorname{grad}\varphi,\ \mathbf{a}).$$

198. Соленоидальное векторное поле. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ называется *соленоидальным* в области B, если в этой области нет источников и стоков, т. е. выполнено условие

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=0. \tag{26}$$

Рассмотрим произвольную векторную трубку между двумя ее произвольными сечениями S_1 и S_2 (рис. 144); поверхность рассматриваемого участка трубки обозначим S. Согласно условию (26) формула Остроградского (22) дает

$$\iint\limits_{S_1}a_n\,d\sigma+\iint\limits_{S_2}a_n\,d\sigma+\iint\limits_{S}a_n\,d\sigma=0.$$

По определению векторной трубки векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ на поверхности S ортогональны, их скалярное произведение равно нулю, и поэтому равен нулю интеграл по S. Если в интеграле по поверхности S_2 изменить направление нормали, то придем к равенству

$$\iint\limits_{S_1}a_n\,d\sigma=\iint\limits_{S_2}a_n\,d\sigma,$$

* О значении многоточий см. примечание в конце п. 184.

выражающему следующее положение: *поток соленоидального вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянную величину*; ее называют интенсивностью векторной трубки.

Пример. Требуется вычислить дивергенцию и поток вектора напряженности электростатического поля, создаваемого точечным источником.

Пусть источник находится в начале координат. Тогда

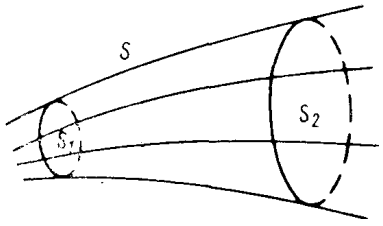

Рис. 144.

$$\mathbf{E} = \frac{q}{r^3}\mathbf{r}, \text{ где } \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Проекции вектора $\mathbf{E}$ будут $E_x = \frac{qx}{r^3}$, $E_y = \frac{qy}{r^3}$, $E_z = \frac{qz}{r^3}$. Их производные соответственно равны:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{q}{r^5}(r^2 - 3x^2), \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{q}{r^5}(r^2 - 3y^2), \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{r^5}(r^2 - 3z^2).$$

Поэтому, если $r \neq 0$, то дивергенция вектора напряженности равна

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{q}{r^5}[3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)].$$

Таким образом, *дивергенция электростатического поля точечного источника равна нулю всюду вне источника*:

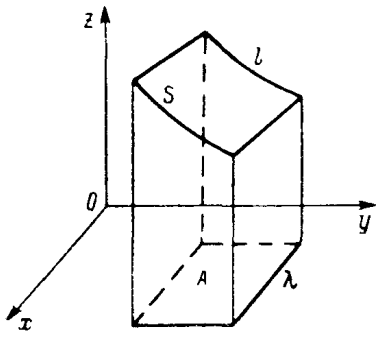

Рис. 145.

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(M) = 0. \tag{27}$$

Рассмотрим величину потока вектора напряженности через замкнутую поверхность S в сторону ее внешней нормали. Возможны два случая. Если поверхность S не содержит внутри себя источника, то по формуле Остроградского, принимая во внимание условие (27), получим

$$\iint\limits_S E_n\, d\sigma = 0. \tag{28}$$

Пусть S — сфера с центром в начале координат. Тогда

$$\iint\limits_S E_n\, d\sigma = \iint\limits_S \frac{q}{r^3}\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\, d\sigma = \frac{q}{R^2}\iint\limits_S d\sigma = \frac{q}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi q. \tag{29}$$

Этим доказано, что поток вектора напряженности через поверхность сферы с центром в источнике в направлении внешней нормали не зависит от радиуса сферы и равен $4\pi q$.

Докажем, что этот результат верен для любой гладкой замкнутой поверхности S, содержащей заряд внутри себя. Для этого рассмотрим сферу S_1 с центром в начале координат, имеющую столь малый радиус, что она целиком содержится внутри S. По формуле Остроградского для области B, ограниченной поверхностями S и S_1, имеем

$$\iint\limits_S E_n\,d\sigma + \iint\limits_{S_1} E_n\,d\sigma = \iiint\limits_B \operatorname{div}\mathbf{E}\,d\tau.$$

Здесь правая часть равна нулю согласно формуле (27). Изменим направление нормали к сфере S_1 и в соответствии с формулой (29) получим

$$\iint\limits_S E_n\,d\sigma = \iint\limits_{S_1} E_n\,d\sigma = 4\pi q.$$

199. Формула Стокса. * Формула Стокса связывает поверхностный и криволинейный интегралы. Пусть поверхность S обладает следующими свойствами: 1) это гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность, ограниченная гладким (или кусочно-гладким) контуром l, 2) прямые, параллельные координатным осям, пересекают S не более чем в одной точке, 3) поверхность двухсторонняя; выберем ту сторону S, на которой выполняется условие $\cos\gamma = \cos(\mathbf{n}, z) > 0$. Обозначим через λ проекцию l на плоскость Oxy, через A — проекцию S на плоскость Oxy (рис. 145).

Пусть поверхность S задана уравнением $z = f(x, y)$ в области A. Направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$ найдем так же, как в п. 195:

$$\cos\alpha = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$p\cos\gamma = -\cos\alpha, \quad q\cos\gamma = -\cos\beta. \tag{30}$$

На поверхности S заданы непрерывно дифференцируемые функции $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$.

Преобразуем криволинейный интеграл в двойной, а затем в поверхностный:

$$\int\limits_l P(x, y, z)\,dx \underset{\text{I}}{=} \int\limits_l P(x, y, f(x, y))\,dx \underset{\text{II}}{=}$$

$$\underset{\text{III}}{=} \int\limits_\lambda P(x, y, f(x, y))\,dx \underset{\text{IV}}{=} -\iint\limits_A (P'_y + P'_z \cdot z'_y)\,dx\,dy \underset{\text{V}}{=}$$

$$= -\iint\limits_S (P'_y + P'_z q)\cos\gamma\,d\sigma = \iint\limits_S (P'_z\cos\beta - P'_y\cos\gamma)\,d\sigma.$$

* Джон Габриель Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

Здесь равенство I основано на том, что кривая l лежит на поверхности S, и поэтому для всех точек l выполнено соотношение между координатами $z = f(x, y)$. Переход II основан на том, что подынтегральная функция зависит лишь от x и y, и поэтому согласно правилу вычисления криволинейного интеграла его величина не изменится при замене контура l на λ. Переход III основан на формуле Грина (18) п. 190 в случае $Q \equiv 0$. Переход IV основан на формуле

$$\iint_S P(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma = \iint_A P(x, y, f(x, y))\, dx\, dy,$$

вытекающей из соотношений (12) и (15). Переход V выполнен с помощью второй из формул (30).

Аналогично получим

$$\int_l Q\, dy = \iint_S (Q'_x \cos\gamma - Q'_z \cos\alpha)\, d\sigma,$$

$$\int_l R\, dz = \iint_S (R'_y \cos\alpha - R'_x \cos\beta)\, d\sigma.$$

Сложив эти равенства, придем к соотношению

$$\int_l P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$$= \iint_S \{(R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma\}\, d\sigma. \qquad (31)$$

Перейдем к поверхностному интегралу второго рода, положив согласно примечанию 1 п. 193 в правой части равенства (31)

$$\cos\alpha\, d\sigma = dy\, dz, \quad \cos\beta\, d\sigma = dx\, dz, \quad \cos\gamma\, d\sigma = dx\, dy.$$

Получим *формулу Стокса* в координатной форме

$$\int_l P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z)\, dy\, dz + (P'_z - R'_x)\, dx\, dz + (Q'_x - P'_y)\, dx\, dy. \qquad (32)$$

Примечание 1. Формула Грина есть тот частный случай формулы Стокса, когда S — область A плоскости Oxy с контуром l и $R \equiv 0$.

Примечание 2. Формула (32) верна и в случае, когда прямые, параллельные координатным осям, пересекают S более чем в одной точке, если выполнено следующее правило обхода контура: наблюдатель, обходящий l и направленный

по $\mathbf{n}$ *, должен иметь от себя слева часть поверхности S, непосредственно прилегающую к обходимому участку контура. Для доказательства этого утверждения достаточно разделить S вспомогательными контурами l_k на части, в которых выполнено условие пересечения прямыми, параллельными координатным осям, не более чем в одной точке. Далее надо написать формулу Стокса для каждой части S и результаты сложить. При этом получится формула (32) для всей поверхности S в целом, потому что криволинейные интегралы по l_k в сумме будут равны нулю, принимая во внимание правило обхода контура.

200. Ротор вектора. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a}(M) = P(M)\,\mathbf{i} + Q(M)\,\mathbf{j} + R(M)\,\mathbf{k}$. Левая часть формулы (32) дает величину работы этого векторного поля вдоль замкнутого контура l, т. е. циркуляцию вектора $\mathbf{a}(M)$ по контуру l. Согласно равенствам (8) и (11) п. 188 имеем

$$\int_l P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_l \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_l a_\tau\,ds.$$

О п р е д е л е н и е. *Ротором, или вихрем, вектора* $\mathbf{a}(M)$ называется вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$, определяемый равенством

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = (R'_y - Q'_z)\,\mathbf{i} + (P'_z - R'_x)\,\mathbf{j} + (Q'_x - P'_y)\,\mathbf{k}. \tag{33}$$

Его удобно представить символической формулой

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \tag{34}$$

которую следует понимать в смысле равенства (33).

Проекции вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ по определению суть

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_x = R'_y - Q'_z, \quad (\operatorname{rot}\mathbf{a})_y = P'_z - R'_x,$$
$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_z = Q'_x - P'_y. \tag{35}$$

Пусть $\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ есть нормаль к поверхности S, соответствующая выбранной стороне поверхности. Тогда подынтегральная функция правой части равенства (31) представляет скалярное произведение векторов $\mathbf{n}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, а вся правая часть равенства (31) равна потоку вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ через поверхность S. Формулу Стокса (31) можно представить в следующей в е к т о р н о й ф о р м е:

$$\int_l \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma, \tag{36}$$

---

* То есть $\mathbf{n}$ пронизывает наблюдателя от ног к голове.

содержание которой таково: *циркуляция вектора вдоль любого замкнутого контура равна потоку вихря этого вектора через поверхность, ограниченную упомянутым контуром; при* этом направление обхода контура должно быть согласовано с выбором стороны поверхности.

Принимая во внимание формулу (11) п. 188, равенство (35) можно записать в виде

$$\int_l a_\tau(M)\,ds = \iint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}(M)\,d\sigma, \tag{37}$$

где $a_\tau(M)$ — проекция вектора $\mathbf{a}(M)$ на касательную к контуру l в точке M; $\operatorname{rot}_n \mathbf{a}$ — проекция $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S в точке M.

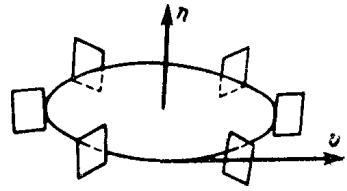

Рис. 146.

Инвариантное определение вихря вектора $\mathbf{a}$ получим с помощью формулы Стокса (37). Для этого фиксируем точку M и какое-либо направление $\mathbf{n}$ (начало $\mathbf{n}$ в точке M). Пусть S — бесконечно малая плоская область с площадью σ, содержащая точку M и перпендикулярная $\mathbf{n}$. Напишем формулу (37) и по теореме о среднем для поверхностного интеграла получим

$$\int_l a_\tau(M)\,ds = \operatorname{rot}_n \mathbf{a}(M_*)\,\sigma.$$

Отсюда следует равенство

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a}(M) = \lim_{(l)\to M} \frac{\int_l a_\tau\,ds}{\sigma}, \tag{38}$$

которое позволяет сформулировать инвариантное определение вихря вектора: *вихрем вектора* $\mathbf{a}(M)$ *в точке* M *называется вектор* $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$, *проекция которого на любое направление* $\mathbf{n}$ *равна пределу отношения циркуляции вектора* $\mathbf{a}$ *вдоль контура бесконечно малой площадки, содержащей* M *и перпендикулярной* $\mathbf{n}$, *к величине этой площадки.*

Физическое содержание понятия вихря вектора выясним с помощью его инвариантного определения. Для этого будем пока трактовать $\mathbf{a}$ как вектор скорости течения однородной несжимаемой жидкости. Поместим в точке M потока жидкости бесконечно малое колесико с лопастями, расположенными по окружности перпендикулярно плоскости колесика (рис. 146). Под воздействием потока жидкости такое колесико будет, вообще говоря, вращаться со скоростью, зависящей от направления оси колесика $\mathbf{n}$. Каждая точка окружности l вращается со скоростью $\mathbf{v}$, направленной по касательной к l. Величина этой скорости во

всех точках окружности одинакова и равна среднему значению касательной составляющей вектора $\mathbf{a}$ к линии l, т. е. среднему значению величины $a_\tau(M)$ на окружности l, а именно

$$v = \frac{1}{2\pi R}\int_l a_\tau(M)\,ds.$$

Теперь из формулы (38) следует, что

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a}(M) = \frac{2\pi R v}{\pi R^2} = \frac{2v}{R} = 2\omega, \tag{39}$$

где ω — угловая скорость вращения колесика. Если векторы $\mathbf{n}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ ортогональны, то $\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = 0$ и $\omega = 0$. Величина ω достигает наибольшего значения, когда векторы $\mathbf{n}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ коллинеарны, при этом

$$v_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}|\operatorname{rot}\mathbf{a}|R \text{ и } |\operatorname{rot}\mathbf{a}| = \frac{2v_{\text{наиб}}}{R} = 2\omega_{\text{наиб}}.$$

Следовательно, наибольшая угловая скорость вращения равна

$$\omega_{\text{наиб}} = \frac{1}{2}|\operatorname{rot}\mathbf{a}|. \tag{40}$$

З а к л ю ч е н и е. Вихрь вектора $\mathbf{a}(M)$ характеризует вращательную компоненту поля скоростей потока жидкости, его длина равна удвоенной наибольшей угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости, его направление совпадает с направлением оси, вокруг которой частица вращается с наибольшей скоростью.

П р и м е р 1. Если жидкость течет с постоянной по величине и направлению скоростью $\mathbf{a}$, то будут постоянными и проекции этого вектора. Поэтому $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ и течение жидкости безвихревое.

П р и м е р 2. Если скорость $\mathbf{a}$ течения жидкости имеет проекции

$$P = -\omega y, \quad Q = \omega x, \quad R = 0, \tag{41}$$

где ω — постоянная, то по формуле (33) получим

$$rot\,\mathbf{a} = 2\omega\mathbf{k}. \tag{42}$$

Из (41) следует, что $v = |\mathbf{a}| = \omega\sqrt{x^2+y^2} = \omega r$. Поэтому вся жидкость как целое вращается вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Действительно, частицы жидкости, находящиеся на окружности с данным радиусом r (в плоскости, перпендикулярной оси Oz), движутся с постоянной скоростью $v = \omega r$ и постоянной угловой скоростью $\omega = \dfrac{v}{r}$.

Каждая частица жидкости при движении вокруг оси Oz участвует в двух движениях: в переносном движении со скоростью $\mathbf{a}$ $(-\omega y, \omega x, 0)$ и во вращательном движении, в котором мгновенная угловая скорость вращения каждой частицы равна ω, что следует из формул (40) и (42), так как $\omega_{\text{вр}} = \frac{1}{2}|2\omega\mathbf{k}| = \omega$. Следовательно, угловая скорость вращения каждой частицы совпадает с угловой скоростью макроскопического движения жидкости вокруг оси Oz и равна ω.

Формальные свойства ротора. Пусть $\mathbf{a}(M)$ и $\mathbf{b}(M)$ — векторные поля и $\varphi(M)$ — скалярное поле. Тогда

1°. $\operatorname{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b}$,

2°. $\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}$.

Действительно, по формуле (33) имеем *

$$1)\ \operatorname{rot}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \left[\frac{\partial(a_z+b_z)}{\partial y} - \frac{\partial(a_y+b_y)}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \ldots =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \ldots + \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \ldots = \operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{rot}\mathbf{b},$$

$$2)\ \operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial z}\right]\mathbf{i} + \ldots =$$

$$= \varphi\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \ldots\right] + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_z - \frac{\partial\varphi}{\partial y}a_y\right)\mathbf{i} + \ldots = \varphi\operatorname{rot}\mathbf{a} + \operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a}.$$

201. Безвихревые векторные поля. Векторное поле $\mathbf{a}(M)$ в области B называется *безвихревым*, если в каждой точке этой области ротор вектора $\mathbf{a}(M)$ равен нулю:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M) = 0. \tag{43}$$

Следовательно, если поле безвихревое, то согласно (35) выполнено условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \tag{44}$$

которое совпадает с условием потенциальности поля. Поэтому *всякое безвихревое поле потенциально*, а *всякое потенциальное поле безвихревое*.

В п. 192 установлено, что для потенциальности векторного поля $\mathbf{a}(M)$ необходимо и достаточно, чтобы оно было полем градиентов некоторой скалярной функции $\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} u(M)$.

Следовательно, если выполнено это условие, то поле потенциально и по доказанному оно безвихревое, т. е. выполнено условие (43). Поэтому имеем

$$\operatorname{rotgrad} u(M) = 0, \tag{45}$$

если функция u дважды непрерывно дифференцируема.

Таким образом, доказано, что *поле градиентов всегда безвихревое*.

Докажем, что *поле вихрей соленоидально*, т. е. имеет место формула

$$\operatorname{divrot} a(M) = 0. \tag{46}$$

---

* О значении многоточий см. в п. 184.

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{a}$ и поле его вихрей $\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Составим выражение дивергенции поля вихрей. С помощью (35) получим

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{rot}\mathbf{a})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}\mathbf{a})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}\mathbf{a})_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \equiv 0,$$

если P, Q и R дважды непрерывно дифференцируемы. Следовательно, поле вихрей не имеет источников и стоков.

Поле $a\,(M)$ называется *гармоническим*, или *лапласовым*, если оно безвихревое и соленоидальное, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{a}\,(M) = 0$ и $\operatorname{div}\mathbf{a}\,(M) = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{a} = \operatorname{grad} u\,(M)$, причем потенциал этого поля $u\,(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$ или $\Delta u = 0$. Например, гармоническим полем является электростатическое поле, создаваемое точечным источником.

§ 34. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ИХ ВЫРАЖЕНИЕ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

202. Дифференциальные операции второго порядка. Пусть даны дважды непрерывно дифференцируемые в области B функции $\varphi\,(M)$ и $\mathbf{a}\,(M)$. Выберем систему координат и вычислим величины

$$\operatorname{grad}\varphi(M),\ \operatorname{div}\mathbf{a}\,(M),\ \operatorname{rot}\mathbf{a}\ (M). \tag{1}$$

Действия, в результате выполнения которых получены величины (1), можно назвать дифференциальными операциями первого порядка. Они произведены над функциями $\varphi\,(M)$ и $\mathbf{a}\,(M)$ соответственно.

Если принять величины (1) за исходные (это функции точки M), то путем выполнения над ними дифференциальных операций первого порядка (тем самым будут выполнены дифференциальные операции второго порядка над функциями $\varphi\,(M)$ и $\mathbf{a}\,(M)$) можно составить только следующие величины:

1. $\operatorname{graddiv}\mathbf{a}$, 2. $\operatorname{divgrad}\varphi$, 3. $\operatorname{divrot}\mathbf{a}$, 4. $\operatorname{rotgrad}\varphi$, 5. $\operatorname{rotrot}\mathbf{a}$

В п. 201 рассмотрены две из этих величин $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, они тождественно равны нулю. Найдем для остальных величин их выражения через исходные данные.

1. По формулам (7) п. 184 и (21) п. 197 получаем

$$\operatorname{graddiv}\mathbf{a} = (\operatorname{div}\mathbf{a})'_x\,\mathbf{i} + (\operatorname{div}\mathbf{a})'_y\,\mathbf{j} + (\operatorname{div}\mathbf{a})'_z\,\mathbf{k};$$

$$\operatorname{graddiv}\mathbf{a} = (P''_{xx} + Q''_{xy} + R''_{xz})\,\mathbf{i} + (P''_{xy} + Q''_{yy} + R''_{yz})\,\mathbf{j} +$$
$$+ (P''_{xz} + Q''_{yz} + R''_{zz})\,\mathbf{k}. \tag{2}$$

Оператор Лапласа * от скалярной функции $\varphi(M)$ определяется равенством

$$\Delta\varphi = \varphi''_{xx} + \varphi''_{yy} + \varphi''_{zz}, \tag{3}$$

а от векторной функции $\mathbf{a}(M)$ — равенством

$$\Delta\,\mathbf{a} = \mathbf{a}''_{xx} + \mathbf{a}''_{yy} + \mathbf{a}''_{zz}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что если $\mathbf{a} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, то

$$\Delta\,\mathbf{a} = \Delta P\,\mathbf{i} + \Delta Q\,\mathbf{j} + \Delta R\,\mathbf{k}. \tag{5}$$

2. Из формул (7) п. 184 и (21) п. 197 следует равенство

$$\operatorname{divgrad}\varphi = \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{grad}\varphi)_x + \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{grad}\varphi)_y + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{grad}\varphi)_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Поэтому имеем

$$\operatorname{divgrad}\varphi = \Delta\varphi. \tag{6}$$

3. Исходя из определения ротора, последовательно получаем

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \operatorname{rot}_x\mathbf{a} & \operatorname{rot}_y\mathbf{a} & \operatorname{rot}_z\mathbf{a} \end{vmatrix} = [(Q'_x - P'_y)'_y - (P'_z - R'_x)'_z]\,\mathbf{i} + \ldots =$$

$$= [(P''_{xx} + Q''_{xy} + R''_{xz}) - (P''_{xx} + P''_{yy} + P''_{zz})]\,\mathbf{i} + \ldots .$$

Следовательно,

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{a} = \operatorname{graddiv}\mathbf{a} - \Delta\,\mathbf{a}. \tag{7}$$

Символика Гамильтона**. Введем символический вектор (называемый набла)

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

и условимся в следующем: 1) будем понимать под «произведением» символов $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ на скаляр φ соответственно величины частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ (конечно, это «произведение» не обладает переместительным свойством), 2) алгебраические действия с вектором набла будем выполнять по правилам действий

* Пьер Симон Лаплас (1749—1827) — французский астроном, математик и физик.

** Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865) — английский математик.

с обычными векторами при условии сохранения порядка сомножителей.

При этом условии имеют место формулы

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi, \quad \nabla\,\mathbf{a} = \operatorname{div}\mathbf{a}, \quad \nabla\times\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{a}. \tag{9}$$

Действительно,

$$\nabla\varphi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \operatorname{grad}\varphi,$$

$$\nabla\,\mathbf{a} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathbf{i}\,a_x + \mathbf{j}\,a_y + \mathbf{k}\,a_z) = \operatorname{div} a.$$

По правилу векторного умножения векторов имеем

$$\nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

В результате выполнения дифференциальных операций второго порядка получим непосредственно из (9) следующие формулы:

$$\begin{gathered} \nabla\nabla\varphi = \nabla\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{divgrad}\varphi = \Delta\varphi, \\ \nabla\times\nabla\varphi = \nabla\times\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{rotgrad}\varphi, \\ \nabla\nabla\,\mathbf{a} = \nabla\operatorname{div}\mathbf{a} = \operatorname{graddiv}\mathbf{a}, \\ \nabla\nabla\times\mathbf{a} = \nabla\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{divrot}\mathbf{a}, \\ \nabla\times\nabla\times\mathbf{a} = \nabla\times\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{rotrot}\mathbf{a}. \end{gathered} \tag{10}$$

203. Выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах. Рассмотрим две системы координат — декартову прямоугольную систему (x, y, z) с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и какую-либо криволинейную ортогональную систему (u, v, w) и пусть $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ — соответствующие орты этой системы (см. п. 178). Формулы связи между координатами предполагаются известными:

$$\begin{gathered} x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \\ u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z). \end{gathered}$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$u'_x x'_u + u'_y y'_u + u'_z z'_u = 1, \tag{11}$$

в чем легко убедиться, продифференцировав по u тождество

$$u(x(u, v, w), \quad y(u, v, w), \quad z(u, v, w)) = u.$$

Требуется составить выражение градиента данной скалярной функции точки $f(M)$ в системе координат (u, v, w).

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x + f'_w w'_x,$$
$$f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y + f'_w w'_y,$$
$$f'_z = f'_u u'_z + f'_v v'_z + f'_w w'_z.$$

Умножим эти равенства соответственно на $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ и, сложив, получим согласно равенству (7)

$$\operatorname{grad} f(M) = f'_u \operatorname{grad} u + f'_v \operatorname{grad} v + f'_w \operatorname{grad} w. \qquad (12)$$

Известно (см. п. 184), что градиент скалярной функции $u(x, y, z)$ есть вектор, направленный перпендикулярно поверхности уровня $u = u_0$. Поэтому он коллинеарен вектору $\mathbf{e}_u$. Следовательно, имеем

$$\operatorname{grad} u = u'_x \mathbf{i} + u'_y \mathbf{j} + u'_z \mathbf{k} = h\, \mathbf{e}_u, \qquad (13)$$

где h — скалярный множитель, подлежащий определению.

Производная векторной функции $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ по скалярному аргументу, например u, согласно п. 185 есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора $\mathbf{r}(u)$, т. е. по касательной к координатной линии u. Поэтому

$$r'_u = x'_u \mathbf{i} + y'_u \mathbf{j} + z'_u \mathbf{k} = H_u \mathbf{e}_u, \qquad (14)$$

где H_u — соответствующий коэффициент Ламе (см. п. 178) системы (u, v, w).

В результате скалярного умножения равенств (13) и (14) получим равенство

$$x'_u u'_x + y'_u u'_y + z'_u u'_z = H_u h, \qquad (15)$$

левая часть которого равна единице по формуле (11). Поэтому $h = 1/H_u$ и согласно (13) имеем $\operatorname{grad} u = \frac{1}{H_u} \mathbf{e}_u$. Аналогично получим $\operatorname{grad} v = \frac{1}{H_v} \mathbf{e}_v$, $\operatorname{grad} w = \frac{1}{H_w} \mathbf{e}_w$.

Теперь из (12) следует выражение градиента скалярной функции точки в любых криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{grad} f(M) = \frac{1}{H_u} \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{e}_u + \frac{1}{H_v} \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{e}_v + \frac{1}{H_w} \frac{\partial f}{\partial w} \mathbf{e}_w. \qquad (16)$$

204. Выражение дивергенции в ортогональных криволинейных координатах. Это выражение установлено ниже с помощью инвариантного определения дивергенции (см. п. 197). Для получения дивергенции вектора $a(M)$ в точке $M_0(u_0, v_0, w_0)$ рассмотрим криволинейный параллелепипед, ограниченный координатными поверхностями (рис. 147) $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$, $v = v_0 +$

$+ dv$, $w = w_0$, $w = w_0 + dw$. Элементы длин дуг координатных линий и элемент объема найдены в п. 178. Поток вектора через каждую грань параллелепипеда представим в виде произведения площади соответствующей грани на среднее значение величины a_n. Поэтому поток вектора **a** через противоположные грани $M_0M_3N_3N_0$ и $M_1M_2N_2N_1$ (площади которых равны $ds_v ds_w$) приблизительно равен

$$\iint\limits_{S_1+S_2} a_n\, d\sigma \approx (a_n\, ds_v\, ds_w)\Big|_{u_0+du} - (a_n\, ds_v\, ds_w)\Big|_{u_0} =$$

$$= \left[(a_u H_v H_w)\Big|_{u_0+du} - (a_u H_v H_w)\Big|_{u_0}\right] dv\, dw \approx \frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w)\, du\, dv\, dw.$$

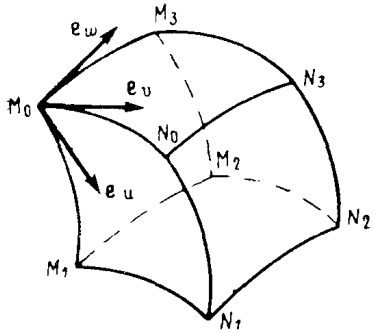

Рис. 147.

Здесь последнее равенство написано в соответствии с формулой конечных приращений Лагранжа, причем значение частной производной берется в некоторой средней точке указанного параллелепипеда.

Аналогичные формулы имеют место для потоков вектора через оставшиеся пары граней. Поток вектора через всю поверхность параллелепипеда получится равным

$$\iint\limits_S a_n\, d\sigma \approx \left[\frac{\partial}{\partial u}(a_n H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_u H_u H_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v)\right] du\, dv\, dw.$$

Теперь, положив в формуле (23) п. 197 $V_B = H_u H_v H_w du\, dv\, dw$, в результате сокращения дроби на $du\, dv\, dw$ после предельного перехода при стремлении к нулю величин du, dv и dw получим *выражение дивергенции в ортогональных криволинейных координатах*

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(a_u H_v H_w) + \frac{\partial}{\partial v}(a_v H_u H_w) + \frac{\partial}{\partial w}(a_w H_u H_v)\right]. \tag{17}$$

205. Выражение оператора Лапласа в ортогональных криволинейных координатах. Оператор Лапласа скалярной функции $f(u, v, w)$ согласно формуле (6) есть дивергенция от ее градиента. Поэтому, применяя формулу (17) к вектору $\mathbf{a} = \operatorname{grad} f$ в форме (16), т. е. полагая в (17)

$$a_u = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}, \quad a_v = \frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}, \quad a_w = \frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w},$$

получим *выражение оператора Лапласа в любых ортогональных криволинейных координатах*

$$\Delta f = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_u H_w}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]. \qquad (18)$$

Выражение оператора Лапласа в цилиндрических координатах выведем из (18), положив согласно п. 178 $H_\rho = 1$, $H_\varphi = \rho$, $H_z = 1$. Таким образом, получим

$$\Delta f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \qquad (19)$$

Выражение оператора Лапласа в сферических координатах получается из (18) при $H_r = 1$, $H_\varphi = r\sin\theta$, $H_\theta = r$ (см. п. 178). В результате получим

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\right]. \qquad (20)$$

Иногда в сферической системе координат угол θ отсчитывается не от оси Oz, а от плоскости Oxy. Тогда новый угол $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ и в (20) вместо $\sin\theta$ всюду войдет $\cos\theta'$.

Многие задачи естествознания приводят к уравнению $\Delta f = 0$, называемому *уравнением Лапласа*. Оно имеет решение $f = \frac{1}{r}$ в области, где $r \neq 0$. Действительно, $f'_r = -\frac{1}{r^2}$ и $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$, что прямо следует из (20). Функция $f = \frac{1}{r}$ называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа*.

206. Уравнение диффузии. Пусть в данной неподвижной среде неравномерно распределено некоторое вещество α. Рассмотрим процесс изменения концентрации этого вещества $u(M, t)$ вследствие диффузии.

Выделим и закрепим в рассматриваемой среде область B, ограниченную поверхностью S. Подсчитаем двумя способами количество Q вещества α, переместившееся вследствие диффузии в область B извне за промежуток времени от t_1 до t_2.

Согласно экспериментальному закону Фике, через элемент поверхности $d\sigma$ в сторону нормали $\mathbf{n}$ за время dt переместится вследствие диффузии количество вещества, равное

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma\,dt, \qquad (21)$$

где D — положительная величина, называемая коэффициентом диффузии. Среда предполагается изотропной в том смысле, что D не зависит от направления $\mathbf{n}$.

Из (21) следует, что

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S D \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

Согласно формуле (8) п. 184 $\frac{\partial u}{\partial n} = \operatorname{grad} u \cdot \mathbf{n}$; поэтому в соответствии с формулой Остроградского имеем

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_B \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u)\, d\tau. \tag{22}$$

Это перемещение вещества повлечет за собой изменение концентрации внутри B и может быть подсчитано иначе. Увеличение концентрации u на $du = \frac{\partial u}{\partial t} dt$ за промежуток времени dt потребует сообщения элементу $d\tau$ количества вещества, равного

$$c\, du\, d\tau = c \frac{\partial u}{\partial t} dt\, d\tau,$$

где c — положительный коэффициент пористости среды. Вся область B за время от t_1 до t_2 поглотит количество вещества

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_B \left(c \frac{\partial u}{\partial t} - f \right) d\tau, \tag{23}$$

где f — интенсивность источников вещества α в области B. Приравнивая выражения (22) и (23), придем к равенству

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_B \left[c \frac{\partial u}{\partial t} - f - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) \right] d\tau = 0,$$

которое выполняется для л ю б о й области B. Отсюда следует равенство нулю подынтегральной функции (см. ниже лемму). Мы получим, таким образом, соотношение

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) + f, \tag{24}$$

называемое *уравнением диффузии в неоднородной среде* (или *уравнением теплопроводности*, так как этому уравнению удовлетворяет температура среды, изменяющаяся вследствие теплопроводности).

Если среда однородна (c и D постоянны), то при отсутствии источников ($f = 0$) концентрация u удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \tag{25}$$

где $a = \sqrt{\frac{D}{c}}$, так как div grad $u = \Delta u$. В случае установившегося процесса $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и из (25) следует, что концентрация u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{26}$$

Лемма. *Если $f(M)$ непрерывна в области C и $\iiint\limits_B f(M)\, d\omega = 0$, где область B есть произвольная часть области C, то $f(M) \equiv 0$ в C.*

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что в точке M_0 области C функция $f(M)$ принимает неравное нулю значение. Пусть для определенности $f(M_0) > 0$. Неравенство $f(M) > 0$ будет выполняться в некоторой окрестности B_1 точки M_0, так как $f(M)$ непрерывна. Поэтому имеем $\iiint\limits_{B_1} f(M)\, d\omega > 0$, что противоречит условию леммы. Отсюда следует ее заключение.

Добавление. Следуя логической схеме, которая привела нас к уравнению диффузии, выведем так называемое *уравнение неразрывности*.

Рассмотрим для этого некоторую массу жидкости (или газа) и обозначим через $\mathrm{v}(M, t)$ и $\rho(M, t)$ соответственно скорость течения жидкости и ее плотность в точке M в момент времени t. Выделим мысленно в потоке жидкости произвольную область B, ограниченную поверхностью S. Пусть Q — количество жидкости, вытекающее из B за промежуток времени от t_1 до t_2. Через элемент площади $d\sigma$ за время dt переместится в сторону внешней нормали n количество жидкости, равное $dQ = \rho \mathrm{v} n\, d\sigma\, dt$. Поэтому

$$Q = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_S \rho \mathrm{v} n\, d\sigma = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_B \operatorname{div}(\rho \mathrm{v})\, d\tau.$$

Это перемещение жидкости влечет за собой изменение плотности жидкости внутри B. Рассуждая так же, как и выше, получим

$$Q = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_B \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau.$$

Знак минус поставлен потому, что если плотность уменьшается внутри B, то $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$, а $Q > 0$. Если же жидкость втекает в область B, то $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$, а $Q < 0$.

В силу закона сохранения вещества оба выражения Q равны между собой. Отсюда с помощью леммы следует *уравнение неразрывности*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathrm{v}) = 0,$$

связывающее скорость потока жидкости с ее плотностью в каждой точке и в любой момент времени.

Глава XII

РЯДЫ

§ 35. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

207. Основные понятия. Теория рядов представляет один из основных разделов математического анализа. Ряды встречаются в трудах создателей математического анализа Ньютона и Лейбница. Существенный вклад в теорию рядов внесен Эйлером и Гауссом, позднее Коши и Больцано.

Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. Вспомним, что бесконечной числовой последовательностью называется счетное числовое множество, все элементы которого перенумерованы и расположены в порядке возрастания этих номеров (см. п. 2). Задать числовую последовательность — это значит задать ее общий член как функцию натурального аргумента $a_n = f(n)$.

Составленное из элементов данной последовательности выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

принято называть *числовым рядом*, или просто *рядом*. Отдельные элементы a_n, из которых образовано выражение (1), называют *членами данного ряда*.

Между членами ряда в выражении (1) стоит знак плюс; это указывает как будто на то, что все члены ряда надо сложить. Однако их бесконечно много, а действие сложения чисел определено лишь для конечного числа слагаемых. Возникают вопросы — что же такое сумма ряда, всякий ли ряд имеет сумму? Ответы на эти вопросы даны ниже.

Сумма n первых членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда*; обозначим ее s_n. Имеем

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n. \tag{2}$$

Составим последовательность частичных сумм ряда (1)

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots \tag{3}$$

О п р е д е л е н и е. *Если последовательность частичных сумм ряда* (1) *имеет конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s, \tag{4}$$

то ряд (1) *называется с х о д я щ и м с я, а число* s *называется с у м м о й р я д а* (1). *В этом случае можно написать*

$$s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad \text{или} \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Ряд (1) *называется р а с х о д я щ и м с я, если последовательность его частичных сумм не стремится к конечному пределу* (*например*, $s_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$).

Перефразируя определение, можно сказать, что бесконечный ряд называется сходящимся, если сумма его первых n членов при неограниченном возрастании числа n стремится к конечному пределу: и этот предел называется суммой ряда.*

О сумме бесконечного ряда можно говорить только тогда, когда он сходится, и тогда частичная сумма s_n является приближенным выражением для суммы ряда.

П р и м е р 1. Рассмотрим так называемый геометрический ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots, \tag{6}$$

члены которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q, причем $a \neq 0$. При $q \neq 1$ сумма его n первых членов равна

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1) Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

В случае $|q| < 1$ ряд (6) сходится и его сумма $s = \dfrac{a}{1-q}$.

2) Если $|q| > 1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ и тогда переменная s_n предела не имеет: $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому в случае $|q| > 1$ ряд (6) расходится.

3) Если $q = 1$, то ряд (6) имеет вид $a + a + \ldots + a + \ldots$ В этом случае $s_n = an \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е. ряд расходится.

---

* При рассмотрении пределов последовательностей переменная n всегда стремится к бесконечности. Поэтому символ $n \to \infty$ мы иногда будем опускать в записи предела последовательности. Например, равенство (4) можно записать так: $\lim s_n = s$.

Точно так же ряд с общим членом a_n можно представить символом $\sum a_n$, если известно с какого номера начинается суммирование.

4) Если $q = -1$, то ряд (6) имеет вид $a - a + a - a + \ldots$ В этом случае $s_n = 0$, если n — четное, и $s_n = a$, если n — нечетное. Следовательно, s_n предела не имеет, а ряд расходится.

Итак, геометрический ряд (6) сходится только в случае $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}. \tag{7}$$

Пример 2. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Его общий член можно представить в виде $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Поэтому $s_n = a_1 + \ldots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ и сумма ряда $s = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. Этот пример иллюстрирует возможность точного суммирования ряда в отдельных случаях.

208. Основные свойства рядов. 1°. *Если все члены сходящегося ряда* (1), *сумма которого равна* s, *умножить на одно и то же число* b, *то получим сходящийся ряд, и его сумма равна* bs:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ba_n = b\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{8}$$

Действительно, n-я частичная сумма нового ряда

$$\sigma_n = ba_1 + \ldots + ba_n = b(a_1 + \ldots + a_n) = bs_n \tag{9}$$

имеет конечный предел, равный bs:

$$\lim \sigma_n = \lim bs_n = b \lim s_n = bs. \tag{10}$$

2°. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n). \tag{11}$$

Для доказательства обозначим через A_n и B_n частичные суммы соответственно рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, и через A и B — их суммы. Частичная сумма ряда из правой части равенства (11) $\sigma_n = A_n + B_n$ имеет предел, равный

$$\lim \sigma_n = \lim A_n + \lim B_n = A + B. \tag{12}$$

Для выяснения других свойств рядов введем понятие подпоследовательности. Пусть $\{x_n\}$ — некоторая последовательность. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ Выберем из последователь-

ности $\{x_n\}$ элементы с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ и расположим их в таком же порядке, как и числа k_n:

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots.$$

Полученную последовательность назовем *подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}$.

Лемма. *Если числовая последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к некоторому числу* b, *т. е.* $\lim x_n = b$, *то и любая подпоследовательность этой последовательности сходится к тому же числу* b.

Действительно, так как $\lim x_n = b$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число N такое, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|x_n - b| < \varepsilon$. Пусть $\{x_{k_n}\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$. Так как $k_N \geqslant N$, то, начиная с номера k_N, элементы подпоследовательности $\{x_{k_n}\}$ удовлетворяют неравенству $|x_{k_n} - b| < \varepsilon$. Поэтому подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ сходится и имеет пределом число b.

3°. *Сходящиеся ряды обладают сочетательным свойством*, т. е. можно объединять в группы любые стоящие рядом члены сходящегося ряда, а затем производить суммирование по группам, причем эта операция не нарушит сходимости ряда и не изменит его суммы.

Действительно, пусть дан сходящийся ряд (1) и его сумма равна s. Построим ряд α, который получается из (1) путем объединения в группы некоторых рядом стоящих членов. Выполнить это объединение можно различно, например, так:

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + a_6 + (a_7 + a_8) + \ldots \qquad (13)$$

Последовательность частичных сумм ряда α образует подпоследовательность $\{s_{k_n}\}$ последовательности частичных сумм ряда (1). В частности, для ряда (13) это будет $s_2, s_5, s_6, s_8, \ldots$ Согласно лемме существует и равен s предел $\lim s_{k_n}$. Поэтому ряд α сходится и его сумма равна сумме ряда (1).

Заметим, что правила действий с рядами не всегда совпадают с правилами действий с конечными суммами. Например, если дан сходящийся ряд вида (13), то, опустив скобки, мы получим новый ряд, который может оказаться и расходящимся. Так, ряд $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$, очевидно, сходится, между тем как полученный из него опусканием скобок ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ будет расходящимся.

Если в данном ряде (1) отбросить первые k членов, то получим новый ряд, который называется *остатком ряда* (1) *после* k-го члена:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots \qquad (14)$$

4°. *Ряд и любой его остаток либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Действительно, если обозначить через s_n сумму n первых членов ряда (1), а через σ_n — то же для ряда (14), то получим

$$\sigma_{n-k} = s_n - (a_1 + \ldots + a_k), \quad s_n = \sigma_{n-k} + (a_1 + \ldots + a_k),$$

причем если $n \to \infty$, то и $(n - k) \to \infty$. Отсюда видно, что если s_n имеет предел, то и σ_n имеет предел, и наоборот. Эти пределы s и σ, т. е. суммы двух рядов, будут связаны соотношением $\sigma = s - (a_1 + \ldots + a_k)$.

5°. *Общий член сходящегося ряда стремится к нулю* при $n \to \infty$, т. е. если ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0. \tag{15}$$

Это так называемое *необходимое условие сходимости ряда*. Действительно, если ряд (1) сходится, то

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

Следовательно, если для какого-либо ряда нарушено условие (15), то этот ряд расходится.

Пример 3. Ряд $\sum \frac{n+2}{n+1} = \sum \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ расходится, потому что его общий член не стремится к нулю.

Примечание. Условие (15), будучи необходимым условием сходимости ряда, не является достаточным условием его сходимости. Это утверждение достаточно подтвердить хотя бы одним примером. Вот этот пример.

Пример 4. Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{16}$$

называется *гармоническим рядом*. Его общий член $a_n = \frac{1}{n}$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Однако этот ряд расходится, что можно доказать рассуждением от противного. Предположим, что ряд (16) сходится и его сумма равна s. Отсюда следует, что

$$\lim (s_{2n} - s_n) = \lim s_{2n} - \lim s_n = s - s = 0.$$

Это равенство противоречит неравенству:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

6°. Критерий Больцано — Коши сходимости ряда. Здесь сформулировано необходимое и достаточное условие сходимости ряда, установленное Больцано (1817 г.) и Коши (1821 г.). Его называют также *принципом сходимости ряда*.

Вспомним (см. п. 20), что необходимое и достаточное условие существования предела последовательности $\{s_n\}$ заключается в том, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало соответствующее

число $N > 0$ такое, чтобы при всех $n > N$ и $n' > N$ выполнялось неравенство $|s_{n'} - s_n| < \varepsilon$. Обозначим $n' = n + p$, где n и p — натуральные числа. Тогда $s_{n'} - s_n = s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$ и неравенство примет вид $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$. Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема. *Для того чтобы ряд* (1) *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon > 0$ *существовало такое число* N, *что при всяком* $n > N$ *и при всяком положительном* p *выполнялось бы неравенство*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon. \tag{17}$$

Другими словами, для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы сумма любого числа его членов (p любое), следующих за достаточно далеким ($n > N$), была бы сколь угодно мала (ε сколь угодно мало) по абсолютной величине.

Заметим, что при всей теоретической важности этого общего признака сходимости ряда применение его на практике обычно затруднено. Для выяснения вопроса о сходимости конкретных рядов часто пользуются признаками сходимости, к рассмотрению которых мы переходим.

209. Ряды с положительными членами. Пусть имеем ряд с положительными членами

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{18}$$

Теорема 1. *Для сходимости ряда* (18) *необходимо и достаточно, чтобы множество его частичных сумм было ограничено сверху.*

Достаточность. Пусть при всех n выполнено условие $s_n < M$, где s_n — n-я частичная сумма ряда (18), M — число. Частичные суммы ряда (18) возрастают с ростом n, потому что $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} > s_n$, так как $a_{n+1} > 0$. Таким образом, переменная s_n монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно (см. п. 20), она имеет предел $\lim s_n = s$ и ряд (18) сходится. Заметим, что ввиду монотонного возрастания s_n выполняется при всех n неравенство

$$s_n < s. \tag{19}$$

Необходимость. Пусть данный ряд (18) сходится. Докажем, что множество его частичных сумм ограничено. Рассуждая от противного, предположим, что это множество неограничено. Отсюда следует, что $\lim s_n = +\infty$, так как s_n — возрастающая переменная, и ряд (18) расходится. Но по условию он сходится. Следовательно, множество частичных сумм ограничено.

Пусть имеется два ряда с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (\mathrm{I}) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ (\mathrm{II}).$$

Теорема 2 (теорема сравнения). *Если члены ряда* (I) *не больше соответствующих членов ряда* (II), *т. е. при* $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n \leqslant b_n, \tag{20}$$

то из сходимости ряда (II) *следует сходимость ряда* (I), *а из расходимости ряда* (I) *следует расходимость ряда* (II).

Допустим, что ряд (II) сходится. Обозначим через A_n сумму n первых членов ряда (I) и через B_n — аналогичную сумму ряда (II). Согласно (20) имеем $A_n \leqslant B_n$. Ряд (II) по условию сходится; обозначив его сумму через B, согласно (19) имеем $B_n < B$. Следовательно, $A_n \leqslant B_n < B$. Отсюда вытекает по теореме 1, что ряд (I) сходится.

Пусть ряд (I) расходится. В этом случае расходится и ряд (II). Действительно, если бы ряд (II) сходился, то по первой части теоремы сходился бы и ряд (I), но он расходится. Теорема доказана.

Пример 1. Ряд $\sum \frac{\sin^n x}{2^n}$ сходится при любом фиксированном x в промежутке $0 < x < \pi$, что следует из сравнения его со сходящимся рядом с общим членом $\frac{1}{2^n}$, так как $\frac{\sin^n x}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$.

Пример 2. Ряд $\sum \frac{1}{n^n}$ сходится, так как $\frac{1}{n^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ при $n \geqslant 2$.

Пример 3. Ряд $\sum \frac{\ln n}{n}$ расходится, так как $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ при $n \geqslant 3$, а ряд (16) расходится.

Теорема 3 (вторая теорема сравнения). *Если члены рядов* (I) *и* (II) *удовлетворяют соотношению*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{21}$$

то из сходимости ряда (II) *следует сходимость ряда* (I), *а из расходимости ряда* (I) *следует расходимость ряда* (II).

Доказательство. Запишем условие (21) для $n = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_m}{a_{m-1}} \leqslant \frac{b_m}{b_{m-1}}$$

и, перемножив отдельно все левые и все правые части этих неравенств, получим соотношения $\frac{a_m}{a_1} \leqslant \frac{b_m}{b_1}$ и

$$a_m \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_m. \tag{22}$$

Если ряд (II) сходится, то в силу свойства 1° рядов (см. п. 208 сходится и ряд с общим членом $\frac{a_1}{b_1} b_m$. Но тогда по теореме 2 сходится ряд (I), если учесть неравенство (22).

Если ряд (I) расходится, то будет расходиться и ряд с общим членом $\frac{a_1}{b_1} b_m$ (см. неравенство (22)), а вместе с ним и ряд (II).

Замечание. Заключения теорем 2 и 3 имеют место и в том случае, когда условия (20) или соответственно (21) выполняются для всех n, начиная лишь с некоторого N (может быть большего единицы).

Теорема 4 (признак Даламбера *). *Если члены ряда* (18) *удовлетворяют соотношению*

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1, \tag{23}$$

где q *— постоянная, а* $n \geqslant N$, *то ряд* (18) *сходится. Если же*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \tag{24}$$

при $n \geqslant N$, *то ряд* (18) *расходится.*

Доказательство. Рассмотрим геометрический ряд $\sum q^n$, который сходится, так как $0 < q < 1$. Согласно (23) члены ряда (18) удовлетворяют соотношению $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$. Следовательно, в силу теоремы 3 ряд (18) сходится.

При условии (24) имеем $a_{n+1} \geqslant a_n > 0$ и ряд (18) расходится, так как его общий член не стремится к нулю — нарушено необходимое условие сходимости.

Пример 4. Ряд $\sum \frac{n}{2^n}$ сходится, так как при $n \geqslant 2$ выполнено условие (23)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{3}{4} = q.$$

Теорема 5 (предельная форма признака Даламбера). *Если члены положительного ряда* (18) *таковы, что существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D, \tag{25}$$

то при $D < 1$ *ряд* (18) *сходится, а при* $D > 1$ *он расходится.*

Доказательство. Условие (25) означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство

$$D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon. \tag{26}$$

Если $D < 1$, то выберем ε столь малым, чтобы $D + \varepsilon = q$ было меньше единицы. Тогда из правой части (26) следует соотношение (23) и ряд (18) сходится по теореме 4.

---

* Жан Лерон Даламбер (1717—1763) — французский математик и физик.

Если $D > 1$, то выберем ε таким, чтобы выполнялось условие $D - \varepsilon > 1$. Тогда из левой части (26) следует соотношение (24) и ряд (18) расходится по теореме 4. Теорема доказана.

Заметим, что при $D = 1$ теорема 5 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (18); он в одних случаях сходится, а в других расходится.

Пример 5. $\sum \frac{x^n}{n}$. Здесь $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{nx}{n+1}$ и $D = x$.

Следовательно, по теореме 5 ряд сходится при условии $0 < x < 1$ и расходится при $x > 1$. Он расходится и при $x = 1$ как гармонический ряд.

Пример 6. $\sum \frac{|x|^n}{n!}$. Здесь $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+1}$ и $D = 0$.

Ряд сходится при любых значениях x. Общий член сходящегося ряда стремится к нулю; поэтому имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Теорема 6 (признак Коши). *Дан ряд* (18). *Если существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k, \tag{27}$$

то при $k < 1$ *ряд* (18) *сходится, а при* $k > 1$ *ряд* (18) *расходится.*

Доказательство. 1) Пусть $k < 1$. Рассмотрим число q, удовлетворяющее соотношению $k < q < 1$. Согласно условию (27), начиная с некоторого $n = N$, будет иметь место неравенство $|\sqrt[n]{a_n} - k| < q - k$, а также неравенства $\sqrt[n]{a_n} < q$ и $a_n < q^n$.

Ряд с общим членом q^n сходится как геометрический ряд, так как $0 < q < 1$. Согласно теореме 2 сходится и данный ряд (18), так как $a_n < q^n$.

2) Пусть $k > 1$. Тогда, начиная с некоторого номера $n \quad N$, будем иметь $\sqrt[n]{a_n} > 1$ и $a_n > 1$. Ряд (18) расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Теорема доказана.

Пример 7. Ряд $\sum \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ сходится, так как $k = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Теорема 7 (интегральный признак Коши). *Дан ряд* (18), *члены которого монотонно убывают:* $a_{n+1} \leqslant a_n$. *Ряд* (18) *сходится в том и только в том случае, когда сходится интеграл*

$$\int_1^\infty f(x)\,dx, \tag{28}$$

где функция $f(x)$ *при* $x \geqslant 1$ *определена, непрерывна, положительна, монотонно убывает и в точках* $x = n$ *принимает значения* $f(n) = a_n$.

Доказательство. По условию $f(x)$ монотонно убывает и поэтому ее значения в промежутке $n - 1 < x < n$ более числа

$f(n)$, которое в свою очередь больше всех значений $f(x)$ в промежутке $n < x < n+1$ (рис. 148). Это предложение запишем условно в виде неравенства

$$\underset{n-1<x<n}{f(x)} > f(n) > \underset{n<x<n+1}{f(x)}.$$

Интегрируя это неравенство в соответствующих единичных промежутках, получим

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,dx > f(n) > \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx. \tag{29}$$

Неравенство (29) имеет ясный геометрический смысл соотношения между площадями под кривой, причем $f(n)$ есть величина площади прямоугольника с основанием, равным единице, и высотой $f(n)$. Суммируя члены неравенства (29) от $n = 2$ до $n = m$, получим

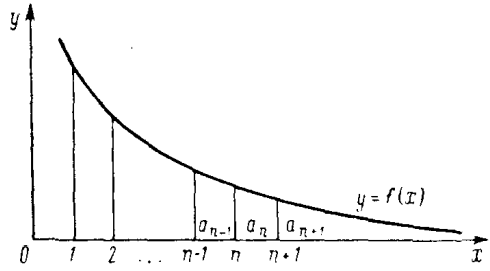

Рис. 148.

$$\int_{1}^{m} f(x)\,dx > \sum_{n=2}^{m} a_n > \int_{2}^{m+1} f(x)\,dx. \tag{30}$$

Если сходится (см. п. 162) интеграл (28), то из левой части (30) следует ограниченность частичных сумм ряда (18) и сходимость этого ряда по теореме 1. Если расходится интеграл (28), то из правой части (30) вытекает расходимость ряда (18). Теорема доказана.

Пример 8. Выяснить, при каких значениях параметра α сходится ряд $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

При $\alpha = 1$ имеем гармонический ряд; он расходится. При $\alpha \neq 1$ положим $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ и рассмотрим интеграл

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to\infty} \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{при } \alpha<1, \\ \text{const} & \text{при } \alpha>1. \end{cases}$$

Следовательно, данный ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

210. Знакочередующиеся ряды. *Знакочередующимися рядами* называются ряды вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} - \ldots, \tag{31}$$

где все $a_n > 0$.

Теорема Лейбница. *Знакочередующийся ряд* (31) *сходится, если его члены убывают по абсолютной величине* $a_{n+1} < a_n$ *и его общий член стремится к нулю при* $n \to \infty$.

Доказательство. Частичную сумму s_{2k} можно представить двояко:

1) $s_{2k} = s_{2k-2} + (a_{2k-1} - a_{2k})$,

2) $s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$.

Здесь в каждой круглой скобке разность положительна вследствие условия $a_{n+1} < a_n$. Первое из этих представлений показывает, что $s_{2k} > s_{2k-2}$ и переменная s_{2k} монотонно возрастает. Из второго представления видно, что $s_{2k} < a_1$ и s_{2k} есть величина ограниченная. Известно, что всякая монотонно возрастающая переменная, ограниченная сверху, имеет предел (см. п. 20). Поэтому существует предел последовательности частичных сумм ряда с четными индексами $\lim s_{2k} = s$ при $k \to \infty$.

Частичную сумму с нечетным индексом можно представить в виде $s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1}$. По условию теоремы $a_{2k+1} \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому существует предел $\lim s_{2k+1} = \lim s_{2k} = s$ и ряд (31) сходится. Теорема доказана.

Пример 1. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ сходится по теореме Лейбница, условия которой здесь выполнены.

Постановка вопроса об оценке остатка ряда. Если какой-либо ряд сходится, то его частичная сумма s_n является приближенным выражением для суммы ряда

$$s \approx s_n. \tag{32}$$

Число n зависит от требуемой точности вычисления суммы ряда. Погрешность этого приближенного выражения, т. е. разность $r_n = s - s_n$, является остатком ряда после n-го члена. Поэтому оценка остатка ряда, т. е. вычисление верхней границы величины r_n, имеет большое значение. Задача состоит в том, чтобы по данному $\varepsilon > 0$ найти такое (наименьшее) n, чтобы выполнялось неравенство $|r_n| < \varepsilon$.

Для знакочередующегося ряда известна простая и удобная оценка остатка ряда (см. ниже теорему).

Теорема. *Остаток знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям теоремы Лейбница, имеет знак первого отброшенного члена и меньше его по абсолютной величине.*

Доказательство. Рассмотрим ряд (31). Величину r_{2n} можно представить двояко:

1) $r_{2n} = (a_{2n+1} - a_{2n+2}) + (a_{2n+3} - a_{2n+4}) + \ldots$,

2) $r_{2n} = a_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) - \ldots$

Отсюда следует, что $r_{2n} > 0$ и $r_{2n} < a_{2n+1}$. Следовательно, $0 < r_{2n} < a_{2n+1}$.

Рассуждая аналогично, убеждаемся в том, что величина $-r_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - \ldots$ удовлетворяет соотношению $0 < -r_{2n-1} < a_{2n}$, из которого следует, что $r_{2n-1} < 0$ и $|r_{2n-1}| < a_{2n}$. Теорема доказана.

Пример 2. Требуется вычислить с точностью до 0,01 сумму сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots$$

Здесь $a_3 = \frac{1}{81} > \frac{1}{100}$, но уже $a_4 = \frac{1}{256} < \frac{1}{100}$. Поэтому по теореме об оценке остатка знакочередующегося ряда сумму нашего ряда представляет s_3 с точностью 0,01:

$$s \approx s_3 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{1231}{1296},$$

причем $s < s_3$, так как величина $r_3 = s - s_3 < 0$ — она имеет знак четвертого члена ряда.

211. Общие числовые ряды. Рассмотрим числовой ряд с вещественными членами, относительно знаков которых не ставится никаких ограничений:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{33}$$

Если члены ряда не все положительны (отрицательны), но начиная с некоторого места становятся положительными (отрицательными), то, отбросив достаточно большое количество начальных членов ряда, сведем вопрос о сходимости данного ряда к исследованию ряда с положительными членами. Таким образом, существенно новым случаем будет тот, когда среди членов ряда есть бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов.

Ряд (33) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots. \tag{34}$$

Теорема. *Из сходимости ряда* (34) *следует сходимость ряда* (33).

Действительно, сходимость ряда (34) влечет согласно принципу сходимости, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ и $p > 0$ выполняется неравенство $|a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$.

Вместе с тем будет выполняться и такое соотношение $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \leqslant |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| < \varepsilon$, из которого следует (в силу такого же принципа сходимости), что сходится ряд (33).

Ряд (33) называется *условно сходящимся* (или неабсолютно сходящимся), если он сходится, а ряд (34) расходится.

Пример 1. Ряд $\sum\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ сходится абсолютно, потому что сходится ряд $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Пример 2. Ряд $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ сходится по теореме Лейбница. Однако ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится как гармонический ряд. Поэтому данный ряд сходится условно.

Для того чтобы выяснить вопрос об абсолютной сходимости данного ряда (33), надо составить положительный ряд (34) и исследовать его сходимость.

Пример 3. Ряд $1 - x + x^2 - \ldots + (-x)^n + \ldots$ сходится абсолютно при любом x из промежутка $|x| < 1$, потому что сходится геометрический ряд $\sum |x|^n$ в указанном промежутке.

Свойства абсолютно сходящихся рядов. Абсолютно сходящиеся ряды обладают всеми общими свойствами сходящихся рядов (см. п. 208) и следующими специальными свойствами: 1) они обладают переместительным свойством, 2) их можно перемножить почленно.

Переместительное свойство абсолютно сходящегося ряда заключается в том, что при любой перестановке членов ряда его сходимость не нарушается и его сумма не меняется.

Лемма. *Сходящиеся ряды с положительными членами обладают переместительным свойством.*

Доказательство. Пусть дан сходящийся ряд с положительными членами $\sum a_n$ (I). Обозначим его сумму s, а n-ю частичную сумму s_n. Если произвольно переставить члены данного ряда, то получим ряд $\sum a'_n$ (II), состоящий из членов данного ряда. Каждый член ряда (I) имеет новый порядковый номер среди членов ряда (II). Рассмотрим m-ю частичную сумму ряда (II) $\sigma_m = a'_1 + \ldots + a'_m$, где $a'_1 = a_p, \ldots, a'_m = a_q$. Обозначим через $\tilde{n}$ наибольшее из чисел $p, \ldots, q$. Следовательно, в частичную сумму $s_{\tilde{n}}$ ряда (I) войдут все слагаемые суммы σ_m, поэтому $\sigma_m \leqslant s_{\tilde{n}}$. Из сходимости ряда (I) следует, что $s_{\tilde{n}} < s$. Имеем $\sigma_m \leqslant s_{\tilde{n}} < s$, т. е. множество частичных сумм положительного ряда (II) ограничено сверху и по теореме 1 п. 209 ряд (II) сходится, причем его сумма σ удовлетворяет соотношению $\sigma \leqslant s$.

Ряд (I) может быть получен из (II) путем перестановки членов ряда (II), поэтому в силу изложенного $s \leqslant \sigma$. Следовательно, $s = \sigma$ и лемма доказана.

Теорема Дирихле.* *Абсолютно сходящиеся ряды обладают переместительным свойством.*

---

* Петр Густав Лежен Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

Доказательство. Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (III)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ (IV)}.$$

По условию теоремы ряд с положительными членами (IV) сходится, и поэтому он обладает (в силу леммы) переместительным свойством. Следовательно, абсолютно сходящийся ряд (III) остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов.

Остается доказать утверждение теоремы о неизменности суммы ряда (III) при перестановке его членов. Рассмотрим для этого такие ряды с положительными членами: ряд $\sum b_n$ (V), составленный из положительных членов ряда (III), и ряд $\sum c_n$ (VI), составленный из абсолютных величин отрицательных членов ряда (III), причем члены рядов (V) и (VI) расположены и занумерованы в том порядке, в каком они встречаются в ряде (III).

Из сходимости ряда (IV) следует сходимость рядов (V) и (VI), потому что частичные суммы B_k и C_k этих рядов не превосходят соответствующей частичной суммы A_n^{IV} ряда (IV), которая в свою очередь меньше суммы A^{IV} ряда (IV). Частичная сумма A_n ряда (III) содержит k положительных членов и m отрицательных членов, поэтому $A_n = B_k - C_m$. Ряды (III), (V), (VI) сходятся, поэтому существуют пределы их частичных сумм и они связаны равенством

$$A = B - C. \tag{35}$$

Перестановка членов ряда (III) вызовет перестановку членов сходящихся положительных рядов (V) и (VI), но не изменит (в силу леммы) сумм B и C этих рядов. Следовательно, не изменится и сумма ряда (III). Действительно, после перестановки членов ряды (III), (V) и (VI) будут иметь соответственно суммы A', B' и C', где $B' = B$ и $C' = C$. По формуле (35) имеем $A' = B' - C'$ и $A' = A$. Теорема доказана.

Примечание. Условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают. Справедливость этого утверждения покажем на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, сумму которого обозначим через s, а n-ю частичную сумму — через s_n. Рассмотрим ряд, полученный из данного ряда перестановкой членов

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}+$$
$$+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}+\ldots.$$

Его частичная сумма $s'_{3k}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{1}{2}s_{2k}$ имеет предел, равный $\lim s'_{3k}=\frac{1}{2}s$. Его частичные суммы s'_{3k+1} и s'_{3k+2} имеют те же пределы

$$\lim s'_{3k+1}=\lim\left(s'_{3k}+\frac{1}{2k+1}\right)=\frac{1}{2}s, \quad \lim s'_{3k+2}=\lim\left(s'_{3k+1}-\frac{1}{4k+2}\right)=\frac{1}{2}s.$$

Следовательно, в результате перестановки членов в данном условно сходящемся ряде получен ряд, сумма которого вдвое меньше суммы исходного ряда.

Риман доказал *, что в любом условно сходящемся ряде его члены можно переставить так, что получится ряд с любой наперед заданной суммой или, если угодно, расходящийся ряд.

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно. Это значит, что такие ряды можно умножать как многочлены — каждый член одного ряда умножается на каждый член другого ряда и затем результаты складываются.

Пример 4. Данный пример иллюстрирует умножение абсолютно сходящихся рядов $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ в промежутке $-1<x<1$. Перемножив их почленно и расположив результат по возрастающим степеням x, получим геометрический ряд со знаменателем $q=x^2$

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)=$$

$$=1+(1-1)x+(1-1+1)x^2+\ldots=1+x^2+x^4+\ldots.$$

Заметим, что суммы перемножаемых рядов и сумма полученного ряда связаны при $|x|<1$ равенством $\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x^2}$.

212. Ряды с комплексными членами. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n+i\beta_n\}$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+i\beta_n). \qquad (36)$$

Ряд с комплексными членами (36) называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности частичных сумм данного ряда $\lim s_n=s$, при этом число s называется *суммой ряда* (36). Здесь мы пользуемся понятием *предела последовательности комплексных чисел* и понимаем его в следующем смысле: число s называется пределом последовательности $\{s_n\}$, если для каждого $\varepsilon>0$ существует число $N>0$ такое, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $|s_n-s|<\varepsilon$.

Следующая теорема позволит свести изучение рядов (36) с комплексными членами к исследованию таких рядов с вещественными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n. \qquad (37)$$

Теорема 1. *Ряд* (36) *сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды* (37).

Действительно, если величины s_n и s представить в алгебраической форме $s_n=a_n+ib_n$, $s=\alpha+i\beta$, где a_n и b_n — частичные суммы рядов (37), то условие $|s_n-s|<\varepsilon$ примет вид

$$|s_n-s|=|a_n-\alpha+i(b_n-\beta)|=\sqrt{(a_n-\alpha)^2+(b_n-\beta)^2}<\varepsilon. \qquad (38)$$

Если ряд (36) сходится, то при $n>N$ выполнено условие (38), из которого следует, что

$$|a_n-\alpha|<\varepsilon, \quad |b_n-\beta|<\varepsilon, \qquad (39)$$

* Доказательство см. в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. I, § 14.

и поэтому сходятся ряды (37) соответственно к α и β. Если же ряды (37) сходятся соответственно к α и β, то выполняются неравенства (39) при $n > N$, а вместе с ними и неравенство $|s_n - s| < \varepsilon\sqrt{2}$, показывающее сходимость ряда (36).

Теорема 2. *Ряд* (36) *сходится, если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n + i\beta_n|. \qquad (40)$$

Действительно, общий член ряда (40) удовлетворяет соотношениям

$$|\alpha_n + i\beta_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \geqslant |\alpha_n|, \quad |\alpha_n + i\beta_n| \geqslant |\beta_n|.$$

На основании теоремы сравнения (см. п. 209) заключаем, что из сходимости ряда (40) следует сходимость рядов (37), из чего (в силу теоремы 1) следует сходимость ряда (36).

Пример. Ряд $\sum\left(\frac{1}{n^2} + \frac{i}{2^n}\right)$ сходится, так как сходятся ряды с общими членами $\frac{1}{n^2}$ и $\frac{1}{2^n}$.

§ 36. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

213. Основные понятия. Признак Вейерштрасса. Пусть дана последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определенных в одном и том же промежутке (a, b). Составим ряд, членами которого являются функции данной последовательности

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots. \qquad (1)$$

Функциональный ряд (1) можно понимать как бесконечное множество числовых рядов, в каждом из которых величина x имеет свое определенное значение из промежутка (a, b). При некоторых значениях x ряд (1) сходится, при других — расходится.

Точкой сходимости ряда (1) называется значение x_0 из промежутка (a, b), при котором ряд (1) сходится, т. е. существует конечный предел $f(x_0)$ последовательности его частичных сумм $s_n(x_0) = f_1(x_0) + \ldots + f_n(x_0)$. Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon, x_0)$ такое, что при всех $n > N(\varepsilon_0, x_0)$ выполняется неравенство $|f(x_0) - s_n(x_0)| < \varepsilon$.

Областью сходимости функционального ряда (1) называется все множество значений x, при которых ряд (1) сходится.

Сформулируем понятие сходимости функционального ряда в промежутке. Составим для этого n-ю частичную сумму ряда (1)

$$s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x). \qquad (2)$$

Определение. Функциональный ряд (1) называется *сходящимся в промежутке* (a, b), если существует конечный предел последовательности его частичных сумм при любом x из (a, b)

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x) \qquad (3)$$

и этот предел называется *суммой ряда* (1) в промежутке (a, b).

Это значит, что для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого x из (a, b) существует число $N(\varepsilon, x)$ такое, что для рассматриваемого x при $n > N$ имеет место неравенство

$$|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |r_n(x)| < \varepsilon, \tag{4}$$

где $r_n(x)$ — остаток ряда после n-го члена:

$$r_n(x) = f(x) - s_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots \tag{5}$$

Поэтому остаток $r_n(x)$ сходящегося ряда стремится к нулю при $n \to \infty$: $\lim r_n(x) = 0$.

Пример 1. Геометрический ряд $\sum \left(\frac{x}{3}\right)^n$ сходится в промежутке $-3 < x < 3$, так как при этом $q = \left|\frac{x}{3}\right| < 1$. При $|x| \geqslant 3$ ряд расходится.

Определение. Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся по x в промежутке* (a, b), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует не зависящее от x число $N(\varepsilon)$ такое, что имеет место неравенство (4) для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех x из (a, b).

Из этого определения следует, что если ряд (1) сходится равномерно в промежутке (a, b), то он равномерно сходится в любом промежутке, содержащемся в (a, b), а также, что ряд (1) сходится в каждой точке промежутка (a, b). Число $N(\varepsilon)$, о котором говорится в определении, является верхней границей элементов числового множества $\{N(\varepsilon, x)\}$, указанного выше. Не всякое бесконечное числовое множество ограничено. Но если существует верхняя граница множества $\{N(\varepsilon, x)\}$ для всех x из (a, b) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$, то ряд (1) сходится равномерно в (a, b).

Пример 2. Ряд $\frac{1}{x+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ сходится равномерно в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$. Действительно, его n-я частичная сумма

$$s_n = \frac{1}{x+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \frac{1}{x+n}$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому данный ряд сходится при $x \geqslant 0$ и его сумма $f(x) \equiv 0$.

Для того чтобы убедиться в равномерной сходимости ряда при $x \geqslant 0$, фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и составим неравенство $|r_n(x)| = \frac{1}{x+n} < \varepsilon$, равносильное неравенствам $x + n > \frac{1}{\varepsilon}$ и $n > \frac{1}{\varepsilon} - x \equiv N(\varepsilon, x)$.

В нашем случае существует верхняя граница множества $\{N(\varepsilon, x)\}$, именно $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, потому что $\frac{1}{\varepsilon} - x \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ при $x \geqslant 0$. Следовательно, если $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то имеем $n > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - x$ и $\frac{1}{x+n} < \varepsilon$. Таким образом, $|r_n(x)| < \varepsilon$ и данный ряд сходится равномерно.

Теорема (признак Вейерштрасса). *Если члены функционального ряда* (1) *удовлетворяют в промежутке* (a, b) *условию*

$$|f_n(x)| \leqslant c_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где c_n *суть члены некоторого сходящегося положительного ряда*

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots, \tag{7}$$

то ряд (1) *сходится в* (a, b) *абсолютно и равномерно.*

Действительно, из условия (6) следует неравенство

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| \leqslant c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}, \tag{8}$$

которое имеет место для всех x из (a, b) и всех $p > 0$. Согласно принципу сходимости, примененному к числовому ряду (7), для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ правая часть неравенства (8) меньше ε, а с нею будет меньше ε и левая часть (8) сразу для всех x из (a, b), т. е.

$$|f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{9}$$

Отсюда следует (см. п. 208) сходимость ряда (1) в промежутке (a, b). Вместе с рядом (1) сходится и его остаток после n-го члена. Поэтому в неравенстве (9) можно перейти к пределу при $p \to \infty$, в результате чего получим неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$, которое имеет место для всех x из (a, b) и $n > N(\varepsilon)$. Следовательно, ряд (1) сходится равномерно по x в промежутке (a, b).

Абсолютная сходимость ряда (1) в любой точке x_0 из (a, b), т. е. сходимость ряда с общим членом $|f_n(x_0)|$, следует из сравнения этого ряда с рядом (7) и условия (6). Теорема доказана.

Сходящийся положительный ряд (7) при условии (6) называется *мажорантным рядом* для ряда (1). При этом можно сказать, что ряд (1) мажорируется рядом (7).

Пример 3. Функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ сходится и имеет указанную сумму в промежутке $|x| < 1$. Данный ряд сходится абсолютно и равномерно в промежутке $|x| \leqslant r$, где $0 < r < 1$.

214. Свойства равномерно сходящихся рядов. Пусть ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{10}$$

сходится в промежутке (a, b) к функции $f(x)$, а его члены $f_n(x)$ непрерывны в этом промежутке.

Теорема. *Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций есть функция непрерывная.*

Дано: ряд (10) сходится равномерно в промежутке (a, b).

Требуется доказать, что его сумма $f(x)$ непрерывна в каждой точке x_0 промежутка (a, b), т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует соответствующее $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{11}$$

Доказательство. 1. При любом фиксированном n сумму ряда (10) можно представить в виде $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$ для любого x из (a, b); в частности, при $x = x_0$ имеем $f(x_0) = s_n(x_0) + r_n(x_0)$. Отсюда следует равенство $f(x) - f(x_0) = s_n(x) - s_n(x_0) + r_n(x) - r_n(x_0)$ и неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |s_n(x) - s_n(x_0)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|. \tag{12}$$

2. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Согласно равномерной сходимости ряда (10) в промежутке (a, b) числу $\frac{\varepsilon}{3}$ соответствует такое $N(\varepsilon)$, что для всех x из (a, b) и $n > N(\varepsilon)$ имеем

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13}$$

В частности, при $x = x_0$ имеем $|r_n(x)_0| < \frac{\varepsilon}{3}$.

3. Фиксируем любое n, удовлетворяющее условию $n > N(\varepsilon)$. Частичная сумма $s_n(x)$ ряда (10) непрерывна в (a, b) как сумма конечного числа непрерывных функций. Поэтому числу $\frac{\varepsilon}{3}$ соответствует $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|s_n(x) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Следовательно, при $|x - x_0| < \delta$ каждый член правой части неравенства (12) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, а вся правая часть меньше ε, т. е. имеет место неравенство (11). Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$(1-x) + (1-x)x + \ldots + (1-x)x^n + \ldots, \tag{14}$$

который сходится в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Действительно, при $x = 1$ все члены ряда и его сумма равны нулю, а при $0 \leqslant x < 1$, суммируя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, получим $s = (1-x)\frac{1}{1-x} \equiv 1$. Несмотря на то, что члены сходящегося ряда непрерывны в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, сумма ряда имеет точку разрыва $x = 1$.

Докажем, что ряд (14) сходится неравномерно в промежутке $[0, 1]$. При $x \neq 1$ остаток этого ряда равен $r_n = x^n$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В промежутке $0 < x < 1$ неравенство $|r_n| < \varepsilon$ выполняется при $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \equiv N(\varepsilon, x)$. Если $x \to 1$, то имеем $N(\varepsilon, x) \to \infty$. Поэтому не существует единого $N(\varepsilon)$ для всех x из промежутка $0 < x \leqslant 1$, и ряд (14) сходится неравномерно.

Теорема (о почленном интегрировании ряда). *Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно.*

В условиях предыдущей теоремы требуется доказать, что при $a < \alpha < \beta < b$ имеет место формула

$$\int_\alpha^\beta \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx. \tag{15}$$

Доказать возможность почленного интегрирования ряда, т. е. возможность перестановки операций суммирования и интегрирования согласно формуле (15), это значит доказать, что существуют все интегралы, входящие в формулу (15), сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\, dx \tag{16}$$

и сумма этого ряда равна $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$.

Доказательство. В равенстве

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x) \tag{17}$$

обе части непрерывны в (a, b), потому что $s_n(x)$ непрерывна как сумма конечного числа непрерывных слагаемых, $f(x)$ непрерывна в силу предыдущей теоремы, $r_n(x)$ непрерывна как разность непрерывных функций $f(x)$ и $s_n(x)$. Поэтому все эти функции интегрируемы.

Интегрируя равенство (17) в промежутке от α до β, получим

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right] dx + \int_\alpha^\beta r_n(x)\, dx. \tag{18}$$

В конечной сумме можно переставить операции суммирования и интегрирования, поэтому величина

$$\sigma_n \equiv \int_\alpha^\beta \left[\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right] dx = \sum_{k=1}^{n} \int_\alpha^\beta f_k(x)\, dx$$

представляет частичную сумму ряда (16).

Обозначим $R_n \equiv \int_\alpha^\beta r_n(x)\, dx$ и докажем, что $R_n \to 0$. Согласно равномерной сходимости ряда (10) в $[\alpha, \beta]$ числу $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ соответствует $N(\varepsilon)$ такое, что выполняется неравенство $|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ для всех $n > N(\varepsilon)$ и для всех x из $[\alpha, \beta]$. Мы предполагаем,

что в формуле (17) взято именно такое n (большее $N(\varepsilon)$). Поэтому имеем

$$|R_n| \leqslant \int_\alpha^\beta |r_n(x)|\,dx < \int_\alpha^\beta \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx < \varepsilon \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Запишем равенство (18) в виде $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sigma_n + R_n$ и перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$. Левая часть равенства от n не зависит, а в правой части $R_n \to 0$. Отсюда следуют сходимость ряда (16) и формула (15). Теорема доказана.

Теорема (о почленном дифференцировании ряда). *Если в промежутке* $[a, b]$ 1) *ряд* (10) *сходится к функции* $f(x)$, 2) *члены ряда* (10) *непрерывно дифференцируемы*, 3) *сходится равномерно ряд, составленный из производных*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x), \tag{19}$$

то ряд (10) *можно дифференцировать почленно, т. е. имеет место формула*

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x). \tag{20}$$

Доказать возможность перестановки операций дифференцирования и суммирования в ряде — значит доказать, что существует $f'(x)$ и что сумма ряда (19) равна производной от суммы ряда (10), т. е. $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. Функция $g(x)$ непрерывна, так как выполнены все условия первой теоремы п. 214 для ряда (19), поэтому $g(x)$ интегрируема в $[a, b]$. Ряд (19) удовлетворяет всем условиям теоремы о почленном интегрировании рядов. Интегрируя ряд (19) в пределах от a до x, где $a < x \leqslant b$, получаем

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = f(x) - f(a).$$

Дифференцируя равенство $\int_a^x g(t)\,dt = f(x) - f(a)$ по переменной x в соответствии с теоремой Барроу, получаем $g(x) = f'(x)$. Теорема доказана.

Пример 2. Ряд $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\frac{1}{1-x}$ удовлетворяет в промежутке $|x|\leqslant r<1$ всем условиям последней теоремы, поэтому его можно дифференцировать почленно. В результате получим

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Здесь равномерная сходимость ряда производных имеет место в силу признака Вейерштрасса, так как существует мажорантный ряд $\sum nr^n$, который сходится по признаку Даламбера.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^2}$ сходится и даже равномерно в любом промежутке. Но его нельзя дифференцировать почленно, так как ряд производных членов данного ряда $\sum\cos n^2x$ расходится — его общий член не стремится к нулю.

215. Степенные ряды. Важным частным случаем функциональных рядов являются *степенные ряды*, так называются ряды вида

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{21}$$

где a_0, a_1, ... — вещественные постоянные.

Первая теорема Абеля*. *Если степенной ряд* (21) *сходится при* $x=x_0\neq 0$, *то он сходится абсолютно в промежутке* $|x|<|x_0|$. *Если ряд* (21) *расходится при* $x=x_1$, *то он расходится при каждом* x, *удовлетворяющем условию* $|x|>|x_1|$.

Доказательство. Пусть ряд (21) сходится в точке x_0. Отсюда следует стремление к нулю общего члена этого ряда $a_nx_0^n$ и его ограниченность: $|a_nx_0^n|<M$ при всех n.

Члены ряда $\sum|a_nx^n|$ удовлетворяют соотношению

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n<Mq^n, \tag{22}$$

где $q=\left|\frac{x}{x_0}\right|$. Если $|x|<|x_0|$, то величина q удовлетворяет соотношению $0<q<1$, и поэтому сходится геометрический ряд с общим членом Mq^n.

Отсюда согласно теореме сравнения и неравенства (22) следует сходимость ряда с общим членом $|a_nx^n|$ и абсолютная сходимость ряда (21), если $|x|<|x_0|$.

Если ряд (21) расходится в точке x_1, то он расходится в любой точке x, в которой $|x|>|x_1|$. Убедимся в этом рассуждением от противного. Если бы ряд (21) сходился при условии $|x|>|x_1|$, то согласно первой части теоремы он сходился бы в точке x_1, но он в этой точке расходится по условию. Отсюда следует утверждение теоремы.

---

* Нильс Генрих Абель (1802—1829) — норвежский математик.

Следствие 1. Для каждого степенного ряда (21) существует число R, называемое *радиусом сходимости* этого *ряда*, со следующими свойствами: в области $|x|<R$ ряд (21) сходится абсолютно, при $|x|>R$ ряд (21) расходится. В частности, может оказаться, что $R=0$ и тогда ряд (21) расходится при всех значениях x, отличных от нуля, или же $R=\infty$ и тогда ряд (21) сходится при всех значениях x.

Пусть ряд (21) сходится при $x=x_0>0$. Если мы будем увеличивать число x_0, то могут встретиться только два случая: или этот ряд будет оставаться сходящимся при сколь угодно большом x_0, тогда $R=\infty$; или же будет существовать такое число R, что при всех $x_0<R$ ряд (21) сходится, но при $x_0>R$ ряд расходится.

Промежуток $-R<x<R$ называется *интервалом сходимости степенного ряда.*

Областью сходимости степенного ряда (21) является промежуток $(-R, R)$, к которому в отдельных случаях добавляются одна или обе границы промежутка (что зависит от свойства конкретного исследуемого ряда).

Вычисление радиуса сходимости. Дан ряд (21). Предположим, что существует и отличен от нуля предел $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=|x|\rho.$$

В соответствии с признаком Даламбера ряд (21) 1) сходится абсолютно при $|x|\rho<1$, т. е. при $|x|<\frac{1}{\rho}$, 2) расходится при $|x|\rho>1$. Отсюда следует, что радиусом сходимости ряда (21) является число

$$R=\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{23}$$

Если $\rho=0$, то ряд сходится всюду.

Пример 1. Ряд $\sum\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ имеет радиус сходимости $R=\lim\frac{3(n+1)}{n}=3$. Областью сходимости данного ряда является промежуток $-3\leqslant x<3$.

Пример 2. Ряд $\sum n!x^n$ сходится только в точке $x_0=0$, так как $R=0$.

Пример 3. Ряд $\sum\frac{x^n}{n!}$ сходится при всех x, так как $R=\infty$.

Следствие 2. В каждой внутренней точке промежутка сходимости степенной ряд сходится абсолютно и поэтому обладает всеми свойствами абсолютно сходящихся рядов (переместительным, сочетательным, свойством почленного умножения).

Степенными рядами называются также ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{24}$$

где a_n и x_0 — вещественные числа. Путем замены $x - x_0 = y$ ряд (24) приводится к ряду вида (21). Пусть R есть радиус сходимости ряда с общим числом $a_n y^n$ и промежуток $-R < y < R$ есть его интервал сходимости. Тогда интервалом сходимости ряда (24) будет промежуток $x_0 - R < x < x_0 + R$.

Вторая теорема Абеля. *Степенной ряд* (21) *сходится равномерно в любом промежутке* $[a, b]$, *целиком содержащемся внутри интервала сходимости этого ряда.*

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (21), a и b — две внутренние точки интервала сходимости. Обозначим через r наибольшее из чисел $|a|$ и $|b|$. Рассмотрим три промежутка: $[a, b] \subset [-r, r] \subset (-R, R)$.

Точка r является внутренней точкой промежутка $(-R, R)$, и в ней по первой теореме Абеля ряд сходится абсолютно, т. е. сходится ряд с общим членом $|a_n| r^n$. Этот ряд мажорирует ряд (21) в промежутке $[-r, r]$, потому что $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (21) сходится равномерно по x в $[a, b]$. Теорема доказана.

Можно доказать,* что если ряд (21) сходится в точке R или $-R$, то он сходится равномерно в промежутке $[a, R]$ или соответственно $[-R, b]$, где a и b — внутренние точки интервала сходимости.

Из второй теоремы Абеля следует, что степенные ряды обладают всеми свойствами равномерно сходящихся рядов. Сформулируем эти свойства: *сумма степенного ряда* (21) *есть функция, непрерывная в каждой точке области сходимости ряда. Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз*, причем в результате этих операций получатся степенные ряды, имеющие т о т ж е р а д и у с с х о д и м о с т и, что и исходный ряд.

Доказательство неизменности радиуса сходимости при интегрировании и дифференцировании степенного ряда ниже приведено при дополнительном условии, что существует предел $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R$, величина которого согласно (23) равна радиусу сходимости ряда (21). В результате интегрирования ряда (21) получим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

---

* См.: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. I, § 14.

Его радиус сходимости согласно (23) равен

$$R_1 = \lim_{n\to k}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{n+2}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = R.$$

В результате дифференцирования ряда (21) получим степенной ряд с общим членом na_nx^{n-1}, радиус сходимости которого равен

$$R_2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{(n+1)\,a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to k}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = R.$$

Принимая во внимание свойства, которыми обладают степенные ряды, с этими рядами можно обращаться как с многочленами.

216. Ряд Тейлора. Постановка вопроса о разложении данной в промежутке (a, b) функции $f(x)$ в степенной ряд заключается в следующем. Разложить данную функцию $f(x)$ в степенной ряд в окрестности (α, β) точки x_0 или, что то же, представить $f(x)$ в окрестности (α, β) точки x_0 степенным рядом —это значит найти ряд вида (24) со следующими свойствами: ряд (24) сходится в (α, β) и в каждой точке этого промежутка его сумма ряда равна $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n. \tag{25}$$

Требуется также выяснить условия представимости функции степенным рядом.

Известно, что ряд (24) сходится в промежутке вида $|x - x_0| < r < R$, где R — его радиус сходимости. Поэтому под (α, β) мы всегда будем понимать окрестность точки x_0 указанного вида.

Пример. Функция $f(x) = \frac{1}{1-x}$ определена при всех вещественных x, кроме $x = 1$, и является при условии $|x| < 1$ суммой степенного ряда $1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$. Таким образом, функция $\frac{1}{1-x}$ представима этим рядом в промежутке $-1 < x < 1$.

Пусть $f(x)$ определена в точке x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков $f^{(n)}(x_0)$. *Рядом Тейлора* функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{26}$$

где $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ и $0! = 1$; коэффициенты этого ряда $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ называются *коэффициентами Тейлора*. Такое название сохраняется за рядом (27) независимо от того, сходится он или нет и какова его сумма.

Теорема 1. *Если $f(x)$ можно представить в некоторой окрестности точки x_0 степенным рядом* (25), *то такое представление единственно, и этим рядом является ее ряд Тейлора, т. е.*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{27}$$

Доказательство. По условию имеет место тождество (25) в области $|x-x_0|<r$. Известно, что степенной ряд (25) можно дифференцировать любое число раз. Следовательно, сумма этого ряда $f(x)$ имеет производные всех порядков в области $|x-x_0|<r$. Таково необходимое условие представимости $f(x)$ степенным рядом (25).

Дифференцируем тождество (25) последовательно k раз:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1},\ \ldots,$$

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Отсюда и из (25) при $x=x_0$ получим

$$f(x_0)=a_0,\ f'(x_0)=a_1,\ \ldots,\ f^{(k)}(x_0)=k!a_k.$$

Следовательно, $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)$ при $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.

Ряд (25) с этими коэффициентами и есть ряд Тейлора (27). Теорема доказана.

В процессе доказательства теоремы было установлено, что для того чтобы функция могла быть разложена в степенной ряд, необходимо, чтобы она имела производные всех порядков. Это условие не так уж невыполнимо. Многие элементарные функции ему удовлетворяют. Например, e^x и $\sin x$.

Пусть функция $f(x)$ имеет в области $|x-x_0|<r$ производные всех порядков. Тогда можно составить ряд Тейлора (26) и формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (см. п. 51). Формулу Тейлора запишем в виде $f(x)=s_n(x)+R_n(x)$, где $s_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда (26), а

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{28}$$

Выясним, при каком условии ряд (26) сходится к $f(x)$, т. е. существует предел последовательности частичных сумм $s_n(x)$ и этот предел равен $f(x)$. Из равенства $f(x)=s_n(x)+R_n(x)$ следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы при всех x из промежутка $|x-x_0|<r$ выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0. \tag{29}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(x)$, имеющая производные всех порядков в промежутке $|x - x_0| < r$, могла быть представлена в этом промежутке степенным рядом, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$ для всех x из указанного промежутка.*

Заметим, что условие (29) проверить трудно уже потому, что в него входит величина c, точное значение которой неизвестно. Поэтому ниже доказана теорема, содержащая удобное во многих случаях достаточное условие представимости функции степенным рядом.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ имеет в промежутке $|x - x_0| < r$ производные всех порядков, которые ограничены по совокупности, т. е. существует число M такое, что выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| < M \tag{30}$$

для всех n и при всех x из промежутка $|x - x_0| < r$, то функция $f(x)$ может быть представлена степенным рядом (27) в этом промежутке.

Доказательство сводится к тому, чтобы проверить условие (29). В силу (30) имеем

$$|R_n(x)| = |f^{(n+1)}(c)| \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} < M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{31}$$

Ряд $\sum M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Даламбера, поэтому его общий член стремится к нулю. Отсюда следует согласно (31), что выполнено условие (29). Действительно, числу $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ соответствует такое $N(\varepsilon)$, что выполняется неравенство $\frac{r^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\varepsilon}{M}$, а вместе с ним и неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon)$ и всех x из $|x - x_0| < r$. Теорема доказана.

Примечание. Мы доказали нечто большее, чем теорему 3. Упомянутое $N(\varepsilon)$ не зависит от x. Поэтому при $n \to \infty$ остаточный член $R_n(x)$ *стремится к нулю равномерно* * по x в промежутке $|x - x_0| < r$, а отрезок ряда Тейлора $s_n(x)$ с достаточно большим n является многочленом, *равномерно приближающим* ** *данную $f(x)$ в промежутке* $|x - x_0| < r$.

217. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды. Частым случаем ряда Тейлора (27), соответствующим условию $x_0 = 0$, является так называемый *ряд Маклорена*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{32}$$

---

* То есть неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ выполняется при $n > N(\varepsilon)$ сразу для всех x из промежутка $|x - x_0| < r$.

** То есть неравенство $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ выполняется при $n > N(\varepsilon)$ сразу для всех x из промежутка $|(x - x_0)| < r$.

Составим разложения основных элементарных функций по степеням x.

1. Разложение $f(x)=e^x$. Здесь $f^{(n)}(x)=e^x$ и $f^{(n)}(0)=1$. По формуле (32) получим разложение показательной функции в степенной ряд

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots. \tag{33}$$

Условие (30) в нашем случае выполнено в любом промежутке $|x|<r$, так как $|f^{(n)}(x)|=e^x<e^r$. Поэтому формула (33) верна при всех x.

2. Разложение $f(x)=\sin x$. Здесь $f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$,

$f^{(k)}(0)=\sin\frac{k\pi}{2}=0$ при $k=2n$, $f^{(k)}(0)=(-1)^n$ при $k=2n+1$.

Поэтому имеем

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots. \tag{34}$$

Формула (34) верна при всех x, так как $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$.

3. Разложение $f(x)=\cos x$. Дифференцируя тождество (34), получим верное при всех x равенство

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots. \tag{35}$$

4. Разложение $f(x)=(1+x)^\alpha$, где α — любое вещественное число. Здесь $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ и $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$. Формула (32) в этом случае дает *биномиальный ряд*

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+\ldots. \tag{36}$$

Можно доказать (на чем мы останавливаться не будем), что равенство (36) верно при $|x|<1$. Полезно выделить следующие частные случаи биномиального ряда:

1) при $\alpha=n$ имеем бином Ньютона $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k$,

2) при $\alpha=-1$ имеем геометрический ряд

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=1-x+x^2-\ldots+(-x)^n+\ldots, \tag{37}$$

3) при $\alpha = -\frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^n, \qquad (38)$$

4) заменив в (38) x на $-x^2$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{2n}. \qquad (39)$$

5. Разложение $f(x) = \ln(1+x)$ получим путем интегрирования ряда (37) в промежутке от 0 до x:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (-1 < x \leqslant 1). \qquad (40)$$

6. Разложение $f(x) = \operatorname{arctg} x$ получим путем интегрирования ряда (37), если в нем предварительно заменить x на x^2:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (41)$$

7. Разложение $f(x) = \arcsin x$ получим путем интегрирования ряда (39)

$$\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (42)$$

Области сходимости рядов (40)—(42) указаны в скобках.

Заметим, что все полученные разложения верны и в комплексной области (см. п. 212). Поэтому, если заменить в ряде (33) x на ix, то получим равенство

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (43)$$

из которого следует формула Эйлера $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Ряд (43) с комплексными членами сходится, потому что сходятся соответствующие вещественные ряды.

218. Некоторые приложения степенных рядов.

Познакомимся на примерах с использованием степенных рядов при вычислении интегралов и пределов функций.

1. *Интегрирование функций.* Известно, что не всякая элементарная функция интегрируема в элементарных функциях. Например, функция e^{-x^2} непрерывна при всех x и имеет первообразную, которая не является элементарной функцией.

Пример 1. Интеграл $\int_0^x e^{-x^2}dx$ вычислим путем разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного его интегрирования. Если в тождестве (33) заменить x на $-x^2$, то получим равенство

$$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \tag{44}$$

которое имеет место при всех x. Интегрируя его почленно, получим формулу

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \tag{45}$$

которая при любом x дает представление нашего интеграла в виде бесконечного степенного ряда.

Пример 2. Желая вычислить в пределах от 0 до x интеграл от $\frac{\sin x}{x}$, разложим эту функцию в степенной ряд. Путем деления ряда (34) на x получим

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Естественно положить единице значение этой функции при $x=0$. Путем почленного интегрирования найдем

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

2. *Раскрытие неопределенностей.* Вычисление предела функции с помощью степенного ряда иллюстрируем примером.

Пример 3. Требуется вычислить предел $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{e^{3x}-1-3x}$.

Разложим в степенные ряды отдельно числитель и знаменатель дроби и выделим в них общий множитель x^2:

$$\frac{\cos 2x-1}{e^{3x}-1-3x}=\frac{\left(1-\frac{1}{2!}4x^2+\frac{1}{4!}16x^4-\ldots\right)-1}{\left(1+3x+\frac{9}{2!}x^2+\ldots\right)-1-3x}=\frac{x^2\left(-2+\frac{2}{3}x^2-\ldots\right)}{x^2\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}x+\ldots\right)}.$$

Сократим дробь на x^2, затем положим в правой части этого равенства $x=0$ и, пользуясь непрерывностью суммы степенного ряда, получим окончательно $L=-\frac{4}{9}$.

219. Понятие о ряде Фурье.* Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{46}$$

---

* Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) — французский математик и физик.

Разложить данную функцию $f(x)$ в промежутке $(-\pi, \pi)$ в тригонометрический ряд или представить $f(x)$ в промежутке $(-\pi, \pi)$ тригонометрическим рядом — это значит найти ряд вида (46), который в этом промежутке сходится к $f(x)$, т. е. имеет место равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{47}$$

по крайней мере в точках непрерывности $f(x)$.

Определение 1. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *ортогональными в промежутке* (a, b), *если равен* нулю интеграл

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = 0. \tag{48}$$

В основе теории рядов Фурье лежит *свойство ортогональности в промежутке* $(-\pi, \pi)$ *системы тригонометрических функций*

$$\{1, \cos nx, \sin nx\} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{49}$$

Действительно, нетрудно проверить равенства

$$\begin{gathered} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0 \quad (n \neq m), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0, \end{gathered} \tag{50}$$

которые имеют место при всех натуральных n и m.

Имеют место также формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi. \tag{51}$$

Предположим, что функция $f(x)$ представима тригонометрическим рядом (47), который сходится равномерно в промежутке $[-\pi, \pi]$. Интегрируя ряд (47) почленно, согласно (50) и (51) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx \right) = \pi a_0.$$

Если умножить ряд (47) на $\cos kx$ (при фиксированном натуральном k), то получим опять равномерно сходящийся, ряд, так как его

остаток $|r_n \cos kx| \leqslant |r_n|$. Интегрируя почленно новый ряд, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx\,dx\right),$$

где опять равны нулю все члены ряда, кроме одного, соответствующего условию $n = k$. В соответствии с (51) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \pi a_k.$$

Аналогично найдем $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \pi b_k.$

Отсюда следует единственность разложения $f(x)$ в тригонометрический ряд. Коэффициенты этого ряда определяются формулами

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (52)$$

при $n = 0, 1, 2, \ldots$ и называются *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$. *Рядом Фурье функции* $f(x)$ *в промежутке* $(-\pi, \pi)$ *называется тригонометрический ряд* (46), коэффициенты которого определяются формулами (52). Следовательно, имеет место утверждение.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *разлагается в промежутке* $[-\pi, \pi]$ *в равномерно сходящийся тригонометрический ряд* (47), *то последний необходимо будет ее рядом Фурье.*

Пример 1. Функция задана равенствами $f(x) = -1$ при $-\pi < x < 0$ и $f(x) = 1$ при $0 \leqslant x < \pi$. Требуется разложить ее в ряд Фурье. Вопрос о существовании такого разложения мы пока не рассматриваем.

По формулам (52) найдем $a_n = 0$, $b_{2n} = 0$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$. Поэтому имеем

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots + \frac{1}{2n+1}\sin(2n+1) + \ldots\right]$$

Это и есть ряд Фурье данной функции в промежутке $(-\pi, \pi)$.

Ряд Фурье функции $f(x)$, заданной в промежутке $(-l, l)$, можно получить с помощью ряда (47) путем замены переменной. Величина $z = \frac{\pi x}{l}$ изменяется в промежутке $-\pi < z < \pi$.

Разложим в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, \pi)$ функцию, определяемую равенством $\varphi(z) \equiv f\left(\frac{lz}{\pi}\right)$. Получим

$$f(x) = f\left(\frac{lz}{\pi}\right) \equiv \varphi(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz). \qquad (53)$$

Возвратившись к переменной x, получим *ряд Фурье функции* $f(x)$ *в промежутке* $(-l, l)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (54)$$

Его коэффициенты определяются равенствами

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) \cos nz \, dz = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \qquad (55)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Сформулируем достаточные условия представимости функции рядом Фурье. Пусть $f(x)$ в промежутке $(-l, l)$ удовлетворяет *условиям Дирихле*; это значит, что она в этом промежутке непрерывна или кусочно-непрерывна (т. е. имеет конечное число разрывов первого ряда) и монотонна или кусочно-монотонна (т. е. промежуток можно разбить на конечное число частей, в каждом из которых функция монотонна).

Теорема Дирихле*. *Если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям Дирихле в промежутке* $[-l, l]$, *то ряд Фурье этой функции сходится во всем промежутке* $[-l, l]$ *и сумма этого ряда равна*

$f(x)$ — *в точках непрерывности функции*,

$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ — *в точке* x_0 *разрыва функции*,

$\frac{f(l - 0) + f(-l + 0)}{2}$ — *на концах промежутка.***

Пример 2. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-l, l)$ функцию $y = |x|$.

* Петр Густав Лежан-Дирихле (1805—1859) — немецкий математик.

** Доказательство теоремы см. в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. II, § 14.

Функция удовлетворяет условиям Дирихле. Ее коэффициенты Фурье вычислим по формулам (55). Данная функция четная, поэтому получим $b_n = 0$, $a_0 = l$ и

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2l}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1\ .$$

Функция $|x|$ в промежутке $(-l, l)$ может быть представлена следующим рядом Фурье:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{l} - \ldots\right). \qquad (56)$$

В соответствии с теоремой Дирихле сумма этого ряда равна $|x|$ в каждой внутренней точке промежутка $(-l, l)$, а на концах этого промежутка сумма ряда равна среднему арифметическому предельных значений функции, т. е. равна l.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье в промежутке $(-l, l)$ функцию $y = x$. Это нечетная функция. По формулам (55) получим $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = -\frac{2l}{n\pi}\cos n\pi = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Данную функцию представляет в промежутке $(-l, l)$ ее ряд Фурье

$$x = \frac{2l}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{l} - \ldots\right). \qquad (57)$$

220. Общие ортогональные системы функций. Рассмотрим последовательность функций

$$\{\varphi_n(x)\}, \qquad (58)$$

принадлежащих *классу* L_2, т. е. классу функций, определенных в промежутке (a, b) (где a и b — числа или символы $-\infty$, $+\infty$), для которых существует интеграл $\int_a^b \rho(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx$ при некоторой данной положительной в (a, b) функции $\rho(x)$, называемой *весовой функцией*.

Определение. *Скалярным произведением функций* $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ с весом $\rho(x)$ называется интеграл

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_a^b \rho(x)\,\varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx. \qquad (59)$$

Этот интеграл имеет смысл, так как $|\varphi_n\varphi_m| \leqslant \frac{1}{2}(\varphi_n^2 + \varphi_m^2)$.

Очевидно, скалярное произведение функций обладает такими свойствами: 1°. $(\varphi, \psi) = (\psi, \varphi)$, 2°. $(c\,\varphi, \psi) = c\,(\varphi, \psi)$, 3°. $(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = (\varphi_1\,\psi) + (\varphi_2, \psi)$.

Нормой функции $\varphi_n(x)$ называется число, равное арифметическому значению корня квадратного из скалярного произведения $\varphi_n(x)$ на $\varphi_n(x)$:

$$\|\varphi_n(x)\| = \sqrt{(\varphi_n, \varphi_n)}. \qquad (60)$$

Функция $\varphi_n(x)$ называется *нормированной*, если ее норма равна единице: $\|\varphi_n(x)\| = 1$.

Функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ называются *ортогональными в промежутке* (a, b) *с весом* $\rho(x)$, *если равно нулю их скалярное произведение*: $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$.

Система функций (58) *называется ортогональной в* (a, b), если все эти функции попарно ортогональны, и *ортонормированной*, если указанные функции, кроме того, нормированы.

Если система (58) ортонормирована, то

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 0 \text{ при } n \neq m, \\ 1 \text{ при } n = m. \end{cases} \qquad (61)$$

Пример. Система тригонометрических функций

$$\{1, \cos nx, \sin nx\} \quad n=1,2,\ldots \qquad (62)$$

ортогональна в промежутке $(-\pi, \pi)$ с весом $\rho = 1$, так как при $n \neq m$ выполнено условие $(\varphi_n, \varphi_m) = 0$ (см. п. 219). Однако функции (62) не нормированы, так как отличны от единицы интегралы (51) п. 219. Для того чтобы нормировать семейство функций (62), надо разделить функции этого множества на соответствующие постоянные, и мы получим ортонормированную систему функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}.$$

Теорема 1. *Всякую ортогональную систему функций можно нормировать.*

Действительно, пусть (58) есть ортогональная система функций. Если каждую функцию этого семейства разделить на ее норму, то получим систему $\left\{\frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|}\right\}$, которая ортонормирована, потому что

$$\left(\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}, \frac{\varphi_m}{\|\varphi_m\|}\right) = \frac{1}{\|\varphi_n\| \cdot \|\varphi_m\|}(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}.$$

Теорема 2. *Всякую систему линейно независимых в* (a, b) *функций можно ортогонализировать.*

Пусть функции системы (58) линейно независимы в том смысле что любая их линейная комбинация $\alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x)$ обращается в нуль тождественно в (a, b) лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Процесс ортогонализации последовательности функций (58) заключается в том, что каждую функцию множества (58) заменяют такой линейной комбинацией исходных функций, чтобы новая

система функций получалась ортогональной. Докажем возможность такого процесса ортогонализации. Для этого положим

$$\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_2 = \lambda_{21}\psi_1 + \varphi_2,\ \psi_3 = \lambda_{31}\psi_1 + \lambda_{32}\psi_2 + \varphi_3,\ \ldots,$$

$$\psi_n = \lambda_{n1}\psi_1 + \lambda_{n2}\psi_2 + \ldots + \lambda_{nn-1}\psi_{n-1} + \varphi_n,\ \ldots$$

и выберем коэффициенты λ_{ik} так, чтобы выполнилось условие ортогональности семейства функций $\{\psi_n(x)\}$.

Требование $(\psi_2, \psi_1) = 0$ или $\lambda_{21}(\varphi_1, \varphi_1) + (\varphi_2, \varphi_1) = 0$ будет выполнено, если положить $\lambda_{21} = -(\varphi_2, \varphi_1)/(\varphi_1, \varphi_1)$.

В соответствии с методом полной математической индукции предположим, что функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ попарно ортогональны и соответствующие λ_{ik} уже выбраны. Требование $(\psi_n, \psi_k) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$ или

$$(\psi_n, \psi_k) = \lambda_{n1}(\psi_1, \psi_k) + \ldots + \lambda_{nk}(\psi_k, \psi_k) + \ldots +$$

$$+\lambda_{nn-1}(\psi_{n-1}, \psi_k) + (\varphi_n, \psi_k) = \lambda_{nk}(\psi_k, \psi_k) + (\varphi_n, \psi_k) = 0$$

будет выполнено, если положить $\lambda_{nk} = -(\varphi_n, \psi_k)/(\psi_k, \psi_k)$.

Здесь существенно, что функции системы (58) линейно независимы, и поэтому никакая их линейная комбинация (в которой не все коэффициенты равны нулю), в частности ψ_k, не равна тождественно нулю в (a, b) и, следовательно, $(\psi_k, \psi_k) \neq 0$. Теорема 2 доказана.

Системы ортогональных полиномов. Осуществим процесс ортогонализации, описанный при доказательстве теоремы 2 применительно к множеству степеней $\{x^n\}$ с натуральным показателем n в промежутке (a, b) при весовой функции $\rho(x)$ Очевидно, любая линейная комбинация функций этого семейства, содержащая конечное число членов, есть полином, и в результате ортогонализации будет получено семейство полиномов, ортогональных в (a, b). В зависимости от выбора промежутка (a, b) и весовой функции $\rho(x)$ таким образом приходим к системам ортогональных полиномов, приведенных в таблице на стр. 382.

В последнем столбце приведено дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет* соответствующий полином.

221. Обобщенные ряды Фурье. Дана ортогональная в промежутке (a, b) система функций (58). Рассмотрим функцию $f(x)$ из класса L_2, которая может быть представлена** в (a, b) в виде ряда по системе функций (58)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \qquad (63)$$

с постоянными коэффициентами c_n.

---

* См. работу В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. III.

** Достаточные условия представимости функции в виде ряда (63) см., например, в книге А. Н. Тихонова и А. А. Самарского «Уравнения математической физики». М., «Наука», 1966, с. 621.

a	b	$\rho(x)$	Название полинома	Обозначение полинома	Дифференциальное уравнение
-1	$+1$	1	Лежандра *	$P_n(x)$	$(1-x^2)y''-2xy'+$ $+n(n+1)y=0$
-1	$+1$	$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$	Чебышева	$T_n(x)$	$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$
-1	$+1$	$(1-x)^{\alpha}\times$ $\times(1+x)^{\beta}$	Якоби	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-$ $-(\alpha+\beta+2)x]y'+$ $+n(n+\alpha+\beta+1)y=0$
0	$+\infty$	e^{-x}	Чебышева — Лягерра	$L_n(x)$	
0	$+\infty$	$x^{\alpha}e^{-x}$	Обобщенные полиномы Лягерра	$L_n^{(\alpha)}(x)$	$xy''+(\alpha-x-1)y'+ny=$ $=0$
$-\infty$	$+\infty$	e^{-x^2}	Чебышева — Эрмита	$H_n(x)$	$y''-2xy'+2ny=0$

Теорема единственности. *Если $f(x)$ допускает представление вида* (63), *то такое представление единственно.*

Докажем, что коэффициенты ряда (63) определяются однозначно при дополнительном предположении о возможности почленного интегрирования ряда, который получается из (63) умножением на $\rho(x)\varphi_k(x)$. Действительно, в результате такого умножения, а затем интегрирования ряда получим равенство

$$(f, \varphi_k)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(\varphi_n, \varphi_k)=c_k(\varphi_k, \varphi_k),$$

из которого следует, что

$$c_k=\frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}. \tag{64}$$

Коэффициенты ряда (63), определяемые формулами (64), называются *обобщенными коэффициентами Фурье*, а сам ряд (63) с такими коэффициентами называется *обобщенным рядом Фурье функции $f(x)$ по системе функций* (58). Если (58) есть система тригонометрических функций (62), то имеем частный случай ряда (63) — ряд Фурье (см. п. 219).

Пусть данная система функций (58) ортонормирована в (a, b). Функция $\alpha_1\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_n\varphi_n(x)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — постоянные коэффициенты, называется *обобщенным полиномом порядка n.*

О п р е д е л е н и е. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу L_2, причем a и b суть числа. *Средним квадратичным укло-*

* Андриан Мари Лежандр (1752—1833)— французский математик.

нением между функциями $f(x)$ *и* $g(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ называется число δ, определяемое равенством

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \rho(x)\,[f(x)-g(x)]^2\,dx}. \tag{65}$$

Постановка задачи *о приближении* $f(x)$ *в среднем в промежутке* $[a, b]$ *при помощи обобщенного полинома* n*-го порядка* заключается в следующем: среди обобщенных полиномов n-го порядка путем выбора коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ найти имеющий наименьшее среднее квадратичное уклонение в $[a, b]$ от данной функции $f(x)$, т. е. достигающий своего абсолютного минимума величина

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b \rho(x)\,[f(x)-\alpha_1\varphi_1(x)-\ldots-\alpha_n\varphi_n(x)]^2\,dx}. \tag{66}$$

Для решения этой задачи рассмотрим постоянную $(b-a)\,\delta_n^2$ и, воспользовавшись обозначением (59), преобразуем ее:

$$(b-a)\,\delta_n^2 = (f-\sum\alpha_k\varphi_k,\ f-\sum\alpha_k\varphi_k) = (f, f) - 2\sum\alpha_k(f, \varphi_k) + \\ + \sum\alpha_k\alpha_l(\varphi_k, \varphi_l) = (f, f) - 2\sum\alpha_k c_k + \sum\alpha_k^2$$

к следующему виду:

$$(b-a)\,\delta_n^2 = (f, f) - \sum c_k^2 + \sum(c_k-\alpha_k)^2, \tag{67}$$

где суммирование всюду выполнено по k от 1 до n.

Правая часть равенства (67) имеет наименьшее значение, равное

$$(b-a)\,\delta_{n\,\min}^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \tag{68}$$

при условии, что $\alpha_k = c_k$, т. е. когда коэффициентами α_k обобщенного полинома служат обобщенные коэффициенты Фурье c_k. Таким образом, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема. *Из всех обобщенных полиномов* $\alpha_1\varphi_1(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x)$ *наименьшее среднее квадратичное уклонение от* $f(x)$ *в промежутке* $[a, b]$ *имеет* n*-я частичная сумма обобщенного ряда Фурье* (63).

В частности, если исходной является система тригонометрических функций (62), то среди всех тригонометрических полиномов порядка n

$$\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx)$$

наименьшее среднее квадратичное уклонение от $f(x)$ в $[-\pi, \pi]$ имеет отрезок ее ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_n\cos kx + b_n\sin kx).$$

В этом состоит так называемое *минимальное свойство коэффициентов Фурье.*

Из доказанной теоремы вытекают важные следствия. Левая часть равенства (68) неотрицательна, поэтому при любом n имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant (f, f), \tag{69}$$

правая часть которого не зависит от n. Отсюда следует сходимость положительного ряда $\sum_{1}^{\infty} c_k^2$ (см. п. 209) и стремление к нулю при $k \to \infty$ обобщенного коэффициента Фурье $\lim c_k = 0$.

Если в неравенстве (69) перейти к пределу при $n \to \infty$, то придем к неравенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b \rho(x) f^2(x)\, dx, \tag{70}$$

называемому *неравенством Бесселя**.

В теории приближения функций в среднем возникает важный вопрос: можно ли путем увеличения n добиться сколь угодно малого среднего квадратичного уклонения $\delta_{n\,\min}$, т. е. стремится ли $\delta_{n\,\min}$ к нулю при $n \to \infty$?. Для того чтобы имело место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \delta_{n\,\min} = 0, \tag{71}$$

как это следует из (68), н е о б х о д и м о и д о с т а т о ч н о, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = (f, f), \tag{72}$$

называемое *уравнением замкнутости*, или *формулой Парсеваля.*

Ряд $\sum_{1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *называется с х о д я щ и м с я в с р е д н е м к функции* $f(x)$ *в промежутке* (a, b) *при весовой функции* $\rho(x)$, если выполнено условие (71). В силу (66) это условие равносильно следующему:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \rho(x)\,[f(x) - s_n(x)]^2\, dx = 0, \tag{73}$$

где $s_n(x)$ есть n-я частичная сумма ряда (63).

Заметим, что выполнение условия (73) не означает «точечной» сходимости ряда (63) к $f(x)$ в (a, b) в обычном смысле.

---

* Фридрих Вильгельм Бессель (1784—1846) — немецкий астроном и математик.

Уравнение замкнутости (72) *есть необходимое и достаточное условие сходимости ряда* (63) *в среднем к функции* $f(x)$ *в промежутке* (a, b). Действительно, условия (71), (72) и (73) равносильны.

Ортонормированную систему функций $\{\varphi_n(x)\}$ называют *замкнутой в классе* L_2, если уравнение замкнутости (72) выполняется для каждой функции $f(x)$ из класса L_2.

Ортонормированную систему функций $\{\varphi_n(x)\}$ называют *полной в классе* L_2, если в L_2 не существует функции, отличной от нуля, ортогональной ко всем функциям этого семейства.

Можно доказать, что понятия замкнутости и полноты равносильны, т. е. из замкнутости вытекает полнота, а из полноты — замкнутость.

Действительно, пусть система функций (58) замкнута в классе функций L_2, и пусть $\omega(x)$ функция из этого класса, ортогональная ко всем функциям семейства (58), т. е. при всех натуральных значениях n выполняется равенство $(\omega, \varphi_n) = 0$. Тогда согласно формуле (64) будут равны нулю все обобщенные коэффициенты Фурье функции $\omega(x)$ по системе функций (58). Поэтому из уравнения замкнутости (72) следует, что функция $\omega(x)$ тождественно равна нулю в промежутке (a, b). Таким образом, доказано, что только функция, равная нулю тождественно в (a, b), может быть ортогональной ко всем функциям системы (58), если эта система замкнута. Поэтому замкнутая в классе L_2 система функций (58) полна в этом классе.

Доказательство замкнутости полной системы ортонормированных функций содержится, например, в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», том II, стр. 468.

Глава XIII

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 37. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

222. Общие сведения о дифференциальных уравнениях. *Дифференциальным уравнением относительно некоторой функции* называется уравнение, связывающее эту функцию с ее независимыми переменными и с ее производными. *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной этой функции, входящей в уравнение. Дифференциальное уравнение относительно функции о д н о й независимой переменной называется *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

П р и м е р. Уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)\,y = 0$$

есть обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $y\,(x)$.

Дифференциальное уравнение относительно функции нескольких переменных называется *уравнением с частными производными*, особый класс которых составляют *уравнения математической физики.* К ним относится, например, уравнение Лаплас

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$$

В этой главе рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения; независимая переменная предполагается вещественной. Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если искомая функция и ее производные входят в уравнение в первых

степенях и не перемножаются. Важную роль играют линейные уравнения второго порядка

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = f(x). \qquad (2)$$

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция

$$y = \varphi(x) \quad (a < x < b), \qquad (3)$$

определенная и непрерывная вместе со своими производными до порядка n включительно, которая этому уравнению удовлетворяет:

$$\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Иногда решение $y = \varphi(x)$ находят в неявном виде: $\psi(x, y) = 0$. Это равенство определяет функцию $\varphi(x)$, являющуюся решением уравнения. В этом случае функция $\psi(x, y)$ может быть названа *интегралом уравнения*.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его интегрированием.

В отличие от алгебраического уравнения, решением которого является число, дифференциальное уравнение имеет своим решением функцию. Оказывается, что дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, семейство решений, зависящее от параметров $c_1, c_2, \ldots$, число которых равно порядку дифференциального уравнения:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n). \qquad (4)$$

Такое решение уравнения (1), содержащее n произвольных постоянных, есть *общее решение этого уравнения*. Строгое определение этого понятия дано в пп. 224 и 226.

Например, уравнение $y'' + 4y = 0$ имеет общее решение $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$. Эта функция обращает данное уравнение в тождество при любых значениях c_1 и c_2.

Всякое решение, которое можно получить из общего решения путем фиксирования произвольных постоянных, называется *частным решением* этого уравнения.

Иногда общее решение уравнения (1) мы получаем в неявном виде:

$$\psi(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0. \qquad (5)$$

223. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Многие задачи науки и техники приводят к дифференциальным уравнениям. Мы встретили их в пп. 18, 35, 150 и др. Рассмотрим еще три задачи из различных областей науки.

1. Задача о движении тела в среде с сопротивлением. Требуется найти закон движения тела, перемещающегося прямолинейно вдоль оси Ox, при условии, что среда оказывает сопротивление,

пропорциональное первой степени скорости. Согласно второму закону Ньютона, произведение массы тела m на ускорение x'' равно сумме всех действующих сил:

$$mx'' = -kx', \tag{6}$$

где k — положительная постоянная; $x(t)$ — путь, пройденный телом к моменту времени t. Равенство (6) связывает первую и вторую производные искомой функции $x(t)$; оно представляет пример дифференциального уравнения. Легко проверить, что уравнению (6) удовлетворяет функция

$$x(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{k}{m}t} \tag{7}$$

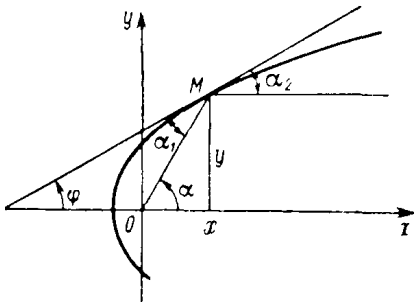

Рис. 149.

при любых значениях постоянных c_1 и c_2. Функция (7) есть общее решение уравнения (6).

Если заданы значения $x = x_0$ и $x' = v_0$, соответствующие моменту времени $t = 0$, то, подставив эти данные в выражения $x(t)$ и $x'(t)$, получим $x_0 = c_1 + c_2$, $v_0 = -kc_2/m$. Поэтому $c_1 = x_0 + mv_0/k$, $c_2 = -mv_0/k$. При таких значениях постоянных имеем окончательно

$$x(t) = x_0 + \frac{mv_0}{2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right). \tag{8}$$

Функция (8) есть так называемое решение задачи Коши для уравнения (6).

2. Задача. Найти плоскую кривую, отражающую параллельные (оси Ox) лучи в одну точку (начало координат). Требуется найти функцию $y = y(x)$, графиком которой является искомая кривая.

Имеют место следующие угловые соотношения (рис. 149): $\alpha_1 = \varphi$, $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha = \varphi + \alpha_2$. Следовательно, $\alpha = 2\varphi$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}$. Положив здесь $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$ (согласно построению) и $\operatorname{tg}\varphi = y'$, получим уравнение $yy'^2 + 2xy' - y = 0$.

Задача свелась к нахождению функции $y(x)$ по ее дифференциальному уравнению. Запишем его в виде $yy' = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Отсюда следует, что $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = x + c$ и $y^2 = 2cx + c^2$. Мы получили в неявной форме общее решение дифференциального уравнения. Геометрически это решение представляет семейство парабол, каждая из которых дает решение поставленной задачи.

3. Задача Вольтерра. Рассмотрим совместное существование двух видов, например, рыб. Обозначим количество особей первого

вида $x(t)$, второго — $y(t)$. Предположим, во-первых, что первый вид питается продуктами среды, которые всегда имеются в достаточном количестве, и, во-вторых, что если бы первый вид жил один, то число его особей непрерывно увеличивалось бы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству особей: $x' = k_1 x$. Особи второго вида питаются только особями первого вида. Поэтому, если бы второй вид жил один, то он постепенно бы вымирал: $y' = -k_2 y$.

Теперь рассмотрим случай, когда оба вида живут совместно. Коэффициент увеличения первого вида будет тем меньше, чем больше y. Сделаем простейшее предположение, а именно, что коэффициент k_1 уменьшится на величину, пропорциональную y. Аналогичным образом предположим, что коэффициент уменьшения второго вида k_2 в силу наличия первого вида (наличия пищи) изменится на величину, пропорциональную x. При этих предположениях мы имеем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$x' = (k_1 - k_3 y)\, x, \quad y' = -(k_2 - k_4 x)\, y,$$

где k_1, k_2, k_3 и k_4 — положительные числа. Можно доказать, что в этом случае изменение численности обоих видов происходит по периодическому закону.

Заметим, что к системе уравнений этого же вида приводят некоторые задачи кинетики химических процессов.

Рассмотренные задачи иллюстрируют следующую важную мысль о значении дифференциальных уравнений. В естествознании при нахождении зависимости, например между x и y, часто бывает легче установить зависимость между скоростью изменения величины y или ее ускорением и другими параметрами явления, нежели непосредственно связать x и y. Таким образом, прежде составляют дифференциальное уравнение, а затем получают его решение, оно и дает искомую зависимость $y(x)$. В частности, второй закон Ньютона механики можно выразить дифференциальным уравнением $my'' = f(x, y, y')$. Значение этого уравнения состоит в том, что оно позволяет свести физическую задачу определения движения тела к математической задаче нахождения решения дифференциального уравнения.

224. Основные понятия. Пусть дано уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x, y), \tag{9}$$

где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области A переменных x и y. Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение этого уравнения в промежутке (a, b).

Геометрическая интерпретация уравнения (9) и его решения $y = \varphi(x)$ заключается в следующем. График функции $\varphi(x)$ имеет в каждой своей точке касательную (потому что φ имеет производную), угол наклона которой обозначим через α. В каждой

точке $M(x, y)$ интегральной кривой величины x, y и $\operatorname{tg}\alpha$ имеют определенные значения, которые согласно равенству (9) связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y). \tag{10}$$

Следовательно, *дифференциальное уравнение* (9) *выражает зависимость между координатами каждой точки M интегральной кривой и угловым коэффициентом ее касательной в точке M.*

Равенство (10) определяет в каждой точке $M(x, y)$ области A вектор (например, единичной длины), имеющий направление $k = \operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$. Множество таких векторов образует *поле направлений* уравнения (9). Всякая интегральная кривая этого уравнения обладает свойством: *направление ее касательной совпадает с направлением поля в соответствующей точке.* Задача интегрирования дифференциального уравнения (9) геометрически состоит в нахождении кривых, касающихся векторов поля во всех своих точках.

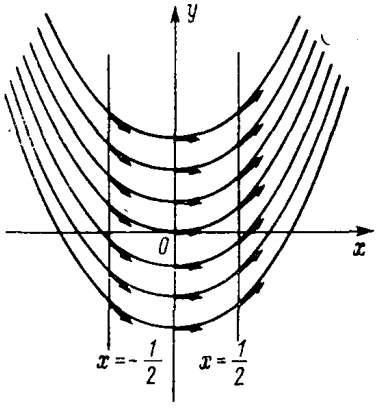

Рис. 150.

Пример 1. $y' = 2x$. Поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 2x$. В частности, при $x = -1/2$ имеем $\alpha = -\pi/4$, при $x = 0$ имеем $\alpha = 0$, при $x = 1/2$ $\alpha = \pi/4$ (рис. 150). Интегральные кривые образуют семейство парабол $y = x^2 + c$.

Задача Коши для уравнения (9) заключается в том, чтобы найти решение данного уравнения, удовлетворяющее условию

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \tag{11}$$

Данные числа x_0 и y_0 называются *начальными данными* задачи Коши, а условие (11) — *начальным условием* задачи Коши. Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой уравнения (9), проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Пример 2. Пусть дано уравнение: $y' = \cos x$ и точка M_0 (0, 1). Решение соответствующей этим условиям задачи Коши состоит в нахождении общего решения $y = \sin x + c$ и определении значения величины c по начальным условиям $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Путем подстановки этих данных в общее решение находим $c = 1$. Решением задачи Коши является функция $y = \sin x + 1$. Такова схема решения задачи Коши и в общем случае.

Возникает естественный вопрос — сколько интегральных кривых уравнения (9) проходит через данную точку области A. Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема (о существовании и единственности решения уравнения первого порядка) *. *Пусть дано уравнение* (9) *и B — область,*

* Доказательство см. в работе А. С. Понтрягина «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Физматгиз, 1961.

в которой функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ определены и непрерывны. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — любая точка области B. Тогда существует, и притом единственное, решение уравнения (9)

$$y = \varphi(x), \tag{12}$$

определенное в некоторой окрестности точки x_0 и удовлетворяющее начальному условию (11).

Пример 3. Дано уравнение

$$y' = 2\sqrt{y}. \tag{13}$$

Его правая часть $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ непрерывна при условии $y \geqslant 0$, т. е. в верхней полуплоскости, включая ось абсцисс (область A). Функция $f'_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$ непрерывна при $\sqrt{y} > 0$, т. е. в верхней полуплоскости, исключая ось абсцисс (область B).

Для интегрирования данного уравнения приведем его к виду $d\sqrt{y} = dx$; отсюда следует его общее решение $\sqrt{y} = x + c$.

Общее решение геометрически представляет семейство полупарабол (так как $\sqrt{y} > 0$), зависящее от параметра c. Через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ области B проходит единственная интегральная кривая (рис. 151) $\sqrt{y} = \sqrt{y_0} + x - x_0$. Уравнение (13) имеет решение $y = 0$, в чем можно убедиться прямой проверкой. Это решение не получается из общего решения ни при каком значении постоянной c. Оно называется особым решением. Геометрически это решение есть граница области B — ось абсцисс.

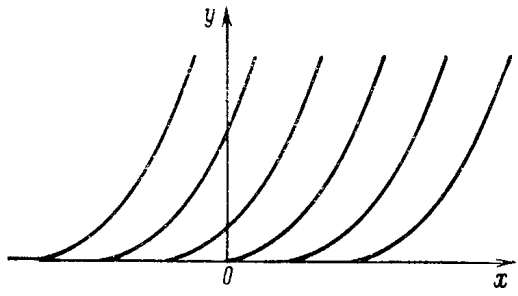

Рис. 151.

Рассмотрим уравнение (9). Пусть B — некоторая область плоскости (x, y), через каждую точку которой проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (9).

Общим решением дифференциального уравнения (9) в области B называется функция

$$y = \varphi(x, c), \tag{14}$$

1) представляющая решение уравнения (9) при всех значениях произвольной постоянной c (из некоторого множества), 2) дающая решение задачи Коши с любыми начальными данными (x_0, y_0) из области B при соответствующем значении $c = c_0$.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение этого уравнения, которое получается из общего решения при фиксированном значении величины c. Для получения частного решения, соответствующего начальным условиям (11), достаточно подставить начальные данные x_0 и y_0 соответственно вместо x и y в равенство (14), найти $c = c_0$ и положить $c = c_0$ в (14).

Решение дифференциального уравнения (9) называется *особым*, если оно не может быть получено из (14) ни при каком постоянном

значении c. Отсюда следует, что интегральная кривая, соответствующая особому решению, проходит вне области единственности решения задачи Коши.

Пример 4. Уравнение $yy' = \sqrt{a^2 - y^2}$ можно записать в виде $d\sqrt{a^2 - y^2} = -dx$. Отсюда следует общее решение $\sqrt{a^2 - y^2} = c - x$, определяющее семейство полуокружностей (так как $c > x$) с радиусом a с центром в точке $(c, 0)$. Через каждую точку полосы $-a < y < a$ проходит единственная полуокружность (рис. 152). Данное уравнение имеет два особых решения $y = \pm a$, геометрически представляющие две прямые, касающиеся упомянутых полуокружностей. Эти прямые являются огибающими семейства полуокружностей.

В общем случае *огибающей семейства кривых*, зависящих от одного параметра, называется линия, которая в каждой своей точке имеет общую касательную с линией семейства, проходящей через эту точку.

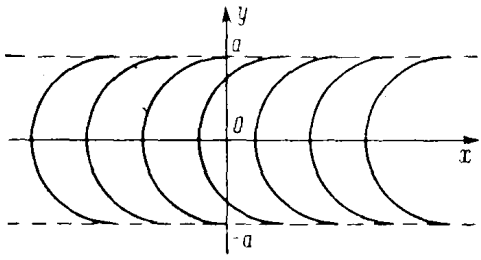

Рис. 152.

225. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка. Здесь рассмотрены способы интегрирования простейших дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$y' = p(x)\, q(x), \tag{15}$$

где $p(x)$ и $q(y)$ — данные функции, определенные и непрерывные соответственно в промежутках: $a < x < b$ и $c < y < d$, причем $q(y) \neq 0$. В результате умножения равенства (15) на $dx/q(y)$ получается уравнение *с разделенными* переменными

$$dy/q(y) = p(x)\, dx.$$

Интегрируя, получаем общее решение уравнения (15) в неявном виде

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)\, dx + c. \tag{16}$$

Примечания общего характера. 1. В теории дифференциальных уравнений символом $\int f(x)\, dx$ обозначают одну из первообразных функций $f(x)$, а не все их множество. 2. Дифференциальное уравнение теоретически считается проинтегрированным, если решение доведено до квадратур, т. е. до операций вычисления первообразных. В частности, задача интегрирования уравнения (15) в форме (16) может считаться завершенной.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y' = 2x(1 + y^2)$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{1+y^2} = 2x\, dx$. Интегрируя это уравнение, найдем общее решение $\operatorname{arctg} y = x^2 + c$.

Пример 2. Дано уравнение $y' = -\frac{x}{y}$. Запишем его в виде $x\,dx + y\,dy = 0$ и, интегрируя, получим общий интеграл $x^2 + y^2 = c^2$, представляющий геометрически семейство окружностей с центром в начале координат.

Пример 3. Данное уравнение $y' = -\frac{y}{x}$ запишем в виде $-\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ и, интегрируя, получим общий интеграл $xy = c$, представляющий семейство гипербол, для которых оси координат являются асимптотами.

Пример 4. Уравнение $y' = \frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ имеет общее решение: $y = cx$, представляющее семейство полупрямых, исходящих из начала координат.

Пусть дано уравнение $y' = f(x)$, где $f(x)$ непрерывна в (a, b). Требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (11), где x_0 принадлежит (a, b). Интегрируя данное уравнение, получим

$$y = \int f(t)\,dt + c.$$

Заменим здесь неопределенный интеграл интегралом с переменным верхним пределом

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c.$$

При $x = x_0$ первое слагаемое правой части обращается в нуль и, чтобы удовлетворить условию (11), надо положить $c = y_0$. Таким образом, наше уравнение при условии (11) имеет в промежутке (a, b) единственное решение задачи Коши

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

Линейное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{17}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции, непрерывные в промежутке (a, b).

Метод Бернулли* интегрирования линейного уравнения состоит в том, что решение отыскивается в виде произведения двух функций $y = u(x)\,v(x)$, одна из которых может быть выбрана произвольно. Если в уравнение (17) подставить $y = uv$, то получим равенство $u'v + u(v' + pv) = q$. Положим $v' + pv = 0$, тогда $v(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$. Поэтому $u'v = q$ и $u(x) = c + \int qe^{\int p\,dx}dx$. Произведение u на v дает общее решение уравнения (17)

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[c + \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{18}$$

---

* Иоган Бернулли (1667—1748) — швейцарский математик.

Метод вариации произвольной постоянной, связанный с именем Лагранжа, * применительно к уравнению (7) заключается в следующем. Рассмотрим вместо (17) соответствующее однородное уравнение $z' + p(x)\, z = 0$, общее решение которого

$$z(x) = ce^{-\int p(x)\,dx} \tag{19}$$

содержит произвольную постоянную c.

Решение неоднородного уравнения (17) отыскивается в форме (19), понимая под c некоторую функцию x. Такое решение существует. Действительно, если в уравнении (17) положить

$$y = c(x)\, e^{-\int p(x)\,dx}, \tag{20}$$

то получим равенство $c' = q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$, из которого следует, что

$$c(x) = C + \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx,$$

где C — произвольная постоянная. Теперь из (20) следует выражение общего решения уравнения (17) в форме (18).

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = 2x \cos x$. Соответствующее однородное уравнение $z' + z \operatorname{tg} x = 0$ имеет общее решение $z(x) = c \cos x$. В соответствии с методом Лагранжа ищем общее решение данного уравнения в виде произведения $y = c(x) \cos x$. Функция $c(x)$ удовлетворяет уравнению $c' = 2x$. Поэтому $c(x) = x^2 + C$ и данное уравнение имеет общее решение $y = (x^2 + C) \cos x$, где C — произвольная постоянная.

Уравнение в полных дифференциалах имеет вид

$$p(x,\ y)\, dx + q(x,\ y)\, dy = 0, \tag{21}$$

где функции $p(x, y)$ и $q(x, y)$ в некоторой области B непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют условию $p^2 + q^2 > 0$ и

$$p'_y = q'_x. \tag{22}$$

Как известно из теории поля, левая часть уравнения (21) при условии (22) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в области B, т. е. имеет место тождество $p\,dx + q\,dy = du$. Поэтому уравнение (21) можно записать в виде $du = 0$, а его общее решение можно представить равенством

$$u(x,\ y) = c, \quad \text{где } u(x,\ y) = \int\limits_{M_0 M} P\,dx + Q\,dy \tag{23}$$

(M_0 и M — точки области B), причем криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования.

Пример 6. Уравнение $y \cos x\,dx + \sin x\,dy = 0$ запишем в виде $d(y \sin x) = 0$. Отсюда следует его общее решение $y \sin x = c$.

Замечание об интегрирующем множителе. Если уравнение (21) не является уравнением в полных дифференциалах, но становится таковым после

* Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) — французский математик и механик.

умножения на некоторый множитель $\mu(x, y)$, то функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем* уравнения (21).

Пример 7. Дано уравнение $ydx - xdy = 0$. Условие (22) здесь нарушено. Однако если умножить данное уравнение на функцию $\mu = x^{-2}$, то получим уравнение в полных дифференциалах $(ydx - xdy)\,x^{-2} = 0$ или $d(y/x) = 0$, общее решение которого есть $y = cx$.

§ 38. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

226. Определения. Случаи понижения порядка. Дано дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{n-1}), \tag{1}$$

правая часть которого рассматривается как функция $n+1$-й независимой переменной, определенная и непрерывная в некоторой области $n+1$-мерного пространства A_{n+1}.

Решением уравнения (1) в промежутке (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, определенная, n раз дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (1) в (a, b).

Задача Коши для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ формулируется следующим образом: требуется найти решение уравнения, удовлетворяющее *начальным условиям* $y = y_0$, $y' = y_0'$ при $x = x_0$, где x_0, y_0, y_0' — данные числа, называемые *начальными данными задачи Коши*. Геометрическое содержание задачи Коши состоит в том, что требуется выбрать из множества интегральных кривых, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0)$, ту кривую, которая имеет данный угловой коэффициент y_0'.

Механический смысл задачи Коши для уравнения $s'' = f(t, s, s')$ состоит в нахождении закона движения $s(t)$ при условии, что в данный момент $t = t_0$ движущаяся точка имеет данное отклонение $s = s_0$ и данную скорость $v_0 = s_0'$.

Пример 1. Найти решение уравнения $y'' = 6x$, удовлетворяющее начальным условиям: при $x_0 = 0$ $y = y_0 = 0$, $y' = y_0' = 1$. Интегрируя данное уравнение по x последовательно два раза, получим $y' = 3x^2 + c_1$, а затем $y = x^3 + c_1x + c_2$. При $x = 0$ имеем $c_1 = 1$ и $c_2 = 0$. При этих значениях постоянных c_1 и c_2 общее решение дает решение задачи Коши $y = x^3 + x$.

Задача Коши для уравнения (1) состоит в нахождении решения этого уравнения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0,\quad y' = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0, \tag{2}$$

где данные числа x_0, y_0, y_0', $\ldots$, $y_0^{(n-1)}$ суть координаты точки M_0 области A_{n+1}.

Возникает вопрос об условиях существования и единственности решения задачи Коши. Ответ на этот вопрос составляет содержание следующего утверждения (на доказательстве которого мы не останавливаемся).

Теорема. *Пусть дано уравнение* (1), *и пусть* B_{n+1} — *область* $n+1$-*мерного пространства, где определены и непрерывны функции* f, f'_y, $f'_{y'}$, . . ., $f'_{y^{(n-1)}}$, *аргументы которых рассматриваются как независимые переменные. Тогда каковы бы ни были начальные данные из области* B_{n+1}, *существует в некоторой окрестности* x_0 *и притом единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям* (2).

Следствие. Линейное уравнение 2-го порядка

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = f_1(x) \tag{3}$$

с непрерывными в промежутке (a, b) коэффициентами $p(x)$, $q(x)$ и правой частью $f_1(x)$ имеет единственное решение задачи Коши с начальными данными из области $a < x < b$, $|y| < \infty$, $|y'| < \infty$. Действительно, в этой области определены и непрерывны функции $f = f_1(x) - p(x)\,y' - q(x)\,y$, $f'_y = -q$, $f'_{y'} = -p$. Поэтому в указанной области выполнены условия теоремы для уравнения (3), и, следовательно, имеет место заключение этой теоремы. Аналогичное заключение верно для линейного уравнения любого порядка.

Пусть в области B_{n+1} выполнены условия теоремы для уравнения (1). *Общим решением уравнения* (1) *в области* B_{n+1} называется функция

$$y = \varphi(x,\ c_1,\ \ldots,\ c_n), \tag{4}$$

определенная в некоторой области D своих аргументов, представляющая решение уравнения (1) при всех значениях произвольных постоянных c_1, . . ., c_n из области D и дающая решение задачи Коши с любыми начальными данными из области B_{n+1} при соответствующих значениях величин $c_1 = c_{10}$, . . ., $c_n = c_{n0}$.

Схема решения задачи Коши для уравнения (1) при условии (2) состоит в последовательном выполнении следующих действий: находят общее решение уравнения (1), дифференцируют это решение $n-1$ раз, подставляют в формулу общего решения и его производных начальные данные согласно условию (2). Решают полученную систему относительно c_1, . . ., c_n (система эта имеет единственное решение c_{10}, c_{20}, . . ., c_{n0}, что следует из определения общего решения). Общее решение при $c_1 = c_{10}$, . . ., $c_n = c_{n0}$ дает решение задачи Коши.

Частным решением уравнения называется такое его решение, которое может быть получено из общего решения при фиксированных значениях величин c_1, . . ., c_n.

Рассмотрим три типа дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающих понижение порядка.

I. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{5}$$

с непрерывной в промежутке (a, b) правой частью может быть интегрировано последовательно. В результате получим общее решение уравнения (5)

$$y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)\,dx = c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' = \cos x$. Интегрируя его последовательно два раза, получим $y' = \sin x + c_1$ и общее решение данного уравнения $y = -\cos x + c_1 x + c_2$.

II. Уравнение, не содержащее явно y и младших производных

$$y^{(n)} = f(x,\ y^{(k)},\ \ldots,\ y^{(n-1)})\ (k \leqslant n-1), \tag{6}$$

допускает понижение порядка на k единиц. Для этого введем новую искомую функцию $z = y^{(k)}$. Тогда $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и уравнение относительно $z(x)$ будет порядка $n-k$: $z^{(n-k)} = f(x, z, z', \ldots, z^{(n-k-1)})$.

Если найдено общее решение этого уравнения $z(x) = \varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$, то для $y(x)$ имеем уравнение $y^{(k)} = \varphi(x, c_1, \ldots, c_{n-k})$. Интегрируя его, найдем общее решение уравнения (6).

III. Уравнение, не содержащее независимой переменной x,

$$y^{(n)} = f(y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \tag{7}$$

допускает понижение порядка на одну единицу. Для этого примем y за независимую переменную, а $y' = p$ — за искомую функцию. Выразим производные y по x через производные p по y. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = p'_x = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p,$$
$$y'''_{xxx} = (y''_{xx})'_x = (p' \cdot p)'_y \cdot y'_x = p''p^2 + pp'^2.$$

Подобным образом производная k-го порядка от y по x будет выражена через производные от p по y порядка $k-1$ и ниже. Подставляя найденные выражения производных в уравнение (7), получим уравнение порядка $n-1$ относительно $p(y)$

$$p^{(n-1)} = f_1(y,\ p,\ p',\ \ldots,\ p^{(n-2)}).$$

Если найдено его общее решение $p(y) = \varphi(y, c_1, \ldots, c_{n-1})$, то для определения общего решения уравнения (7) имеем уравнение с разделяющимися переменными $y'_x = \varphi(y, c_1, \ldots, c_{n-1})$.

Пример 3. Общее решение уравнения $y'' = y$ можно получить либо описанным только что способом, либо следующим преобразованием. Умножив обе части данного уравнения на $2y'$, получим уравнение $2y'y'' = 2yy'$, которое можно записать в виде $(y'^2)' = (y^2)'$. Отсюда следует равенство $y'^2 = y^2 + c$. Интегрируя последнее, найдем $\ln(y + \sqrt{y^2 + c}) = x + c_1$.

227. Линейные дифференциальные уравнения. *Линейным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\,y' + p_n(x)\,y = f(x), \tag{8}$$

где коэффициенты $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны в промежутке (a, b). Если $f(x) \equiv 0$ в этом промежутке, то уравнение называется *однородным*:

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x) y = 0. \qquad (9)$$

Из теоремы п. 226 следует, что уравнение (8) имеет единственное решение задачи Коши с начальными условиями (2), где $a < x < b$ и $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — произвольные числа.

Введем понятие линейного дифференциального оператора. Обозначим левую часть уравнения (8) через $L[y]$:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y. \qquad (10)$$

Таким образом, $L[y]$ есть результат выполнения над функцией y операций, указанных в правой части равенства (10), а именно операции вычисления производных функции $y(x)$ до порядка n включительно, операции умножения величин $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y$ соответственно на $1, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и операции сложения полученных произведений. Совокупность этих действий обозначим символом

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x) \qquad (11)$$

и назовем *линейным дифференциальным оператором*, соответствующим уравнению (8). Общее понятие оператора дано в п. 7.

Линейный дифференциальный оператор L обладает следующими основными с в о й с т в а м и.

1°. *Постоянный множитель можно вынести за знак оператора*

$$L[cy] = cL[y]. \qquad (12)$$

2°. *Оператор от суммы двух функций равен сумме операторов от слагаемых*

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]. \qquad (13)$$

Действительно, с помощью (11) получаем, например, (12):

$$L[cy] = (cy)^{(n)} + \ldots + p_n(cy) = c[y^{(n)} + \ldots + p_n y] = cL[y].$$

Из основных свойств оператора L следует, что

$$L[c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n] = c_1 L[y_1] + \ldots + c_n L[y_n], \qquad (14)$$

т. е. оператор от *линейной комбинации функций* (так называют сумму $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$) равен соответствующей линейной комбинации операторов от этих функций.

С помощью линейного дифференциального оператора L можно записать уравнение (8) в виде $L[y] = f(x)$, а соответствующее однородное уравнение можно представить равенством $L[y] = 0$.

228. Линейные однородные уравнения. Пусть дано уравнение (9).

Решения линейного однородного дифференциального уравнения обладают следующими свойствами.

1°. Если $y_1(x)$ есть решение уравнения (9), то произведение cy_1, где c — произвольная постоянная, тоже является решением этого уравнения. Действительно, если $L[y_1] \equiv 0$ в (a, b), то согласно (12) имеем $L[cy_1] = cL[y_1] \equiv 0$ в (a, b).

2°. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (9), то их сумма $y_1(x) + y_2(x)$ тоже является решением этого уравнения. Действительно, если $L[y_1] \equiv 0$ и $L[y_2] \equiv 0$, то согласно (13) имеем $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] \equiv 0$ в (a, b).

3°. Если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — решения уравнения (9), то их линейная комбинация с произвольными коэффициентами $c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ тоже является решением этого уравнения. Действительно, согласно (14) имеем

$$L[c_1y_1 + \ldots + c_ny_n] = c_1L[y_1] + \ldots + c_nL[y_n] \equiv 0 \quad \text{в } (a, b).$$

Введем понятие линейной зависимости функций. Пусть в промежутке (a, b) дано семейство функций

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x). \tag{15}$$

Функции (15) называются *линейно-зависимыми в промежутке* (a, b), если существует система постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, из которых не все равны нулю, такая, что равна нулю тождественно относительно x в промежутке (a, b) линейная комбинация этих функций

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0. \tag{16}$$

В этом случае среди функций семейства (15) имеются такие, которые являются линейными комбинациями остальных. Так, если

$$\alpha_n \neq 0, \text{ то } \varphi_n(x) = -\alpha_1\varphi_1/\alpha_n - \ldots - \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}/\alpha_n.$$

Функции (15) называются *линейно-независимыми в промежутке* (a, b), если тождество (16) может иметь место только при условии $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. В этом случае ни одна из функций семейства (15) не является линейной комбинацией остальных. Действительно, если бы это было не так, то функции (15) были бы линейно-зависимы.

Следовательно, если одна из функций (15) тождественно равна нулю, то эти функции линейно-зависимы. Действительно, если, например, $\varphi_1(x) \equiv 0$ в (a, b), то имеет место тождество (16) при $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Поэтому, если функции (15) линейно-независимы, то ни одна из этих функций не равна нулю тождественно в (a, b).

Если n функций (15) линейно-независимы, то никакая частичная совокупность функций этого семейства не может состоять из линейно-зависимых функций. Действительно, если были бы зависимы, например, функции φ_1 и φ_2, то были бы зависимы и все функции этого семейства, потому что из условия $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \equiv 0$ следует $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_n\varphi_n \equiv 0$ при $\alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Для случая двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ понятие линейной зависимости в промежутке (a, b) сводится к выполнению условия — отношение этих функций есть величина постоянная в (a, b): $\varphi_1/\varphi_2 \equiv c$. Линейная независимость функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в (a, b) означает, что их отношение не равно тождественно какой-либо постоянной в (a, b). Например, функции $\sin x$ и $\cos x$ линейно-независимы в промежутке $(0, \pi)$.

Пусть функции (15) имеют производные $n-1$-го порядка.

Определителем Вронского *, *или вронскианом системы функций* (15), называется следующий определитель:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{17}$$

Рассмотрим семейство решений линейного однородного дифференциального уравнения (9) в (a, b)

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \dots,\ y_n(x). \tag{18}$$

Теорема 1. *Для любого семейства решений* (18) *уравнения* (9) *имеет место формула Лиувилля* ** *— Остроградского*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}, \tag{19}$$

где x_0 *и* x *— любые точки промежутка* (a, b); $W(x_0)$ *— значение вронскиана в точке* x_0; $p_1(x)$ *— коэффициент уравнения* (9).

Доказательство теоремы приведено ниже для уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = 0. \tag{20}$$

В этом случае $W = y_1y_2' - y_2y_1'$ и $W' = y_1y_2'' - y_2y_1''$. Здесь y_1 и y_2 — решения уравнения (20) и поэтому

$$W' = y_1(-p_1y_2' - p_2y_2) - y_2(-p_1y_1' - p_2y_1) = -p_1W.$$

Следовательно, функция W удовлетворяет уравнению с разделяющимися переменными $W' = -p_1(x)\,W$. Если $W(x) \neq 0$ в (a, b), то, интегрируя последнее равенство, получим

$$\ln W - \ln c = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx; \quad W(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}. \tag{21}$$

Путем прямой проверки легко убедиться, что функция (21) удовлетворяет уравнению $W' = -pW$; предположение $W \neq 0$

* Юзеф Вронский (1776—1853) — польский математик.

** Жозеф Лиувилль (1809—1882) — французский математик.

не требуется. При $x = x_0$ найдем $c = W(x_0)$ и из (21) следует формула (19). Теорема доказана.

Следствие. Из формулы (19) непосредственно следует, что вронскиан *или тождественно равен нулю в промежутке* (a, b):

$$W(x) \equiv 0, \tag{22}$$

или он не равен нулю ни при одном значении x *из* (a, b):

$$W(x) \neq 0. \tag{23}$$

Первый случай имеет место, если хотя бы в одной точке x_0 промежутка (a, b) вронскиан равен нулю: $W(x_0) = 0$. Второй — если хотя бы в одной точке x_0 промежутка (a, b) вронскиан отличен от нуля: $W(x_0) \neq 0$, потому что показательная функция в нуль не обращается.

Теорема 2. *Равенство нулю вронскиана семейства решений* (18) *уравнения* (9) $W(x) \equiv 0$ *есть необходимое и достаточное условие линейной зависимости этих решений.*

Доказательство необходимости в случае $n = 2$. Пусть y_1 и y_2 — линейно-зависимые решения уравнения (20). Тогда $y_2 = cy_1$ и $W = y_1y_2' - y_2y_1' = cy_1y_1' - cy_1y_1' \equiv 0$.

Доказательство достаточности в случае $n = 2$. Пусть y_1 и y_2 — ненулевые решения уравнения (20) и $W = y_1y_2' - y_2y_1' \equiv 0$. Фиксируем точку x_0 промежутка (a, b), в которой $y_1(x_0) \neq 0$. Тогда $y_2(x_0) \neq 0$. Действительно, если $y_2(x_0) = 0$, то из условия $W(x_0) = 0$ следует, что $y_2'(x_0) = 0$ и в силу теоремы единственности $y_2(x) \equiv 0$, что противоречит условию.

Тождество (22) можно записать в виде равенства $y_2'/y_2 = y_1'/y_2$, интегрируя которое по x в промежутке (x_0, x) получим

$$\ln y_2(x) = \ln y_1(x) + \ln c,$$

где постоянная $c_1 = y_2(x_0)/y_1(x_0)$ отлична от нуля. Поэтому решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно-зависимы: $y_2 = cy_1$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы решения* (18) *уравнения* (9) *были линейно-независимы в промежутке* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы определитель* $W(x)$ *не обращался в нуль ни при одном значении* x *из* (a, b), *т. е. чтобы выполнялось условие* (23).

Необходимость. Пусть решения (18) линейно-независимы в (a, b). Требуется доказать, что выполнено условие (23). Рассуждая от противного, предположим, что в некоторой точке x_0 промежутка (a, b) вронскиан примет нулевое значение. Тогда в силу формулы (19) имеет место тождество (22) и по теореме 2 решения (18) линейно-зависимы, что противоречит условию. Следовательно, условие (23) выполнено.

Достаточность. Пусть выполнено условие (23). Нужно доказать линейную независимость решений (18). Рассуждая опять от противного, предположим, что функции (18) линейно-

зависимы. Тогда по теореме 2 выполнено равенство (22), которое противоречит условию (23). Поэтому решения (18) линейно-независимы. Теорема доказана.

Фундаментальной системой решений однородного уравнения (9) называется любое семейство линейно-независимых в (a, b) решений этого уравнения $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . ., $y_n(x)$. Например, функции $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'' + y = 0$.

Из теоремы 3 непосредственно следует необходимое и достаточное условие фундаментальности системы решений (18) уравнения (9). Оно состоит в том, чтобы вронскиан этого семейства решений был отличен от нуля по крайней мере в одной из точек промежутка (a, b).

Следовательно, любые n решений задачи Коши для уравнения (9), начальные данные которых таковы, что $W(x_0) \neq 0$, образуют фундаментальную систему решений.

Теорема 4 (о структуре общего решения линейного однородного уравнения). *Если функции* (18) *образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения* (9), *то линейная комбинация этих решений*

$$y = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \tag{24}$$

с произвольными постоянными $c_1, \ldots, c_n$ *есть общее решение этого уравнения в области* B: $a < x < b$, $|y| < \infty$, $|y'| < \infty$, . . ., $|y^{(n-1)}| < \infty$.

Действительно, в области B выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Покажем, что функция (24) удовлетворяет обоим условиям, указанным в определении общего решения уравнения n-го порядка (см. п. 226).

Функция (24) является решением уравнения (9) при любых фиксированных $c_1, \ldots, c_n$ как линейная комбинация решений с постоянными коэффициентами (свойство 3° решений линейно-однородного уравнения).

Пусть $y = \psi(x)$ — решение задачи Коши, соответствующее начальным данным из области B

$$\psi = y_0, \quad \psi' = y_0', \ \ldots, \ \psi^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0. \tag{25}$$

Докажем, что существует система постоянных $c_{10}, \ldots, c_{n0}$, при которых функция (24) дает $\psi(x)$, т. е.

$$c_{10} y_1(x) + \ldots + c_{n0} y_n(x) = \psi(x). \tag{26}$$

Для этого рассмотрим систему уравнений относительно $c_1, \ldots, c_n$

$$\begin{aligned} &c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) = y_0, \\ &c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) = y_0', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{27}$$

левая часть которой содержит значения функций (18) и их производных в точке x_0, а правая часть — начальные данные задачи Коши. Определитель системы (27) $W(x_0)$ отличен от нуля, потому что семейство функций (18) образует фундаментальную систему решений уравнения. Согласно теореме Крамера, система (27) имеет единственное решение; обозначим его через $c_{10}, \ldots, c_{n0}$. Линейная комбинация решений (18) $\bar{y}(x) = c_{10}y_1(x) + \ldots + c_{n0}y_n(x)$ удовлетворяет начальным условиям (25), что показывают равенства (27). Функция $\psi(x)$ тоже удовлетворяет условиям (25). Отсюда следует согласно теореме единственности решения, что $\bar{y}(x) \equiv \psi(x)$ в (a, b), т. е. имеет место тождество (26) в (a, b). Теорема доказана.

Пример. $y'' + 9y = 0$. Это уравнение второго порядка имеет следующие два линейно-независимых решения: $y_1 = \sin 3x$, $y_2 = \cos 3x$. Поэтому общее решение данного уравнения представляет их линейная комбинация с произвольными коэффициентами $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$.

229. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \tag{28}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n$. Если $n = 2$, то уравнение имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{29}$$

Остановимся пока на этом уравнении. Следуя Эйлеру, отыскиваются частные решения вида

$$y = e^{\lambda x}, \tag{30}$$

где λ — подлежащая определению постоянная.

Положим в уравнении (29) $y = e^{\lambda x}$, получим

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Следовательно, λ есть корень квадратного уравнения

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \tag{31}$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (29). Уравнение (31) можно составить непосредственно по данному уравнению (29). Корни уравнения (31) могут быть различными или одинаковыми, вещественными или комплексными в зависимости от значения величины $p^2/4 - q$.

Случай 1. Если квадратное уравнение (31) имеет два различных вещественных корня λ_1 и λ_2, то по формуле (30) получим два линейно-независимых решения, линейная комбинация которых

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} \tag{32}$$

с произвольными постоянными c_1 и c_2 есть согласно теореме 4 общее решение уравнения (29).

Пример 1. Дано уравнение $y'' - a^2y = 0$ $(a \neq 0)$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 - a^2 = 0$ имеет различные вещественные корни $\lambda_1 = a$ и $\lambda_2 = -a$. Поэтому общее решение уравнения

$$y = c_1e^{ax} + c_2e^{-ax}.$$

Пример 2. Дано уравнение $y'' + py' = 0$, где $p \neq 0$. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + p\lambda = 0$ имеет различные вещественные корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -p$. Поэтому общее решение представляет функция $y = c_1 + c_2e^{-px}$.

Случай 2. Если квадратное уравнение (31) имеет различные комплексные корни λ_1 и λ_2, то соответствующие решения (30) получатся опять линейно-независимыми, но также комплексными. Известно, что у полиномов с вещественными коэффициентами комплексные корни встречаются сопряженными парами (см. п. 56). *Коэффициенты p и q уравнения (29) вещественны, поэтому, если* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, то $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Решения (30) в этом случае можно представить с помощью формул Эйлера в виде

$$y_{1,2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \pm ie^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{33}$$

Производная комплексной функции вещественной переменной $u(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$ определяется формулой $u' = \varphi' + i\psi'$. Отсюда следует, что $u'' = \varphi'' + i\psi''$.

Лемма. *Если $y = \varphi(x) + i\psi(x)$ есть решение линейного однородного уравнения* (28), *то вещественные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ также являются решениями этого уравнения.*

Доказательство. Используя свойства линейного дифференциального оператора, равенство $L[y] = 0$ можно записать в виде $L[\varphi] + iL[\psi] = 0$. Отсюда следует, что $L[\varphi] = 0$ и $L[\psi] = 0$. Лемма доказана.

Следовательно, вместе с величинами (33) решениями уравнения (29) будут вещественные функции

$$\varphi(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } \psi(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{34}$$

Их отношение непостоянно, поэтому функции (34) линейно-независимы. Уравнение (29) в случае 2 имеет общее решение

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x). \tag{35}$$

Пример 3. Дано уравнение $y'' + \beta^2y = 0$, называемое уравнением гармонического осциллятора. Его характеристическое уравнение $\lambda^2 + \beta^2 = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda = \pm\beta i$. Данное уравнение имеет общее решение $y = c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x$, представляющее периодическую функцию.

Случай 3. Если характеристическое уравнение (31) имеет одинаковые корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2}$, то частные решения (30),

соответствующие этим корням, совпадают и не образуют фундаментальной системы решений.

В случае 3 решением уравнения (29) является функция $y_3 = xe^{\lambda_1 x}$. Убедимся в этом прямой проверкой. Положим в уравнении (29) $y = y_3$, получим

$$e^{\lambda_1 x}[(2\lambda_1 + \beta) + x(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)] = 0.$$

Здесь $2\lambda_1 + p = 0$ и $\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$. Поэтому функция y_3 есть решение уравнения (28), линейно не зависящее от y_1, так как отношение y_3 к y_1 непостоянно. Функции y_1 и y_3 образуют фундаментальную систему решений, и уравнение (28) имеет в случае 3 общее решение

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda_1 x}. \tag{36}$$

Пример 4. Уравнению $y'' - 2y' + y = 0$ соответствует характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, имеющее равные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Данное уравнение имеет общее решение $y = (c_1 + c_2 x) e^x$.

Результаты, полученные при рассмотрении уравнения второго порядка (29), допускают обобщение на случай уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами. Сформулируем его в виде правила.

Правило нахождения общего решения линейного однородного уравнения (29) любого порядка с постоянными коэффициентами.

1. Составим соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

и найдем его корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

2. Составим частные решения, соответствующие найденным корням: каждому простому вещественному корню λ соответствует решение $y = e^{\lambda x}$, каждому k-кратному вещественному корню λ соответствует k решений $y_1 = e^{\lambda x}$, $y_2 = xe^{\lambda x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$, каждой паре простых комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствует два решения $y_1 = e^{\alpha x}\cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin \beta x$, каждой k-кратной паре комплексных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствует $2k$ решений:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos \beta x, \quad y_2 = xy_1, \ \ldots, \quad y_k = x^{k-1}y_1,$$

$$y_{-1} = e^{\alpha x}\sin \beta x, \quad y_{-2} = xy_{-1}, \ \ldots, \ y_{-k} = x^{k-1}y_{-1}.$$

3. Линейная комбинация всех этих решений с произвольными постоянными коэффициентами есть общее решение уравнения (28).

Пример 5. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $(\lambda - 1)^4 = 0$ имеет корень $\lambda_1 = 1$ кратности 4. Поэтому общее решение уравнения имеет вид $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^x$.

Пример 6. Дано уравнение $y''' - 3y'' + y' - 3y = 0$. Его характеристическое уравнение $(\lambda - 3)(\lambda^2 + 1) = 0$ имеет корень $\lambda_1 = 3$ кратности $k = 1$ и одну пару комплексно-сопряженных корней $\lambda_{2,3} = \pm i$. Поэтому общее решение данного уравнения $y = c_1 e^{3x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

230. Линейные неоднородные уравнения. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение n-го порядка (8) $L[y] = f(x)$, коэффициенты которого $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны в промежутке (a, b).

Пусть семейство функций $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ представляет фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$. Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами

$$z = c_1 z_1(x) + \ldots + c_n z_n(x) \tag{37}$$

согласно теореме 4 п. 228 представляет общее решение однородного уравнения (9).

Теорема 5 (о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения). *Пусть дано неоднородное уравнение* (8). *Сумма общего решения соответствующего однородного уравнения* (9) *и какого-либо частного решения* $y_1(x)$ *неоднородного уравнения* (8)

$$y = c_1 z_1(x) + \ldots + c_n z_n(x) + y_1(x) \tag{38}$$

есть общее решение уравнения (8).

Доказательство. Функция (38) есть решение уравнения (8) при любых значениях произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_n$, потому что

$$L[c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n + y_1] = L[c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n] + L[y_1] = f(x),$$

так как $L[c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n] = 0$ и $L[y_1] = f(x)$.

Любое решение задачи Коши $\psi(x)$ уравнения (8) можно получить из множества решений (38) при соответствующих значениях постоянных $c_1, \ldots, c_n$. Действительно, по условию $L[\psi] = f(x)$. Функция $\psi(x) - y_1(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (9), потому что $L[\psi - y_1] = L[\psi] - L[y_1] \equiv 0$ в промежутке (a, b).

Согласно теореме 4 п. 228 любое решение задачи Коши уравнения (9) и, в частности, $\psi(x) - y_1(x)$ можно получить из общего решения (37) этого уравнения при соответствующих значениях постоянных c_k: $\psi(x) - y_1(x) = c_{10} z_1(x) + \ldots + c_{n0} z_n(x)$. Следовательно, $\psi(x) = c_{10} z_1(x) + \ldots + c_{n0} z_n(x) + y_1(x)$. Теорема доказана.

Пример. Дано уравнение $y'' + 4y = 8x$. Соответствующее ему однородное уравнение $z'' + 4z = 0$ имеет общее решение $z = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Данное неоднородное уравнение имеет частное решение $y_1(x) = 2x$, в чем можно убедиться прямой проверкой. Поэтому имеем общее решение данного уравнения $y = 2x + c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

Теорема 6. *Если* $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *являются частными решениями соответственно уравнений* $L[y] = f_1(x)$ *и* $L[y] = f_2(x)$, *то* $y_1(x) + y_2(x)$ *есть решение уравнения* $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$.

Действительно, по условию $L[y_1] = f_1(x)$, $L[y_2] = f_2(x)$. Следовательно, $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$.

231. Метод нахождения частных решений линейных неоднородных уравнений. Для составления общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $L[y] = f(x)$ согласно теореме 6 надо знать частное решение этого уравнения.

Метод неопределенных коэффициентов можно рекомендовать для нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{39}$$

с постоянными вещественными коэффициентами в случае, когда $f(x)$ имеет специальный вид.

Случай I. Пусть правая часть уравнения (39) имеет вид

$$f(x) = P_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{40}$$

где $P_m(x)$ — данный полином степени m (в частности, это может постоянная). Тогда уравнение (39) имеет * частное решение вида

$$y_1(x) = x^k Q_m(x)\, e^{\alpha x}, \tag{41}$$

где $Q_m(x)$ — многочлен степени m, а k — кратность корня α характеристического уравнения ($k = 0$, если α не является корнем характеристического уравнения). Коэффициенты искомого полинома $Q_m(x)$ можно найти путем подстановки выражения (41) в данное дифференциальное уравнение.

Пример 1. Найти частное решение уравнения $y'' - y = 3x^2$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$, отличные от числа $\alpha = 0$. Поэтому ищем частное решение вида $y = ax^2 + bx + c$. Находим $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$. Подставив эти выражения в данное уравнение, получим $2a - ax^2 - bx - c = 3x^2$. Следовательно, $2a - c = 0$, $b = 0$, $-a = 3$. Поэтому данное уравнение имеет частное решение $y_1 = -3x^2 - 6$.

Случай II. Если правая часть уравнения (39) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x], \tag{42}$$

где $P_m(x)$ и $Q_m(x)$ — полиномы относительно x степени m (один из них может иметь степень меньшую или далее равняться нулю тождественно), то уравнение (39) имеет * частное решение вида

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x}[\tilde{P}_m(x)\cos\beta x + \tilde{Q}_m(x)\sin\beta x], \tag{43}$$

где $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ — искомые полиномы степени m, а k — кратность пары корней $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения. Если $\alpha \pm \beta i$ не являются корнями характеристического уравнения, то в формуле (43) надо положить $k = 0$. Если в (42) один из полиномов $P_m(x)$ или $Q_m(x)$ степени меньшей m или тождественно

* Доказательство существования такого решения см. в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. II.

равен нулю, то в формулу (43) должны войти оба многочлена $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ степени m.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \cos x$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda = \pm i$. Правая часть данного уравнения имеет вид (42) при $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $P_m = 1$, $Q_m = 0$. Числа $\alpha \pm \beta i = \pm i$ являются простыми корнями характеристического уравнения, поэтому $k = 1$. Частное решение данного уравнения ищем согласно (43) вида $y_1 = (a \cos x + b \sin x)\, x$. Находим $y_1' = a \cos x + b \sin x + x(-a \sin x + b \cos x)$, $y_2' = -2a \sin x + 2b \cos x - x(a \cos x + b \sin x)$. Подставив y_1 в уравнение, получим равенство $-2a \sin x + 2b \cos x = \cos x$, из которого найдем: $a = 0$, $b = 1/2$. Поэтому $y_1 = x/2 \cdot \sin x$. Данное уравнение имеет общее решение $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (x \sin x)/2$.

§ 39. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

232. Общие вопросы. Пусть дано дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Желая получить решение уравнения на интегрирующем устройстве (например, электронном моделирующем устройстве), надо составить соответствующую систему дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого примем величины $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ за новые неизвестные функции, соответственно положив $y' = y_1$, $y'' = y_2, \ldots, y^{n-1} = y_{n-1}$. Переменные $x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ связаны согласно (1) зависимостями

$$y' = y_1, \quad y_1' = y_2, \ \ldots, \ y_{n-2}' = y_{n-1}, \quad y_{n-1}' = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{2}$$

Мы получили систему n дифференциальных уравнений, каждое первого порядка, относительно неизвестных функций $y(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$. Первая из функций этого семейства $y(x)$ есть вместе с тем решение уравнения (1).

Рассмотрим систему более общего вида:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{3}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — искомые функции независимой переменной x, а правые части — данные функции переменных $x, y_1, \ldots, y_n$, определенные и непрерывные в некоторой области A_{n+1}. Совокупность равенств (3) называется *нормальной системой* дифференциальных уравнений.

Решением системы (3) *в промежутке* (a, b) называется семейство функций

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \tag{4}$$

определенных, непрерывно дифференцируемых и удовлетворяющих системе (3), т. е. обращающих все уравнения (3) в тождества относительно x в промежутке (a, b).

Если $n = 1$, то система (3) содержит только одно уравнение $y' = f(x, y)$ и ее решение $y(x)$ определяет интегральную кривую в плоскости (x, y). Если $n = 2$, то имеем систему двух уравнений $y' = f_1(x, y, z)$, $z' = f_2(x, y, z)$ и ее решение $y = y(x)$, $z = z(x)$ определяет кривую в трехмерном пространстве (x, y, z). При $n \geqslant 2$ решение системы (3) геометрически представляет кривую в $n+1$-мерном пространстве; она называется *интегральной кривой системы* (3).

Задача Коши для системы (3) состоит в нахождении решения этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1 = y_{10}, \quad y_2 = y_{20}, \ \ldots, \ y_n = y_{n0} \text{ при } x = x_0, \tag{5}$$

где $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ — данные числа. Геометрически это значит найти интегральную кривую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ области A_{n+1}.

Сформулируем теорему, содержащую достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для системы (3).

Теорема. *Если правые части системы* (3) *непрерывны и имеют непрерывные производные по переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *в некоторой области* B_{n+1}, *то для любой точки* $M_0(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ *области* B_{n+1} *существует, и притом единственное, решение*

$$y_1 = \varphi_1(x), \ \ldots, \ y_n = \varphi_n(x), \tag{6}$$

удовлетворяющее условиям (5), *определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности точки* x_0.

Рассмотрим нормальную систему линейных уравнений

$$y_i' = p_{i1}y_1 + \ldots + p_{in}y_n + f_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

коэффициенты которой $p_{ik}(x)$ и правые части $f_i(x)$ определены и непрерывны в промежутке (a, b).

Условия теоремы для системы (7) выполнены в области B_{n+1}, определяемой неравенствами $a < x < b$, $|y_1| < \infty, \ldots, |y_n| < \infty$.

Пусть B_{n+1} — некоторая область, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности для системы (3).

Общим решением системы уравнений (3) в области B_{n+1} называется семейство функций

$$y_i = \varphi_i(x, c_1, \ldots, c_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

1) представляющее в промежутке (a, b) решение системы (3) при всех значениях произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_n$ (из некоторой области D изменения этих величин), 2) дающее решение задачи Коши с любыми начальными данными из области B_{n+1} при соответствующих значениях постоянных $c_1, \ldots, c_n$.

Согласно этому определению система равенств (8) разрешима относительно $c_1, \ldots, c_n$, и это решение представляет семейство функций $c_k = \psi_k\ (x, y_1, \ldots, y_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, определенных в области B_{n+1}; область изменения этих функций и есть упомянутая выше область D.

Частным решением системы (3) называется решение этой системы, которое можно получить из общего решения при каких-либо значениях произвольных постоянных $c_1, \ldots, c_n$.

Пример. Найти решение задачи Коши для системы $y'_x = z$, $z'_x = -y$ при условии $x_0 = 0$, $y = y_0 = 1$, $z = z_0 = 2$.

Данную систему можно привести к уравнению второго порядка $y'' + y = 0$, потому что $y'' = z' = -y$. Это уравнение имеет общее решение $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Поэтому данная система имеет общее решение $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $z = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$. Согласно начальным условиям имеем $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ и искомое решение задачи Коши есть $y = \cos x + 2 \sin x$, $z = 2 \cos x - \sin x$.

233. Способы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим некоторые способы интегрирования нормальных систем дифференциальных уравнений. *Метод составления интегрируемых комбинаций* ниже иллюстрируется примером.

Пример 1. Найти общее решение системы $y' = \dfrac{z}{z-y}$, $z' = \dfrac{y}{z-y}$. Разделив первое уравнение на второе, получим уравнение с разделяющимися переменными $y' = \dfrac{z}{y}$, из которого следует равенство $y^2 - z^2 = c_1$. Вычитая второе уравнение данной системы из первого, получим вторую интегрируемую комбинацию $(y - z)' = 1$. Поэтому $y - z = x + c_2$. Отсюда следует равенство $y + z = \dfrac{c_1}{x + c_2}$, которое позволяет найти общее решение системы

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{c_2 + x} + c_2 + x\right), \quad z = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{c_2 + x} - c_2 - x\right).$$

Метод исключения неизвестных приводит к уравнению высшего порядка для отдельных неизвестных функций системы. Иллюстрируем его примером.

Пример 2. Найти общее решение системы $y' = y + z + 2$, $z' = -y - z$. Желая исключить переменную z из системы, дифференцируем первое уравнение системы. Получим $y'' = y' + z'$ и с помощью второго уравнения имеем $y'' = y' - y - z$. Остается заменить здесь z согласно равенству $z = y' - y - 2$. Таким образом, получим уравнение второго порядка $y'' = 2$, которое имеет общее решение $y = x^2 + c_1 x + c_2$. Поэтому $z = -x^2 + (2 - c_1)\, x + c_1 - c_2 - 2$. Найденные y и z образуют общее решение данной системы.

Способ Эйлера. Пусть дана нормальная линейная однородная система с постоянными вещественными коэффициентами

$$y'_k = a_{k1} y_1 + \ldots + a_{kn} y_n \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Ищем решение вида

$$y_k = \alpha_k e^{\lambda x} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

с неопределенными постоянными параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и λ. Для определения этих величин и выяснения вопроса о существовании у системы (9) решения указанного вида подставим в (9) вместо y_k правые части равенств (10). После сокращения обеих частей на $e^{\lambda x}$ получим алгебраическую систему уравнений относительно α_k и λ

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = 0,\\
&a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для того чтобы однородная линейная относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ система (11) имела решение, отличное от нулевого, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю (см. п. 250); т. е. чтобы имело место равенство

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) называется *характеристическим уравнением системы* (9). Заметим, что это уравнение можно составить непосредственно с помощью матрицы коэффициентов системы (9). Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни этого уравнения.

Система (11) при $\lambda = \lambda_k$, где $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет некоторое решение, обозначим его $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kn}$. Таким образом, каждому числу λ_k соответствует решение системы (9)

$$y_{k1} = \alpha_{k1} e^{\lambda_k x}, \ldots, y_{kn} = \alpha_{kn} e^{\lambda_k x}. \tag{13}$$

Можно доказать, что линейная комбинация этих решений (в случае, когда все λ_k различны)

$$y_s = c_1 \alpha_{1s} e^{\lambda_1 x} + \ldots + c_n \alpha_{ns} e^{\lambda_n x} \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

с произвольными постоянными $c_1, \ldots, c_n$ представляет о б щ е е р е ш е н и е системы (9).

П р и м е р 3. Найти общее решение системы $y' = 2y + z$, $z' = y + 2z$. Характеристическое уравнение системы

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

имеет два корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Система (76) в нашем случае имеет вид $(2 - \lambda)\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + (2 - \lambda)\alpha_2 = 0$. При $\lambda = 1$ имеем $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$;

выберем $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = -1$. При $\lambda = 3$ имеем $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$; выберем $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$. Согласно (79) общее решение данной системы имеет вид

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad z = -c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

234. Некоторые методы интегрирования дифференциальных уравнений. Познакомимся сначала с приближенным методом Эйлера интегрирования уравнения первого порядка.

I. *Метод ломаных Эйлера.* Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{15}$$

и поставлено начальное условие $y = y_0$ при $x = x_0$. Предположим, что функция $f(x, y)$ и начальные данные x_0, y_0 таковы, что уравнение (15) имеет единственное решение $y(x)$, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

Требуется найти значение Y решения (15) при $x = X$. Разделим промежуток $[x_0, X]$ на $n + 1$ частей произвольными точками деления $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через точку $M_0(x_0, y_0)$ проведем луч с угловым коэффициентом $y'_0 = f(x_0, y_0)$ до пересечения его с прямой $x = x_1$ в точке $M_1(x_1, y_1)$. Ординату точки M_1 вычислим по формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

Через точку $M_1(x_1, y_1)$ проведем луч с угловым коэффициентом $y'_1 = f(x_1, y_1)$ до пересечения с прямой $x = x_2$ в точке $M_2(x_2, y_2)$. Ординату точки M_2 вычислим по формуле $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$. Таким образом последовательно найдем y_1, y_2, y_3, $\ldots$, y_n и Y.

II. *Интегрирование с помощью степенных рядов* рассмотрим для уравнения второго порядка вида

$$a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = f(x). \tag{16}$$

Теорема.* *Пусть коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и свободный член $f(x)$ уравнения (16) в окрестности $|x - x_0| < h$ точки x_0 представимы рядами по степеням $x - x_0$, причем $a_0(x_0) \neq 0$. Тогда уравнение (16) имеет решение, удовлетворяющее условию $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = x_0$ для любых фиксированных y_0 и y'_0, и это решение может быть представлено в промежутке $|x - x_0| < h$ степенным рядом*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n. \tag{17}$$

Для нахождения коэффициентов b_n разложим в ряды по сте-

* Доказательство см. в работе В. И. Смирнова «Курс высшей математики», т. II, § 4.

пеням $x - x_0$ функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$. Для простоты записи ниже положим $x_0 = 0$. В этом случае получим

$$a_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_1(x) = \sum_{0}^{\infty} p_n x_n,$$
$$a_2(x) = \sum_{0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n. \tag{18}$$

Подставив эти разложения и ряд (17) в уравнение (16), получим тождество

$$\left(\sum_{0}^{\infty} a_n x^n\right)\left[\sum_{2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}\right] + \left(\sum_{0}^{\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{1}^{\infty} n b_n x^{n-1}\right) +$$
$$+ \left(\sum_{0}^{\infty} q_n x^n\right) \sum_{0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{0}^{\infty} c_n x^n.$$

Путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях равенства придем к системе уравнений относительно искомых коэффициентов b_k

$$\begin{aligned}
&x^0: \quad a_0 2 \cdot 1 \cdot b_2 + p_0 b_1 + q_0 b_0 + q_0 b_0 = c_0,\\
&x: \quad a_0 3 \cdot 2 \cdot b_3 + a_1 2 \cdot 1 \cdot b_2 + p_0 2 b_2 + p_1 b_1 + q_0 b_1 + q_1 b_0 = c_1, \qquad (19)\\
&\ldots \quad \ldots \ldots \ldots \ldots\\
&x^s: \quad a_0 (s+2)(s+1) b_{s+2} + \varphi(b_0, b_1, \ldots, b_{s+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Каждое последующее уравнение системы (19) содержит одним искомым коэффициентом больше предыдущего. Коэффициенты b_0 и b_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных. Первое из уравнений (19) дает b_2, второе дает b_3 и т. д., и вообще из $s+1$-го уравнения можно определить b_{s+2}, зная предыдущие b_0, b_1, . . ., b_{s+1}.

Заметим, что подобным образом можно интегрировать нелинейные уравнения.

Пример 1. Найти решение уравнения Эйри $y'' - xy = 0$, удовлетворяющее условию $y_0 = 1$, $y_0' = 0$ при $x_0 = 0$. Подставим ряд (17) (при $x_0 = 0$) в данное уравнение, получим равенство

$$2b_2 + 3 \cdot 2 \cdot b_3 x + 4 \cdot 3 \cdot b_4 x^2 + \ldots - x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots) = 0,$$

из которого путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x следуют соотношения

$$2b_2 = 0, \; 3 \cdot 2 b_3 - b_0 = 0, \; \ldots, \; (n+2)(n+1) b_{n+2} - b_{n-1} = 0, \; \ldots$$

Положив $b_0 = 1$ и $b_1 = 0$, найдем

$$b_{3k-2} = b_{3k-1} = 0, \; b_{3k} = \frac{1}{(3k)!} 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3k-2).$$

Искомое решение задачи Коши при всех x представляет ряд

$$y(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3k-2)}{(3k)!}x.$$

Пример 2. Найти решение уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0 \quad (p=\text{const}). \tag{20}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде так называемого *обобщенного степенного ряда*, т. е. в виде произведения некоторой степени x на степенной ряд:

$$y=x^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, \tag{21}$$

где $a_0\neq 0$. Найдем производные

$$y'=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)\,a_kx^{\rho+k-1}, \quad y''=\sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)(\rho+k-1)\,a_kx^{\rho+k-2}$$

и подставим в уравнение (20) вместо y, y' и y'' соответствующие ряды. Получим тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(\rho+k)(\rho+k-1)+(\rho+k)]\,a_kx^{\rho+k}+(x^2-p^2)\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{\rho+k}=0.$$

Приравняем нулю коэффициенты при x в степени ρ, $\rho+1$, $\rho+2$ и т. д.; получим систему уравнений

$$(\rho^2-p^2)a_0=0, \quad [(\rho+1)^2-p^2]a_1=0,$$

$$[(\rho+2)^2-p^2]a_2+a_0=0, \ \ldots, \ [(\rho+k)^2-p^2]a_k+a_{k-2}=0, \ \ldots \tag{22}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что $\rho^2-p^2=0$, т. е. $\rho=p$ и $\rho=-p$.

Пусть $\rho=p$ и $p>0$. Из системы (22) последовательно определяются a_1, a_2, a_3, ...; a_0 остается произвольным. Таким образом, получим

$$a_1=0, \ a_3=0 \text{ и вообще } a_{2\nu-1}=0,$$

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2p+2)}, \quad a_4=\frac{a_0}{2\cdot 4(2p+2)(2p+4)}, \ \ldots,$$

$$a_{2\nu}=\frac{(-1)^{\nu}a_0}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2\nu(2p+2)\ldots(2p+2\nu)}=\frac{(-1)^{\nu}a_0}{2^{2\nu}\cdot\nu!(p+1)\ldots(p+\nu)}.$$

Положим $a_0=\dfrac{1}{2^p\Gamma(p+1)}$, где $\Gamma(p+1)$ есть гамма-функция, рассмотренная в п. 164. Там же установлено, что $\Gamma(\nu+1)=\nu!$ и $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. Следовательно, $(p+1)(p+2)\cdots(p+\nu)\,\Gamma(p+1)=\Gamma(\nu+1+p)$.

При таком выборе постоянной a_0 система (22) имеет решение

$$a_{2\nu-1}=0, \ a_{2\nu}=\frac{(-1)^{\nu}}{2^{2\nu+p}\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1+p)}, \tag{23}$$

где $\nu=1, 2, 3, \ldots$. Подставим найденные значения коэффициентов в ряд (21), получим решение уравнения (20). Это решение называется *функцией Бесселя первого рода порядка p* и обозначается символом $J_p(x)$:

$$J_p(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+1+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+p}. \tag{24}$$

Ряд (24) сходится при всех значениях x, что легко обнаружить на основании признака Даламбера.

При $p = n$ имеем $\Gamma(\nu + 1 + p) = (\nu + n)!$ и равенство (24) дает функцию Бесселя первого рода порядка n

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,(\nu+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu+n}. \tag{25}$$

Если $p \neq n$, то, положив в (22) $\rho = -p$, так же как и выше, получим еще одно решение уравнения (20), а именно $J_{-p}(x)$. Оно определяется формулой (24), в которой надо заменить p на $-p$. Можно доказать, что функции $J_p(x)$ и $J_{-p}(x)$ линейно-независимы, если $p \neq n$. В этом случае общее решение уравнения (20) имеет вид

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x).$$

Если $p = n$, то в системе (22) обратится в нуль коэффициент при a_{2n}. Можно доказать, что в этом случае решением уравнения Бесселя, линейно-независящим от решения (25), является *функция Бесселя второго рода порядка* n, определяемая равенством

$$Y_n(x) = \lim_{p \to n} \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}.$$

В этом случае общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x).$$

Глава XIV

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предмет и задачи теории вероятностей. В основе теории вероятностей лежат объективные закономерности, присущие *массовым случайным явлениям*. Массовым называется явление, которое многократно повторяется или которое можно воспроизвести сколько угодно раз при сохранении неизменным основного комплекса условий. При этом, несмотря на постоянство основного комплекса условий, с возможной тщательностью воспроизводимых, результаты отдельных опытов всегда более или менее отличаются друг от друга; эти результаты испытывают случайное рассеивание. Однако практика показывает, что, наблюдая множество однородных явлений, в них обнаруживается определенная закономерность.

Классическим примером массового случайного явления может служить измерение, например, длины стержня, его веса или какого-либо параметра промышленного изделия при условии, что технологический процесс изготовления изделия налажен, качество исходных материалов в основном не меняется и измерения производятся одним прибором с одинаковой тщательностью. Измерения обнаруживают характерную картину случайного рассеивания результатов. Разброс результатов измерений подчиняется определенной закономерности. Эта закономерность хорошо описывается кривой Гаусса,* или так называемой нормальной кривой распределения (рис. 153). Площадь под всей кривой равна единице, площадь под дугой BC равна вероятности попадания случайного результата измерения в промежуток (b, c). Основная масса результатов будет группироваться около некоторого среднего значения a. На участке $(a - \sigma, a + \sigma)$, где σ — определенное

* Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) — немецкий математик.

для данных условий измерения положительное число, называемое средним квадратичным отклонением, содержится в среднем доля измерений, равная 68,27% от всей массы произведенных повторных измерений. В промежутке $(a - 2\sigma,\ a + 2\sigma)$ содержится 95,45% результатов всех измерений, в промежутке $(a - 3\sigma,\ a + 3\sigma)$ — 99,73%, так что за «трехсигмовые» пределы выходит лишь 0,27% всех измерений (см. п. 243).

В других условиях проведения повторных испытаний встретятся другие закономерности распределения вероятностей, но и они носят объективный характер. Математические законы теории вероятностей есть отражение реальных статистических законов, объективно существующих в массовых случайных явлениях.

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (независимо от конкретной природы этих явлений). Создателями теории вероятностей являются Блез Паскаль (1623—1662), Пьер Ферма (1601—1665), Христиан Гюйгенс (1629—1695). Фундаментальные результаты в теории вероятностей получены Я. Бернулли (1654—1705), Жозефом Луи Лапласом (1749—1827), П. Л. Чебышевым (1821—1884), А. М. Ляпуновым (1857—1918), А. А. Марковым * (1856—1922) и другими учеными.

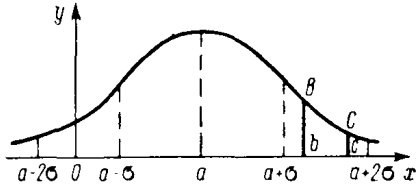

Рис. 153.

Основная задача теории вероятностей. Теория вероятностей рассматривает методы вычисления вероятностей сложных событий по известным вероятностям некоторых простейших событий (полученных из опыта или с помощью теоретической схемы). Тем самым открывается путь для анализа и выявления закономерностей вероятностей сложных случайных явлений.

Значение теории вероятностей состоит в том, что эта наука позволяет: 1) предвидеть вероятности (частоты) сложных событий при массовом повторении испытаний, т. е. осуществлять научный прогноз явлений, 2) количественно оценить влияние отдельных случайных факторов на исход испытания; тем самым появляется возможность оказать влияние на этот исход.

Методы теории вероятностей широко используются в термодинамике, статистической физике, теории автоматического регулирования, биологии и многих других науках.

Теория вероятностей не ставит задачу предвидения исхода отдельного случайного явления. Она позволяет предусмотреть средний исход массы аналогичных явлений, причем конкретный исход каждого отдельного явления остается неопределенным,

* Андрей Андреевич Марков (1856—1922) — русский математик.

случайным. Например, молекулярная теория вещества может быть только статистической теорией. Мы не в состоянии проследить за движением каждой отдельной частицы и не потому что их много (в 1 см^3 воздуха содержится $2{,}69 \cdot 10^{19}$ молекул), а потому что начальные данные движения отдельной частицы не могут быть определены бесконечно точно и действуют случайные силы, которые нельзя учесть абсолютно точно.

§ 40. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

235. Основные понятия теории вероятностей. Условимся называть *испытанием*, или *опытом*, осуществление на практике какого-нибудь комплекса условий. Результат испытания будем называть *исходом испытания*, или *событием*. Например, при стрельбе по мишени пуля может попасть в цель или не попасть. Событие в этом примере — попадание пули в цель, другое событие — промах. Опыт — стрельба по мишени.

Различают события достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания. Например: 1) подброшенная в комнате монета упадет; 2) при температуре 20° С и нормальном давлении вода находится в жидком состоянии.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не произойдет в результате испытания.

Событие называется *случайным*, если оно может произойти, но может и не произойти в результате осуществления данного комплекса условий. Например, брошенная вверх монета может упасть гербом вверх (событие A) либо гербом вниз (событие B). Случайными являются также такие события: распад данного атомного ядра, излучение фотона атомом, столкновение данных молекул, вспышка данной звезды и т. д.

Каждое случайное событие есть результат действия бесконечного множества причин.

Случайное событие может заключаться в том, что какой-либо параметр будет иметь (в результате опыта) определенное числовое значение или значение из данного промежутка. Такие величины, значение которых в результате испытания могут принимать те или другие числовые значения, называются *случайными величинами*. Например: 1) скорость данной молекулы газа в данный момент может принять любое числовое значение из некоторого промежутка $0 \leqslant v \leqslant v_{max}$; это пример так называемой *непрерывной случайной величины*; 2) момент количества движения электрона в атоме принимает строго определенные числовые значения; это пример так называемой *дискретной случайной величины*.

Некоторые величины, будучи случайными, могут иметь как непрерывный, так и дискретный спектр значений в зависимости от основного комплекса условий. Например, энергия электрона

в атоме может принимать только дискретные значения, а энергия того же электрона в свободном состоянии может принимать любые значения (из некоторого промежутка).

Случайные события $A_1, \ldots, A_n$ называются *несовместными*, если в результате каждого испытания никакие два из них не могут появиться вместе. Случайные события $A_1, \ldots, A_n$ называются *равновозможными* (или равновероятными), если из условий симметрии опыта следует, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример. Бросается игральная кость (кубик, грани которого занумерованы цифрами от 1 до 6). Когда кубик остановится, его верхней гранью может оказаться любая из шести граней. Все шесть исходов испытания несовместны, а если кость правильная (симметричная и однородная), то эти исходы будут и равновозможными.

Случайные события $A_1, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если в результате каждого испытания появится одно из них и только одно. Это значит, что события $A_1, \ldots, A_n$ несовместны, а событие (A_1, или A_2, ... или A_n) достоверно.

В рассмотренных выше иллюстративных примерах всегда можно было выделить такие события, которые не могли быть разложены на более простые: выпадение определенной грани при бросании игральной кости, появление герба или надписи при бросании монеты.

Условимся называть такие неразложимые события *элементарными событиями*, или *элементарными исходами*.

Рассмотрим испытание, в результате которого событие A может появиться или не появиться. Среди возможных исходов испытания выделим полную группу элементарных исходов. Предположим, что эти исходы равновозможны и что эта группа состоит из конечного числа элементов. Те элементарные исходы, при которых событие A наступает, назовем исходами, *благоприятствующими событию* A.

Классическое определение вероятности случайного события: *вероятностью события* A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу

$$p(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

Следовательно, если событие A достоверно, то $m = n$ и $p(A) = 1$, т. е. *вероятность достоверного события равна единице*. Если событие A невозможно, то $m = 0$ и $p(A) = 0$, т. е. *вероятность невозможного события равна нулю*. Если A — случайное событие, то $0 < m < n$ и $0 < p(A) < 1$. Вероятность любого события удовлетворяет соотношению $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.

Если число возможных исходов испытания бесконечно, а исходы равновозможны, то вводят так называемую *геометриче-*

скую вероятность. Пусть каждому исходу сопоставляется некоторая точка области ω_n, а благоприятствующим исходам — точки, лежащие в некоторой ее части ω_m. Тогда вероятность $p(A)$ попадания точки в область ω_m определяется как отношение мер (длин, площадей, объемов) этих областей, т. е.

$$p(A) = \frac{\text{мера области } \omega_m}{\text{мера области } \omega_n}.$$

Пример 1. В урне имеется 10 шаров, из них два красных, пять синих и три белых. Шары тщательно перемешаны. Требуется найти вероятность того, что вынутый наудачу шар будет цветным (событие A). Возможны следующие исходы: E_1 — вынут красный шар, E_2 — вынут синий шар, E_3 — вынут белый шар. Число всевозможных исходов равно числу шаров, т. е. десяти. Из них число исходов E_1 равно двум, E_2 — пяти, E_3 — трем.

Очевидно, что все десять исходов равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковой формы и тщательно перемешаны) и образуют полную группу событий (вынимается один и только один шар). Поэтому эти десять событий являются элементарными.

Из них лишь семь благоприятствуют событию A, именно два события E_1 и пять событий E_2. Следовательно, вероятность того, что вынутый шар окажется цветным, равна 7/10.

Пример 1а. Из урны, рассмотренной в примере 1, извлекаются сразу два шара. Требуется найти вероятность того, что вынутые шары окажутся синими.

Решение. $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$, $m = C_5^2 = 10$, $p = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

Пример 2. В партии из N изделий имеется M ($M \leqslant N$) меченых изделий (так будем называть изделия, обладающие каким-либо свойством, например бракованные, или, наоборот, высшего качества). Выберем наугад n ($n \leqslant N$) изделий из данной партии. Требуется найти вероятность того, что среди этих n изделий будет ровно m ($m \leqslant n$, $m \leqslant M$) меченых.

Решение. Событие A пусть состоит в том, что среди выбранных n изделий имеется ровно m меченых. Общее число случаев, среди которых может появиться событие A, равно $n_* = C_N^n$.

Подсчитаем число случаев, благоприятствующих появлению события A. Пусть среди выбранных n изделий содержится ровно m меченых. В выборку из n элементов могут войти те или другие из M меченых изделий. Общее число исходов, в которых m изделий из M могут войти в выборку, равно C_M^m. Каждое такое сочетание меченых изделий может войти в выборку из n изделий, содержащую любое сочетание $n - m$ изделий из $N - M$ немеченых. Число различных сочетаний немеченых изделий в выборке равно C_{N-M}^{n-m}. Следовательно, общее число исходов, благоприятствующих появлению события A, равно $m_* = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

По формуле (1) получим

$$p = \frac{m_*}{n_*} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (2)$$

Пример 3. Он решается аналогично примеру 2. Имеется группа из пяти человек ($N = 5$), в которой две девочки ($M = 2$) и три мальчика. Требуется отобрать отряд из трех человек ($n = 3$), в который вошла бы одна ($m = 1$) девочка. Какова вероятность того, что среди случайно отобранных трех человек окажется одна девочка? По формуле (2) имеем $p = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}$.

Классическое определение вероятности, так же как и геометрическое определение, неприменимо, если результаты испытания не равновозможны. Например, при бросании неправильной игральной кости выпадение ее различных граней не равновозможно.

Ниже сформулировано статистическое определение вероятности. Пусть в данной серии, состоящей из n испытаний, событие A появилось m раз. Число m называется *частотой события* A, а его отношение к числу испытаний, т. е.

$$p_*(A) = \frac{m}{n},$$

называется *относительной частотой* (или *частостью*) *события в данной серии испытаний*. Очевидно, частость есть случайная величина, принимающая значения в промежутке $0 \leqslant p_*(A) \leqslant 1$.

Если число n мало, то частость мало показательна. Повторяя серии испытаний с малым n, будем получать сильно отличающиеся друг от друга частости. С ростом n разброс частостей не исчезает, но уменьшается. Это указывает на то, что при увеличении n относительная частота $p_*(A)$ обладает свойством устойчивости в смысле уменьшения ее разброса (рис. 154).

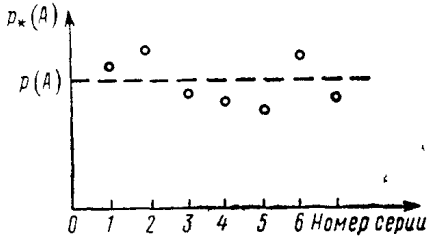

Рис. 154.

Статистическое определение вероятности. *Вероятностью события* A *называется число, вокруг которого колеблется относительная частота* $p_*(A)$ *при повторении длинных серий испытаний.* Таким образом, смысл понятия вероятности состоит в том, что она определяет среднюю частость, с которой можно ожидать появления события A при повторении длинных серий испытаний.

Благодаря устойчивости частости и близости ее к вероятности $p(A)$, величина $p_*(A)$ служит приближенной оценкой вероятности $p(A)$, тем более точной, чем больше число n испытаний в серии

$$p(A) \approx p_*(A). \tag{3}$$

Примечание. Если в данной серии испытаний $p_*(A) = 0$, то событие A все же может произойти в результате нового испытания. Если $p_*(A) = 1$, то это не значит, что событие A достоверно. Здесь речь идет о массовых случайных событиях, в каждом из которых событие A может появиться, но может и не появиться. Вероятность есть характеристика степени объективной возможности появления события при большом числе испытаний. Исход же каждого случайного события остается случайным.

236. Основные теоремы.

I. Теорема сложения вероятностей. *Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$p(A, \text{ или } B) = p(A) + p(B). \tag{4}$$

Доказательство. Введем обозначения: n — общее число испытаний, m_1 — число исходов этих испытаний, благоприятствующих событию A, m_2 — число исходов этих событий, благоприятствующих событию B. Ввиду несовместности событий A и B число исходов, благоприятствующих событию (A, или B), равно $m_1 + m_2$. По определению вероятности имеем

$$p(A, \text{ или } B) = (m_1 + m_2)/n = m_1/n + m_2/n = p(A) + p(B).$$

Следствие 1. *Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:*

$$p(A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n). \tag{5}$$

Для $n = 3$ имеем $p(A_1, \text{ или } A_2, \text{ или } A_3) = p(A_1) + p(A_2, \text{ или } A_3) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$.

Для любого n формула (5) выводится методом математической индукции.

События A и $\bar{A}$ называются *противоположными*, если они несовместны и событие (A, или $\bar{A}$) достоверно, т. е. если A и $\bar{A}$ образуют полную группу событий. Например попадание в цель и промах.

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1. \tag{6}$$

Доказательство. По условию имеем: 1) события A и $\bar{A}$ несовместны и поэтому p (A, или $\bar{A}$) = p ($\bar{A}$) + p ($\bar{A}$), 2) событие (A, или $\bar{A}$) достоверно и поэтому p (A, или $\bar{A}$) = 1. Отсюда следует формула (6).

Точно так же доказывается утверждение: *сумма вероятностей событий $A_1, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:*

$$p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) = 1. \tag{7}$$

Например, в урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар. Вероятность вынуть красный шар p (A) = 10/30, синий — p (B) = 5/30. Вероятность появления цветного шара p (A, или B) = p (A) + p (B) = 1/2.

II. Теорема умножения вероятностей. Эта теорема объединяет ряд теорем, в которых рассматриваются вероятности совместного появления нескольких событий.

События A и B называются *независимыми*, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, появилось другое событие или нет. Событие B называется *зависящим от события* A, если вероятность появления события B зависит от того, произошло событие A или нет.

Пример 1. В урне находятся 7 белых и 3 черных шара. Условие опыта — каждый вынутый шар кладется обратно в урну. Событие A — в результате первого опыта вынут белый шар; событие B — в результате второго опыта вынут опять белый шар. Имеем $p(A) = p(B) = 7/10$.

Пример 2. В урне 7 белых и 3 черных шара. Условие опыта — вынутые шары обратно в урну не кладутся. События A и B те же, что в примере 1. В условиях примера 2 $p(A) = 7/10$, но $p(B)$ зависит от того, произошло событие A или нет. Если в результате первого испытания был вынут белый шар, то $p(B) = 6/9$, если в результате первого испытания был вынут черный шар, то $p(B) = 7/9$.

Условной вероятностью $p_A(B)$ называется вероятность появления события B при условии, что событие A произошло. В примере 2 имеем $p_A(B) = 6/9$, $p_{\bar{A}}(B) = 7/9$.

Если события A и B независимые, то

$$p_A(B) = p_{\bar{A}}(B) = p(B), \quad p_B(A) = p_{\bar{B}}(A) = p(A). \tag{8}$$

Теорема 1. *Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности появления одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло*:

$$p(A \text{ и } B) = p(A)\, p_A(B). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть n — общее число равновозможных элементарных исходов испытания, образующих полную группу, n_1 — число исходов, благоприятствующих событию A ($n_1 \leqslant n$), m — число исходов испытания, в которых наступает событие B в предположении, что событие A уже наступило, т. е. m — число исходов, благоприятствующих событию (A и B).

Вероятность совместного появления событий A и B равна

$$p(A \text{ и } B) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1} = p(A) \cdot p_A(B).$$ Теорема доказана.

Меняя ролями A и B, получаем $p(B \text{ и } A) = p(B) \cdot p_B(A)$. Следовательно,

$$p(A)\, p_A(B) = p(B)\, p_B(A). \tag{10}$$

Пример 3. В условиях примера 2 поставим такие вопросы:

1) Какова вероятность вынуть первый и второй раз белые шары? По формуле (9) имеем $p(A \text{ и } B) = 7/10 \cdot 6/9 = 7/15$.

2) Какова вероятность оба раза вынуть черные шары? По формуле (9), примененной к событиям $\bar{A}$ и $\bar{B}$, получим

$$p(\bar{A} \text{ и } \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 3/10 \cdot 2/9 = 1/15.$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий. *Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:*

$$p(A \text{ и } B) = p(A)\,p(B). \tag{11}$$

Доказательство. Положив в (9) в согласии с (8) $p_A(B) = p(B)$, получим формулу (11).

Пример 4. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле $p(A) = 0{,}8$, вторым стрелком — $p(B) = 0{,}7$. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе. По формуле (11) имеем $p(A \text{ и } B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если вероятность появления любого из этих событий не зависит от того, произошли или не произошли какие-либо другие события из этой совокупности.

Теорема 2. *Вероятность совместного появления n событий $A_1, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$$p(A_1 \text{ и } A_2 \ldots \text{ и } A_n) = p(A_1)\,p(A_2) \ldots p(A_n). \tag{12}$$

При $n = 3$ имеем

$$p(A_1 \text{ и } A_2 \text{ и } A_3) = p(A_1)\,p(A_2 \text{ и } A_3) = p(A_1)\,p(A_2)\,p(A_3).$$

В общем случае теорема доказывается методом математической индукции.

Следствие. Если события $A_1, \ldots, A_n$ независимы и равновероятны $p(A_1) = \ldots = p(A_n) = p$, то из (12) следует

$$p(A_1 \text{ и } A_2 \ldots \text{ и } A_n) = p^n. \tag{13}$$

Пример 5. Имеется четыре места. Каждое из четырех мест может быть занято атомом одного вида (событие A), либо атомом другого вида (событие B); при этом $p(A) = p$, $p(B) = 1 - p = q$.

Вопрос: какова вероятность того, что все четыре места будут заняты атомами первого вида? Ответ: p^4.

III. Теорема (о вероятности появления хотя бы одного из n независимых событий). *Пусть события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, но они могут быть совместными.* Для нахождения величины $p(A_1$, или $A_2, \ldots,$ или $A_n)$ по данным $p(A_1)$, $p(A_2)$, $\ldots, p(A_n)$ обозначим через $\bar{A}_k$ событие, противоположное A_k. Имеем:

1) A_k и $\bar{A}_k$ — противоположные события и поэтому $p(A_k) + p(\bar{A}_k) = 1$,

2) $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ — события независимые в совокупности, и по теореме 2 имеем $p(\bar{A}_1 \text{ и } \bar{A}_2 \ldots \text{ и } \bar{A}_n) = p(\bar{A}_1)\,p(\bar{A}_2), \ldots$ $\ldots, p(\bar{A}_n)$,

3) события (A_1, или A_2, ..., или A_n) и ($\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ ... и $\overline{A_n}$) противоположны и поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p(A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n) + p(\overline{A_1} \text{ и } \overline{A_2} \ldots \text{ и } \overline{A_n}) = 1.$$

Следовательно, имеет место формула

$$p(A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n) = 1 - [1 - p(A_1)][1 - p(A_2)] \ldots [1 - p(A_n)]. \quad (14)$$

В частности, если $p(A_1) = p(A_2) = \ldots = p(A_n) = p$, то

$$p(A_1, \text{ или } A_2, \ldots, \text{ или } A_n) = 1 - (1 - p)^n. \quad (15)$$

Пример 6. В условиях примера 4 найти вероятность поражения цели хотя бы одной пулей при одиночном залпе. По формуле (14) имеем p (A, или B) = 1 — (1 — 0,8) (1 — 0,7) = 0,94.

IV. Теорема сложения вероятностей совместных событий. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления*:

$$p(A, \textit{ или } B) = p(A) + p(B) - p(A \textit{ и } B). \quad (16)$$

Доказательство. 1) Событие A может произойти только при появлении одного из двух несовместных событий (A и B) и (A и $\overline{B}$). По теореме сложения вероятностей имеем

$$p(A) = p(A \text{ и } B) + p(A \text{ и } \overline{B}). \quad (17)$$

Аналогично находим

$$p(B) = p(A \text{ и } B) + p(\overline{A} \text{ и } B). \quad (18)$$

2) Для появления события (A или B) имеются только три возможности: A и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B. Эти три события несовместны и по теореме сложения вероятностей имеем

$$p(A, \text{ или } B) = p(A \text{ и } B) + p(A \text{ и } \overline{B}) + p(\overline{A} \text{ и } B). \quad (19)$$

3) Складывая (17) и (18), получим

$$p(A) + p(B) = [p(A \text{ и } B) + p(A \text{ и } \overline{B}) + p(\overline{A} \text{ и } B)] + p(A \text{ и } B).$$

Согласно (19) сумма в квадратных скобках равна p (A, или B), поэтому имеем

$$p(A, \text{ или } B) + p(A \text{ и } B) = p(A) + p(B). \quad (20)$$

Отсюда следует равенство (16). Теорема доказана.

Следствия. 1. Если события A и B зависимы, то p (A и B) = p (A) p_A (B) и из (16) следует формула

$$p(A, \text{ или } B) = p(A) + p(B) - p(A)\, p_A(B). \quad (21)$$

2. Если события A и B независимы, то $p\,(A$ и $B) = p\,(A)\,p\,(B)$ и

$$p\,(A,\ \text{или}\ B) = p\,(A) + p\,(B) - p\,(A)\,p\,(B). \qquad (22)$$

3. Если в формуле (16) положить $p\,(A$ и $B) = 0$, что соответствует случаю несовместных событий, то получим формулу (4).

4. В формуле (20) $p\,(A$ и $B) \geqslant 0$ и $p\,(A,$ или $B) \geqslant 0$, поэтому

$$p\,(A,\ \text{или}\ B) \leqslant p\,(A) + p\,(B), \quad p\,(A\ \text{и}\ B) \leqslant p\,(A) + p\,(B). \qquad (23)$$

V. Формула полной вероятности. Пусть событие A может произойти лишь при условии появления одного из n попарно несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу событий. Эти события B_k будем называть *гипотезами* для события A. Тогда *вероятность события A равна сумме произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события A при этой гипотезе*

$$p\,(A) = p\,(B_1)\,p_{B_1}(A) + \cdots + p\,(B_n)\,p_{B_n}(A). \qquad (24)$$

Действительно, событие A может произойти при выполнении любого из событий (A и B_1), (A и B_2), . . ., (A и B_n), которые попарно несовместны. Следовательно, по теореме сложения вероятностей имеем

$$p\,(A) = p\,(A \text{ и } B_1) + p\,(A \text{ и } B_2) + \cdots + p\,(A \text{ и } B_n). \qquad (25)$$

Заменив здесь слагаемые правой части по формуле (9), получим равенство (24). Формула (24) называется *формулой полной вероятности.*

Пример 7. Студент α может заболеть гриппом (событие A) только в результате либо переохлаждения (событие B_1), либо контакта с другим больным (событие B_2). Требуется найти $p\,(A)$, если $p\,(B_1) = 0{,}5$, $p\,(B_2) = 0{,}8$, $p_{B_1}(A) = 0{,}3$, $p_{B_2}(A) = 0{,}1$ при условии несовместности B_1 и B_2.

По формуле (24) имеем $p\,(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}23$.

VI. Формула Байеса. Пусть в условиях предшествующего рассуждения произведено одно испытание, в результате которого появилось событие A. Вопрос: как изменились (в связи с тем, что событие A уже произошло) вероятности гипотез, т. е. величины $p\,(B_k)$?

Найдем условную вероятность $p_A(B_k)$. По теореме умножения вероятностей имеем $p\,(A$ и $B_k) = p\,(A)\,p_A(B_k) = p\,(B_k)\,p_{Bk}(A)$. Следовательно,

$$p_A(B_k) = p\,(B_k)\,p_{B_k}(A)/p\,(A), \qquad (26)$$

где величина $p\,(A)$ определяется равенством (24). Формула (26) называется *формулой Байеса.**

* Томас Байес (умер в 1763 г.) — английский математик.

237. Дискретная случайная величина и ее закон распределения. Определение. *Случайной величиной* называется переменная, которая в результате испытания может принять те или иные числовые значения (из области допустимых значений) в зависимости от случая.

Примеры случайных величин: 1) энергия электрона в атоме, 2) число писем, опущенных в данный почтовый ящик в течение дня, 3) число родившихся мальчиков на 1000 новорожденных, 4) результат измерения какого-либо параметра промышленного изделия при массовом его изготовлении.

Случайная величина называется *дискретной случайной величиной*, если множество ее допустимых значений конечно или счетно. В примерах 1, 2 и 3 случайная величина дискретна. Ниже рассматриваются дискретные случайные величины, множество допустимых значений которых конечно.

Законом распределения, или функцией распределения, дискретной случайной величины X называется перечень всех ее значений $x_1, \ldots, x_n$ и их вероятностей:

$$\begin{array}{cccc} X & x_1 & x_2 & \ldots\ x_n \\ p(X) & p_1 & p_2 & \ldots\ p_n. \end{array} \tag{1}$$

Здесь 1) все значения случайной величины расположены в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 2) их вероятности отличны от нуля: $p_k \neq 0$, 3) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, потому что события $X = x_1, \ldots, X = x_n$ образуют полную группу несовместных событий.

Задать дискретную случайную величину — это значит задать ее закон распределения вероятностей.

Пример. Число, которое появляется на верхней грани игральной кости, есть случайная величина, принимающая значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2, \ldots, x_6 = 6$ с вероятностями $p(x_k) = 1/6$, если кость симметрична. Имеет место закон равных вероятностей.

238. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины. Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако оказывается, что для решения многих практически важных задач знание закона распределения не обязательно; они могут быть решены с помощью некоторых характеристик этого закона. К числу важнейших характеристик случайной величины относятся ее математическое ожидание и дисперсия.

Определение. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* X называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n. \tag{2}$$

В условиях примера 1 п. 237 имеем $M(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + \ldots + 6) = \frac{7}{2}$.

Для выяснения вероятностного смысла математического ожидания предположим, что произведено k испытаний, в которых дискретная случайная величина X приняла значения $x_1, \ldots, x_n$ соответственно $m_1, \ldots, m_n$ раз, так что $m_1 + \ldots + m_n = k$. Сумма всех значений случайной величины равна $x_1 m_1 + \ldots + x_n m_n$, а среднее арифметическое этих значений равно

$$\overline{X} = \frac{m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n}{k} = \frac{m_1}{k} x_1 + \ldots + \frac{m_n}{k} x_n = \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n,$$

где γ_s — частость значения x_s случайной величины X в k испытаниях. Если k достаточно велико, то частость приблизительно равна вероятности $\gamma_s \approx p(x_s) = p_s$ и тогда

$$\overline{X} = \gamma_1 x_1 + \ldots + \gamma_n x_n \approx p(x_1) x_1 + \ldots + p(x_n) x_n = M(X).$$

Следовательно, математическое ожидание дискретной случайной величины приблизительно равно среднему арифметическому всех ее значений, причем это равенство тем точнее, чем больше число испытаний k. Математическое ожидание есть среднее значение случайной величины, вокруг которого группируются более или менее тесно все ее значения. Поэтому математическое ожидание случайной величины называют также ее *средним значением.*

Математическое ожидание дискретной случайной величины обладает следующими свойствами.

1°. *Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной*: $M(c) = c$.

Действительно, постоянную можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное числовое значение c с вероятностью, равной $p = 1$. По формуле (2) имеем $M(c) = c \cdot 1 = c$.

2°. *Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания*: $M(kX) = kM(X)$.

Действительно, если X подчинена закону распределения (1), то величина kX принимает значения $kx_1, \ldots, kx_n$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_n$ соответственно. Поэтому имеем

$$M(kX) = kx_1 p_1 + \ldots + kx_n p_n = k(x_1 p_1 + \ldots + x_n p_n) = kM(X).$$

3°. *Математическое ожидание суммы двух дискретных случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин.*

Действительно, пусть X и Y имеют законы распределения

$$\begin{array}{cccccc} X & x_1 & x_2 & Y & y_1 & y_2 \\ p & p_1 & p_2 & p & q_1 & q_2. \end{array} \qquad (3)$$

Чтобы упростить изложение, мы ограничились лишь двумя возможными значениями каждой из случайных величин. В общем случае доказательство аналогично. Составим перечень возможных значений величины $X + Y$ (для чего к каждому возможному значению x_i прибавим каждое возможное значение y_k) и их вероятностей p_{ik}:

$$\begin{array}{cccccc} X+Y & x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_2+y_1 & x_2+y_2 \\ p & p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{22}. \end{array}$$

Докажем, что $p_{11} + p_{12} = p_1$. Событие, состоящее в том, что X примет значение x_1 (его вероятность равна p_1), влечет за собой событие, состоящее в том, что $X + Y$ примет значение $x_1 + y_1$ или $x_1 + y_2$ (вероятность этого события по теореме сложения вероятностей равна $p_{11} + p_{12}$). Поэтому $p_{11} + p_{12} = p_1$. Аналогично доказываются равенства $p_{11} + p_{21} = q_1$, $p_{21} + p_{22} = p_2$, $p_{12} + p_{22} = q_2$.

Согласно формуле (2) имеем

$$M(X+Y) = (x_1+y_1)\,p_{11} + (x_1+y_2)\,p_{12} + (x_2+y_2)\,p_{21} + (x_2+y_2)\,p_{22} =$$
$$= x_1p_1 + x_2p_2 + y_1q_1 + y_2q_2 = M(X) + M(Y).$$

Две дискретные случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимы события $X = x_i$ и $Y = y_k$ при всех i и k.

4°. *Математическое ожидание произведения двух независимых дискретных случайных величин равно произведению их математических ожиданий*: $M(XY) = M(X)\,M(Y)$.

Доказательство. Пусть случайные величины X и Y заданы законами распределения (3). Мы опять с целью упрощения вычислений рассматриваем случай $n = 2$. Составим все возможные значения случайной величины XY и найдем их вероятности:

$$\begin{array}{ccccc} XY & x_1y_1 & x_1y_2 & x_2y_1 & x_2y_2 \\ p & p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{22}. \end{array}$$

По теореме умножения вероятностей независимых событий вероятность того, что XY примет значение x_iy_k, равна произведению вероятностей таких событий: X принимает значение x_i, а Y — значение y_k. Имеем $p(x_iy_k) = p(x_i)\;p(y_k) = p_iq_k$, где $p(x_i)$ есть вероятность случайной величине X принять значение x_i. Согласно формуле (2) получим

$$M(XY) = x_1y_1p_1q_1 + x_1y_2p_1q_2 + x_2y_1p_2q_1 + x_2y_2p_2q_2 =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1q_1 + y_2q_2) = M(X)\,M(Y).$$

Заметим, что свойства 3° и 4° распространяются на любое конечное число случайных величин $X_1, \ldots, X_n$.

Дисперсия дискретной случайной величины X есть количественная мера рассеяния X около ее среднего значения. Случай-

ные величины X и X_1 могут иметь одинаковые средние значения a, но существенно различаться разбросом их значений около a. Например, при одинаково средней величине годовых осадков одна местность может быть засушливой и неблагоприятной для сельскохозяйственных работ (нет дождей весной и летом), а другая — благоприятной для ведения сельского хозяйства.

Пусть дискретная случайная величина X задана законом распределения (1). Рассмотрим $Y = X - M(X)$ — отклонение случайной величины X от ее среднего значения и вычислим $M(Y)$. Пользуясь свойствами 1° и 3°, получим $M(Y) = M[X - M(X)] = M(X) - M(X) = 0$.

Математическое ожидание отклонения дискретной случайной величины от ее среднего значения равно нулю. Поэтому величина $M(Y)$ не может служить мерой рассеяния X около $M(X)$. Такой мерой является $M(Y^2)$.

Определение. *Дисперсией (или рассеянием) дискретной случайной величины* X называется математическое ожидание квадрата отклонения X от ее математического ожидания

$$D(X) = M\{[X - M(X)]^2\}. \tag{4}$$

Если случайная величина X задана законом распределения (1), то случайная величина Y^2 принимает значения $y_k^2 = [x_k - M(X)]^2$ с вероятностями p_k соответственно при $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому из (4) следует

$$D(X) = M(Y^2) = \sum_{s=1}^{n} [x_s - M(X)]^2 p_s. \tag{5}$$

Теорема. *Дисперсия случайной величины X равна разности между математическим ожиданием квадрата X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \tag{6}$$

Доказательство основано на свойствах математического ожидания и формуле (4)

$$D(X) = M\{X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\} = M(X^2) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Свойства дисперсии дискретной случайной величины:

1°. $D(c) = 0$, 2°. $D(cX) = c^2 D(X)$, 3°. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y независимы.

Доказательство. По формуле (6) получаем $D(c) = M(c^2) - M^2(c) = c^2 - c^2 = 0$, т. е. постоянная величина не имеет рассеяния,

$$D(cX) = M(c^2X^2) - M^2(cX) = c^2[M(X^2) - M^2(X)] = c^2 D(X),$$

$$D(X + Y) = M[(X + Y)^2] - M^2(X + Y) =$$

$$= M[X^2 + 2XY + Y^2] - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) =$$
$$= D(X) + D(Y).$$

Средним квадратичным уклонением σ случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии $\sigma = \sqrt{D(X)}$.

Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию для каждой из двух случайных величин, заданных законами распределений

X_1	$-0{,}01$,	$+0{,}01$	X_2	-100,	100
p	$0{,}5$,	$0{,}5$,	p	$0{,}5$	$0{,}5$.

Здесь $M(X_1) = M(X_2) = 0$. По формуле (5) имеем

$$D(X_1) = x_{11}^2 p_1 + x_{21}^2 p_2 = 0{,}5\,(10^{-4} + 10^{-4}) = 10^{-4},$$
$$D(X_2) = x_{12}^2 p_1 + x_{22}^2 p_2 = 0{,}5\,(10^4 + 10^4) = 10^4.$$

239. Биноминальный закон распределения. Рассмотрим задачу о числе появлений события A в n повторных испытаниях. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Следовательно, вероятность появления события $\overline{A}$ равна $1 - p = q$. Рассмотрим случайную величину X — число появлений события A в n испытаний. Найдем ее закон распределения.

Возможными значениями величины X являются числа $0, 1, \ldots, n$. Поэтому X есть дискретная случайная величина. Остается найти вероятности каждого из ее значений. Обозначим через $p_n(k)$ вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно k раз. Выведем формулу Бернулли *

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (7)$$

Прежде всего отметим, что здесь не требуется, чтобы событие A повторялось k раз в определенной последовательности. Например, если $n = 4$ и $k = 3$, то возможны только следующие результаты испытаний: $AAA\overline{A}$, $AA\overline{A}A$, $A\overline{A}AA$, $\overline{A}AAA$, где указан порядок появления событий в каждом из четырех испытаний. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения независимых событий равна $p^k q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k, т. е. C_n^k. Эти сложные события несовместны. По теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий (рассматриваемого вида). Вероятности всех сложных событий одинаковы и равны $p^k q^{n-k}$, поэтому имеет место формула (7).

---

* Якоб Бернулли (1654—1705) — швейцарский математик.

Пример 3. Статистикой установлено, что из каждой тысячи родившихся детей в среднем рождается 485 девочек и 515 мальчиков. Пусть в семье пятеро детей. Найти вероятность того, что среди этих детей а) три девочки, б) не более двух девочек.

Решение. а) Вероятность рождения девочки $p = 0{,}485$, вероятность рождения мальчика равна $q = 0{,}515$. Вероятность того, что среди пятерых детей три девочки, по формуле Бернулли, равна

$$p_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot (0{,}485)^3 \cdot (0{,}515)^2 = 0{,}30.$$

б) Если в семье не более двух девочек, то это возможно в следующих случаях, когда среди пятерых детей число девочек равно 0, или 1, или 2. Все эти события несовместны. Поэтому по теореме сложения вероятностей искомая вероятность равна

$$p = p_5(0) + p_5(1) + p_5(2) = q^5 + C_5^1 pq^4 + C_5^2 p^2 q^3.$$

Закон распределения рассматриваемой случайной величины называется *биномиальным законом распределения* и представляется таблицей значений величины X и их вероятностей

$$\begin{array}{cccccc} X & 0 & 1 & \dots & k & \dots n \\ p & q^n & C_n^1 pq^{n-1} & \dots & C_n^k p^k q^{n-k} & \dots p^n \end{array} \tag{8}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, подчиненной биномиальному закону распределения, соответственно равны

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \tag{9}$$

Для вывода этих формул преобразуем формулу Бернулли

$$p_n(k) = \frac{np}{k} \cdot \frac{(n-1) \dots (n-k+1)}{(k-1)!} p^{k-1} q^{n-k} = \frac{np}{k} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}.$$

Получена рекуррентная формула

$$p_n(k) = \frac{np}{k} p_{n-1}(k-1). \tag{10}$$

По определению математического ожидания в случае биномиального закона распределения имеем

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = \sum_{k=1}^{n} np p_{n-1}(k-1) = np \sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(k-1) = np,$$

потому что сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$\sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(k-1) = 1. \tag{11}$$

По формуле (2) для X^2 имеем

$$M(X^2) = \sum k^2 p_n(k) = \sum knpp_{n-1}(k-1) =$$

$$= np\{[p_{n-1}(0) + \dots + p_{n-1}(n-1)] + [p_{n-1}(1) + 2p_{n-1}(2) +$$

$$+ \dots + (n-1) p_{n-1}(n-1)]\}.$$

Справа сумма членов в первой квадратной скобке равна единице согласно формуле (11). Сумма членов во второй квадратной скобке есть $M(X)$ при $n-1$; согласно доказанному эта сумма равна $(n-1)p$. Поэтому $M(X^2) = np[1+(n-1)p]$.

Следовательно, дисперсия X равна

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = np[1+(n-1)p] - n^2p^2 =$$

$$= np(1-p) = npq.$$

240. Интегральная функция распределения случайной величины и ее свойства. Любую случайную величину (непрерывную и дискретную) можно вполне охарактеризовать ее интегральной функцией распределения вероятностей.

Определение. Пусть x — любое вещественное число. *Интегральной функцией распределения, или интегральным законом распределения, случайной величины* X называется функция $F(x)$, определяемая при всех вещественных значениях x равенством

$$F(x) = p(X < x), \qquad (12)$$

согласно которому значение $F(x)$ в точке x равно вероятности случайной величине X принять значение, меньшее x.

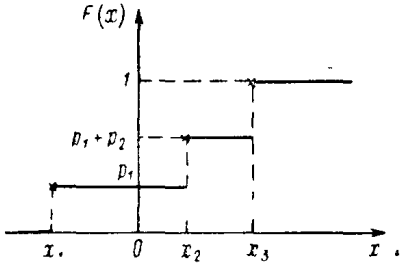

Рис. 155.

Построим график $F(x)$ для дискретной случайной величины, заданной законом распределения (1) при $n=3$. Случайная величина X принимает только три значения x_1, x_2 и x_3.

Если $x \leqslant x_1$, то $F(x) = p(X < x) = 0$. Если $x_1 < x \leqslant x_2$, то $F(x) = p_1$, так как среди значений X, меньших x_2, есть только одно значение $x = x_1$, которое может принять X.

Если $x_2 < x \leqslant x_3$, то $F(x) = p_1 + p_2$, так как среди значений X, меньших x_3, имеется только два значения x_1 и x_2, которые может принять X. События — принять X эти значения — несовместны, и по теореме сложения вероятностей складываются вероятности этих событий.

Если $x_3 < x < \infty$, то $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Следовательно, если случайная величина X дискретна, то ее интегральная функция распределения разрывна (рис. 155).

Случайная величина X называется *непрерывной*, если непрерывна ее интегральная функция распределения $F(x)$.

Свойства интегральной функции распределения.

1°. *Интегральная функция распределения принимает значения в промежутке* $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, потому что вероятность $p \in [0,1]$.

2°. Если $x_2 > x_1$, то

$$F(x_2) \geqslant F(x_1). \qquad (13)$$

Доказательство. Пусть $x_2 > x_1$. Событие: X примет значение, меньшее x_2, может произойти только при появлении одного из двух несовместных событий: 1) X примет значение,

меньшее x_1, вероятность этого события $p(X < x_1) = F(x_1)$ и 2) X примет значение из промежутка $x_1 \leqslant x < x_2$, вероятность этого события обозначим $p(x_1 \leqslant X < x_2)$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \leqslant X < x_2).$$

Следовательно,

$$F(x_2) = F(x_1) + p(x_1 \leqslant X < x_2). \tag{14}$$

Здесь $p(x_1 \leqslant X < x_2) \geqslant 0$, поэтому имеет место неравенство (13).

3°. **Теорема.** *Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $x_1 \leqslant x < x_2$, равна приращению интегральной функции распределения при переходе от x_1 к x_2*

$$p(x_1 \leqslant X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \tag{15}$$

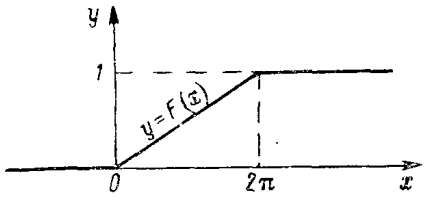

Рис. 156.

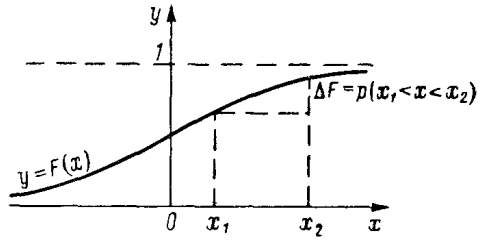

Рис. 157.

Действительно, из (14) прямо следует формула (15).

Свойства 1°, 2° и 3° относятся к любым случайным величинам, как непрерывным, так и дискретным. Следующие два свойства относятся лишь к непрерывной случайной величине.

4°. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет любое вполне определенное значение, равна нулю.*

Доказательство. Положив в (15) $x_2 = x_1 + \Delta x$, получим равенство $p(x_1 \leqslant X < x_1 + \Delta x) = F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)$, перейдя в котором к пределу при $\Delta x \to 0$ убедимся в том, что $p(X = x_1) = 0$.

Поэтому для непрерывной случайной величины имеем

$$p(x_1 \leqslant X < x_2) = p(x_1 < X < x_2) = p(x_1 \leqslant X \leqslant x_2). \tag{16}$$

Пример 4. Вращается круг, в котором выделен сектор с центральным углом α. Вероятность остановиться сектору против фиксированной вне круга стрелки равна $p = \alpha/2\pi$. При $\alpha = 0$ имеем $p = 0$. Здесь случайная величина X (это координата точки окружности, которая может оказаться против стрелки, когда круг остановится) принимает бесчисленное множество значений из промежутка $0 \leqslant x < 2\pi$, вероятность каждого из которых равна нулю. Такую случайную величину нельзя задать перечнем ее значений и их вероятностей (так как $p = 0$). Но ее можно задать интегральной функцией распределения, график которой изображен на рис. 156.

5°. *Если возможные значения непрерывной случайной величины X принадлежат промежутку (a, b), то*

$$F(x)=0 \text{ при } x \leqslant a, \quad F(x)=1 \text{ при } x>b. \tag{17}$$

Действительно, если $x_1 \leqslant a$, то событие $X<x_1$ невозможно и его вероятность равна нулю. Если же $x_2>b$, то событие $X<x_2$ достоверно и $F(x_2)=p(X<x_2)=1$.

Если (a, b) — вся числовая ось, то вместо (17) имеем

$$\lim_{x \to -\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x)=1. \tag{18}$$

Из свойств интегральной функции непрерывной случайной величины следует, что график этой функции имеет вид, изображенный на рис. 157, причем приращение ординаты кривой в промежутке (x_1, x_2) равно вероятности $p(x_1<X<x_2)$.

241. **Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины и ее свойства.** Пусть X — некоторая непрерывная случайная величина, а $F(x)$ — ее интегральная функция распределения, которая предполагается дифференцируемой при любом x.

Определение. *Дифференциальной функцией распределения* случайной величины X, или ее *плотностью вероятности*, называется первая производная от интегральной функции распределения

$$f(x)=F'(x) \text{ при } -\infty<x<\infty. \tag{19}$$

Из (19) следует, что $F(x+\Delta x)-F(x) \approx f(x)\,\Delta x$. Вероятностный смысл этого равенства таков: вероятность того, что случайная величина X примет значение в промежутке $(x, x+\Delta x)$, приближенно равна произведению плотности вероятности в точке x на длину промежутка Δx.

Свойства дифференциальной функции распределения. Пусть непрерывная случайная величина X задана своим дифференциальным законом распределения $f(x)$.

1°. *Плотность вероятности не отрицательна*: $f(x) \geqslant 0$.

Действительно, $F(x)$ есть функция неубывающая, а поэтому ее производная $F'(x)=f(x)$ не отрицательна.

2°. **Теорема.** *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет в результате испытания значение в промежутке (a, b), равна определенному интегралу от дифференциальной функции распределения в пределах от a до b*

$$p(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ непрерывна. С помощью равенств (15) и (19) и формулы Ньютона — Лейбница получим

$$p(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

График дифференциальной функции распределения вероятностей называется *кривой распределения* (рис. 158). Площадь под кривой на участке CD равна вероятности $p(x_1 < X < x_2)$.

3°. Имеет место формула

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{21}$$

Действительно, с помощью определения $F(x)$ и формулы (20) имеем

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

4°. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{22}$$

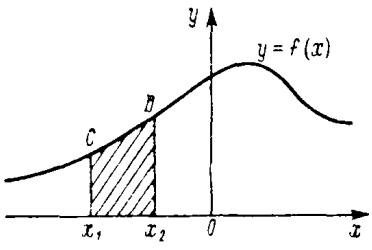

Рис. 158.

Действительно, если в (21) перейти к пределу при $x \to \infty$, то в силу (18) получим (22).

Геометрически формула (22) означает, что вся площадь под кривой распределения равна единице. Вероятностный смысл формулы (22) состоит в том, что достоверно событие — случайная величина X примет в результате испытания какое-либо вещественное значение.

Приведем примеры дифференциальных функций распределения. 1. В случае равномерного распределения вероятностей случайной величины, принимающей значения в промежутке (a, b), имеем

$$f(x) = 1/(b-a) \text{ при } a \leqslant x \leqslant b, \quad f(x) = 0 \text{ вне } [a, b].$$

В частности, в условиях примера 4 кривая распределения изображена на рис. 159.

2. В случае *нормального распределения вероятностей* имеем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{23}$$

График этой функции — кривая Гаусса — изображен на рис. 153.

242. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Определение. *Математическим ожиданием, или средним значением непрерывной случайной величины* X, для которой функция $f(x)$ является плотностью вероятности, называется величина несобственного интеграла (если он сходится)

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx. \tag{24}$$

Примечание. Это определение является естественным распространением понятия математического ожидания для дискретной случайной величины, когда $M(X)=\sum x_s p_s$.

Действительно: 1) для непрерывной случайной величины имеем

$$p(x<X<x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)=f(x+\theta\Delta x)\,\Delta x\approx f(x)\,\Delta x.$$

Таким образом, произведение $f(x)\,\Delta x$ приближенно равно вероятности X принять значение в промежутке $(x,\ x+\Delta x)$, поэтому вместо $x_s p_s$ имеем $xf(x)\,\Delta x$;

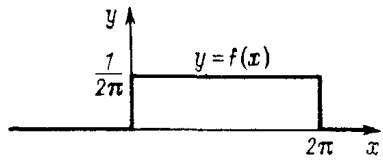

Рис. 159.

2) роль x_s играет x из промежутка $(-\infty, +\infty)$;

3) суммирование по s заменяется интегрированием по x в промежутке ее изменения.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины обладает следующими свойствами:

1°. $M(kX)=kM(X)$, 2°. $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$,

3°. $M(XY)=M(X)\cdot M(Y)$, если X и Y — независимы.

Определение. *Дисперсией непрерывной случайной величины* X, среднее значение которой $M(X)=a$ и функция $f(x)$ является ее плотностью вероятности, называется величина несобственного интеграла (если он сходится)

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)\,dx. \tag{25}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины имеет следующие свойства:

1°. $D(cX)=c^2D(X)$, 2°. $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$,

если X и Y независимы.

Средним квадратичным уклонением случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$.

243. Нормальный закон распределения. Распределение вероятностей называется *нормальным*, если оно описывается дифференциальной функцией распределения (23). Нормально распределенные случайные величины имеют широкое распространение на практике. Это происходит по причине, указанной в следствии из так называемой центральной предельной теоремы теории вероятностей, доказанной А. М. Ляпуновым.* Сформулируем это следствие.

Если случайная величина X представляет собой сумму очень б о л ь ш о г о ч и с л а взаимно независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, влияние каждой из которых на всю сумму н и ч т о ж н о м а л о, то величина X имеет распределение вероятностей, близкое к нормальному.

П р и м е р 1. Пусть производится измерение некоторой физической величины при помощи одного и того же измерительного прибора. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины, так как на результат измерения оказывают влияние очень многие случайные факторы — изменение температуры, механические и другие колебания измерительного прибора, несовершенство органов зрения наблюдателя и др. Каждая из этих причин порождает ничтожно малую частную ошибку. Однако, поскольку число этих причин очень велико, их совокупное действие дает заметную суммарную ошибку. Эта суммарная ошибка имеет распределение вероятностей, близкое к нормальному, что подтверждено опытом.

П р и м е р 2. Рассмотрим массовое изделие, например валик, который изготавливается автоматически. Проследим за каким-либо параметром валика, например за его диаметром. Отклонение величины диаметра от расчетной величины есть случайная величина X, подчиненная закону распределения вероятностей, близкому к нормальному. Действительно, существует большое число факторов, оказывающих влияние на работу станка-автомата (срабатывание деталей станка, изменение смазки, температуры, качество заготовки и др.), каждая из этих причин, которые мы можем считать взаимно независимыми, порождает ничтожно малое отклонение диаметра от расчетного. Совокупное их действие оказывает уже заметное влияние на результат — изготовленные валики имеют различные диаметры. Из теоремы Ляпунова следует, что случайная величина X подчинена закону распределения, близкому к нормальному.

Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, распределенной по нормальному закону (23). По формуле (24) имеем

$$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Вычислим этот интеграл способом замены переменной, положив $t = (x - a)/\sigma\sqrt{2}$. Получим

$$M(X) = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sqrt{2}\sigma t) e^{-t^2}\, dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2}\, dt.$$

---

* Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) — русский математик.

Второе слагаемое правой части этого равенства равно нулю по причине нечетности подынтегральной функции относительно t. Первое же слагаемое содержит четную подынтегральную функцию. С помощью известной формулы Эйлера — Пуассона (см. п. 172) получаем окончательный результат

$$M(X)=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=a. \tag{25}$$

Следовательно, *параметр a в формуле* (23) *есть среднее значение случайной величины X.*

Вычисление дисперсии ведем по формуле (25)

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Замена переменных $t=(x-a)/\sigma\sqrt{2}$ дает

$$D(X)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}\,dt.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$D(X)=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{t}{2}e^{-t^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt\right]=\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sigma^2.$$

Итак, $D(X)=\sigma^2$ и $\sigma(X)=\sigma$.

Следовательно, *параметр σ в нормальном законе* (23) *есть среднее квадратичное уклонение случайной величины X.*

244. Закон больших чисел. Ниже рассмотрены теоремы Чебышева, Бернулли, Лапласа, которые получили общее название закона больших чисел. Закон больших чисел открыт в середине XIX в. великим русским математиком П. Л. Чебышевым.

Как известно, отдельная случайная величина X в результате испытания может принять значение, далекое от ее среднего значения $M(X)$, и мы не знаем какое. Ниже речь пойдет о сумме большого числа случайных величин. Казалось бы, что о сумме случайных величин вряд ли можно вынести какое-либо определенное суждение. Но это не так. Оказывается (при весьма широких условиях) поведение суммы достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным.

Теоретический пример. Пусть n независимых случайных величин $X_1,\ldots,X_n$ имеют одинаковые математические ожидания $M(X_k)=a$ и одинаковые дисперсии $D(X_k)=\sigma^2$.

Рассмотрим случайную величину $\overline{X}$, представляющую среднее арифметическое исходных величин $\overline{X} = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Найдем ее математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\overline{X}) = M(X_1 + \ldots + X_n)/n = [M(X_1) + \ldots + M(X_n)]/n =$$
$$= na/n = a,$$

т. е. среднее значение $\overline{X}$ равно a, что можно было предвидеть;

$$D(\overline{X}) = D(X_1 + \ldots + X_n)/n^2 = [D(X_1) + \ldots + D(X_n)]/n^2 =$$
$$= n\sigma^2/n^2 = \sigma^2/n.$$

Имеем $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{n}$.

Следовательно, *среднее арифметическое $\overline{X}$ взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин имеет среднее квадратичное уклонение в $\sqrt{n}$ раз меньшее, чем каждая из составляющих величин.* Таким образом, $\overline{X}$ обладает во много раз меньшим рассеянием, чем каждая из составляющих.

Рассмотрим дискретную случайную величину, заданную законом распределения (1). Поставим вопрос — сколь вероятны большие уклонения X от ее среднего значения $M(X) = a$? Более точная постановка вопроса такова. Пусть α — любое данное положительное число. *Какова вероятность того, что случайная величина X примет значение, удовлетворяющее неравенству $|X - a| > \alpha$?* Обозначим искомую величину символом $p(|X - a| > \alpha)$.

Для получения ответа на поставленный вопрос, следуя Чебышеву, будем исходить из определения дисперсии

$$D(X) = M[(X - a)^2] = \sum_{k=1}^{n} (x_k - a)^2 p_k.$$

Если в правой части отбросить слагаемые, в которых $|x_k - a| \leqslant \alpha$, и оставить только те, для которых выполнено условие $|x_k - a| > \alpha$, то в результате такого действия сумма может лишь уменьшиться:

$$D(X) \geqslant \sum (x_k - a)^2 p_k, \quad \text{где } (x_k - a)^2 > \alpha^2.$$

Эта сумма еще более уменьшится от замены $(x_k - a)^2$ на α^2. Получим неравенство $D(X) > \alpha^2 \sum' p_k$. Здесь суммирование распространяется на те значения случайной величины X, которые уклоняются от a (в ту или другую сторону) больше, чем на α. Согласно теореме сложения вероятностей имеем

$$\sum' p_k = p(|X - a| > \alpha). \quad \text{Поэтому } D(X) > \alpha^2 p(|X - a| > \alpha).$$

Отсюда следует ответ на поставленный выше вопрос в виде *неравенства Чебышева*

$$p(|X-a|>\alpha)<\frac{D(X)}{\alpha^2}. \qquad (27)$$

Заметим, что оно справедливо и для непрерывных случайных величин.

Другая форма неравенства Чебышева. События $|X-a|>\alpha$ и $|X-a|\leqslant\alpha$ противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Отсюда следует, что

$$p(|X-a|\leqslant\alpha)=1-p(|X-a|>\alpha).$$

Если в правой части этого равенства увеличить вычитаемое согласно (27), то получим такую форму *неравенства Чебышева*:

$$p(|X-a|\leqslant\alpha)>1-\frac{D(X)}{\alpha^2}. \qquad (28)$$

Пример 1. Произведено $n=100$ измерений некоторого параметра в партии изделий. Результаты измерений $x_1, \ldots, x_{100}$ имеют среднее значение $a=200$ и $\sigma(X)=5$. Рассмотрим среднее арифметическое результатов измерений. Имеем $M(\overline{X})=200$, $\sigma(\overline{X})=5/\sqrt{100}=0{,}5$. Вопрос — какова вероятность того, что величина $\overline{X}$ (из какой-либо сотни изделий) имеет уклонение от среднего значения, большее трех? По формуле (27) получаем

$$p(|X-a|>3)<(0{,}5)^2/3^2\approx 0{,}3.$$

Пример 2. Производится стрельба по мишени. Пусть при 900 выстрелах среднее число попаданий равно 450 и среднее квадратичное уклонение равно 15. Найти вероятность того, что фактическое число m попаданий будет заключено между 400 и 500, т. е. $|m-450|\leqslant 50$. По формуле (28) имеем $p(|m-450|\leqslant 50|>1-15^2/50^2\approx 0{,}91$.

Теорема Чебышева. *Если дисперсии независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ ограничены одной и той же постоянной c, то как бы мало ни было положительное число ε, вероятность выполнения неравенства $|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon$, где $\overline{X}=(X_1+\cdots+X_n)/n$, будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин n достаточно велико, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} p(|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon)=1. \qquad (29)$$

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева (28) к величине $\overline{X}$, имеем

$$p(|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon)>1-\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}.$$

Пользуясь свойствами дисперсии и условием теоремы, получим

$$D(\overline{X})=[D(X_1)+\ldots+D(X_n)]/n^2<nc/n^2=c/n.$$

Поэтому выполнено неравенство

$$p(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) > 1 - \frac{c}{n\varepsilon^2}. \qquad (30)$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Частный случай теоремы Чебышева. *Если все* X_k *имеют одинаковые математические ожидания* $M(X_1) = \ldots = M(X_n) = a$ *и* $D(X_k) < c$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} p(|\overline{X} - a| < \varepsilon) = 1. \qquad (31)$$

Действительно, в условиях рассматриваемого частного случая равенство (29) имеет вид (31).

Сущность теоремы Чебышева состоит в следующем. Несмотря на то, что каждая из независимых случайных величин X_k может принять значение, далекое от математического ожидания $M(X_k)$, среднее арифметическое $\overline{X}$ достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью весьма близко к среднему арифметическому их математических ожиданий; отклонение $\overline{X}$ от $M(\overline{X})$ сколь угодно мало при достаточно большом n с вероятностью, сколь угодно близкой к единице.

Другими словами, в то время как каждая случайная величина может иметь большое рассеяние, среднее арифметическое $\overline{X}$ этих величин будет рассеяно мало; величина $\overline{X}$ почти утрачивает характер случайной величины. Объясняется это тем, что отклонения каждой из случайных величин X_k от ее математического ожидания могут быть больше нуля и меньше нуля, а в среднем арифметическом эти отклонения взаимно погашаются.

Значение теоремы Чебышева для практики велико. Пусть, например, измеряется некоторая физическая величина. Обычно принимают в качестве искомого значения измеряемой величины среднее арифметическое результатов нескольких измерений. Можно ли считать такой подход верным? Теорема Чебышева (ее частный случай) отвечает на этот вопрос положительно.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, согласно которому по сравнительно небольшой случайной выборке выносят суждение, касающееся всей совокупности исследуемых объектов.

Теорема Бернулли. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Формула Бернулли (7) отвечает на вопрос о вероятности появления этого события k раз в n испытаниях. Ниже поставлен другой вопрос — об относительной частоте появления события A в n испытаниях.

Теорема. *Если в каждом из* n *независимых испытаний вероятность* p *появления события* A *постоянна, то как бы мало ни было положительное число* ε, *вероятность выполнения неравенства*

$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$, *где* $\frac{m}{n}$ — *относительная частота появления события* A *в* n *испытаниях, будет сколь угодно близка к единице, если число испытаний* n *достаточно велико, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1. \tag{32}$$

Доказательство теоремы Бернулли, предложенное Чебышевым, заключается в следующем. Обозначим через X_k число появлений события A в k-м испытании, где $k = 1, 2, \ldots, n$. X_k есть случайная величина, принимающая всего два значения 0 и 1. Тогда $m = X_1 + \cdots + X_n$ есть число появлений события A в n испытаниях. Вспомним, что относительной частотой появления события A называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу испытаний, т. е. m/n. Имеем $m/n = (X_1 + \cdots + X_n)/n = \overline{X}$.

Здесь выполнены условия частного случая теоремы Чебышева.

1) Математические ожидания случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ одинаковы и равны p; действительно, каждая случайная величина может принять только два значения 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно. Поэтому $M(X_k) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$.

2) Дисперсии случайных величин X_k ограничены. Действительно, X_k^2 может принять только два значения 1 и 0 с вероятностями p и q соответственно. Поэтому $D(X_k) = M(X_k^2) - M^2(x_k) = p - p^2 = pq < 1$.

В условиях теоремы Бернулли имеем $\overline{X} = \frac{m}{n}$, $a = p$. Поэтому, согласно заключению теоремы Чебышева, получаем формулу (32) непосредственно из (31). Теорема Бернулли доказана.

Примечание. Из формулы (32) не следует, что $\frac{m}{n} \to p$. В теореме Бернулли речь идет лишь о вероятности того, что при достаточно большом n величины $\frac{m}{n}$ и p будут сколь угодно мало отличаться одна от другой. Однако при этом случайная величина $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ может принять и не малое значение. В формулах (29), (31) и (32) речь идет о стремлении по вероятности.

Локальная теорема Муавра — Лапласа.* *Если вероятность* p *появления события* A *в каждом повторном испытании постоянна и отлична от* 0 *и* 1, *то* $p_n(m)$ — *вероятность того, что событие* A *появится в* n *испытаниях* m *раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше* n*) значению функции*

$$y(x) = \varphi(x)/\sqrt{npq}, \tag{33}$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, *при* $x = (m-np)/\sqrt{npq}$.

* Доказательство см. в работе Б. В. Гнеденко «Курс теории вероятностей».

Примечание. Конечно, величину $p_n(m)$ можно найти и по формуле Бернулли (7), но при больших n это связано с громоздкими расчетами. По формуле (33) расчеты значительно проще. Имеется таблица значений функции $\varphi(x)$ в каждом курсе теории вероятностей.

Пример. Найти $p_n(m)$ при условии: $n = 400$, $m = 80$, $p = 0{,}2$. По формуле (33) имеем $y(x) = \varphi(x)/\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \varphi(x)/8$, где $x = (80 - 400 \cdot 0{,}2)/8 = 0$. Величину $\varphi(0)$ находим по таблице, $\varphi(0) = 0{,}3989$.

Следовательно, $p_{400}(80) = 0{,}3989/8 = 0{,}04986$. Точный расчет по формуле Бернулли дает $p_{400}(80) = 0{,}0498$.

Интегральная теорема Лапласа. *Если вероятность p появления события A в каждом повторном испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то $p_n(m_1, m_2)$ — вероятность того, что событие A в n испытаниях наступит от m_1 до m_2 раз, приближенно равна величине интеграла*

$$p_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_2}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \tag{34}$$

где $x_1 = (m_1 - np)/\sqrt{npq}$, $x_2 = (m_2 - np)/\sqrt{npq}$.

Для вычисления интеграла (34) целесообразно пользоваться таблицей значений функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad \text{при } x > 0 \tag{35}$$

и условием $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Таблицы значений функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ имеются, например, в цитированном выше курсе Б. В. Гнеденко.

Пример. Вероятность того, что изделие не прошло проверку ОТК, $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных изделий окажутся непроверенными от 70 до 100 изделий.

Здесь $n = 400$, $m_1 = 70$, $m_2 = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Поэтому $x_1 = -1{,}25$, $x_2 = 2{,}5$ и

$$p_{400}(70, 100) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Глава XV

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 42. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

245. Понятие определителя любого порядка. *Матрицей* называется совокупность mn чисел (вообще говоря, комплексных) или функций, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов. Матрицу обозначают символами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

или $A = \| a_{ik} \|$ $(i = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n)$. Элементы этой совокупности называются *элементами матрицы*. В обозначении элемента a_{ik} первый индекс i указывает номер строки, второй индекс k — номер столбца матрицы A, на пересечении которых находится элемент a_{ik}. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей порядка* n и ее можно обозначить так:

$$A = \| a_{ik} \|_1^n. \tag{2}$$

Пусть дана квадратная матрица (2) и ее элементами являются числа. Матрица (2) содержит n^2 элементов. Составим какое-либо произведение n элементов данной матрицы, содержащее по одному элементу от каждой ее строки и от каждого ее столбца. Если в таком произведении сомножители расположить в порядке возрастания первого индекса, то произведение примет вид

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}, \tag{3}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — различные числа множества $1, 2, \dots, n$.

Перестановкой символов (в нашем случае чисел 1, 2, . . ., n) называется всякое упорядоченное множество этих символов (см. п. 58). Совокупность вторых индексов элементов матрицы в произведении (3) $p_1, p_2, \ldots, p_n$ образует перестановку чисел 1, 2, . . ., n. *Беспорядком в перестановке* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется тот факт, что большее число предшествует меньшему. Число беспорядков в этой перестановке обозначим символом $[p_1, p_2, \ldots, p_n]$. Например, $[1, 2, 3] = 0$, $[2, 1, 3] = 1$, $[2, 3, 1] = 2$. Перестановка называется *четной*, если она содержит четное число беспорядков, *нечетной* — в противном случае.

Рассмотрим всевозможные произведения вида (3), какие можно составить из элементов данной матрицы (2), и припишем каждому такому произведению знак $(-1)^{[p_1, \ldots, p_n]}$.

Определение. *Определителем n-го порядка*, соответствующим матрице (2), называется сумма всевозможных произведений описанного выше вида и обозначается символом

$$D(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1 \ldots p_n)} (-1)^{[p_1, \ldots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}. \tag{4}$$

Здесь суммирование распространяется на всевозможные перестановки вторых индексов. Поэтому число слагаемых в сумме (4) равно $n!$

Заметим, что это определение содержит, в частности, понятия определителя второго и третьего порядков (см. п. 59).

246. Свойство перестановок. *Транспозицией* называется операция, заключающаяся во взаимном перемещении двух элементов в данной перестановке при сохранении остальных элементов на своих местах. Очевидно, из данной перестановки можно получить всякую другую перестановку, состоящую из тех же элементов, путем выполнения нескольких транспозиций. Например, из перестановки 3, 2, 1 путем транспозиций последовательно получим 1, 2, 3 и далее 1, 3, 2.

Лемма. *Транспозиция меняет число беспорядков в перестановке на нечетное число.*

Другими словами, в результате одной транспозиции нечетная перестановка становится четной, а четная — нечетной.

Для доказательства рассмотрим перестановку

$$p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_n \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n).$$

Поменяем местами числа p_i и p_j. Это можно выполнить с помощью одной транспозиции, либо путем последовательного выполнения следующих элементарных транспозиций: 1) p_j меняется местами последовательно с элементами p_{j-1}, затем $p_{j-2}, \ldots, p_i$, число

которых равно $j - i$, 2) затем p_i меняется местами последовательно с элементами перестановки $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_{j-1}$, число которых равно $j - i - 1$. Всего будет выполнено $2j - 2i - 1$ элементарных шагов. При каждом шаге, когда выполняется перемена мест рядом стоящих элементов перестановки, мы либо вводим один беспорядок в перестановку, либо устраняем один беспорядок. Поэтому общее число изменений беспорядков в перестановке равно $2(j - i) - 1$ и есть число нечетное. Лемма доказана.

247. **Основные свойства определителей.** Пусть дана матрица A. Матрица A^*, образованная из A путем замены ее строк соответствующими столбцами (тем самым столбцы A заменятся соответствующими строками), называется *транспонированной матрицей* по отношению к A. Поэтому, если $A = \| a_{ik} \|_1^n$ и $A^* = \| a_{ik}^* \|_1^n$, то

$$a_{ik}^* = a_{ki}. \tag{5}$$

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1°. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.* Другими словами, величина определителя не меняется при замене его строк соответствующими столбцами.* Это так называемое свойство равноправности строк и столбцов в определителе.

Для доказательства рассмотрим любой (общий) член суммы (4). Если в нем упорядочить (в порядке возрастания) вторые индексы сомножителей путем перемещения сомножителей в рассматриваемом произведении, то в результате изменится порядок первых индексов, и они образуют вместо $1, 2, \ldots, n$ некоторую перестановку $q_1, q_2, \ldots, q_n$, так что

$$a_{1p_1} \ldots a_{np_n} = a_{q_1 1} \ldots a_{q_n n}. \tag{6}$$

Перестановки $p_1, \ldots, p_n$ и $q_1, \ldots, q_n$ содержат одинаковое число беспорядков

$$[p_1, \ldots, p_n] = [q_1, \ldots, q_n], \tag{7}$$

потому что упомянутое выше перемещение сомножителей одновременно приводит перестановку $p_1, \ldots, p_n$ к основной перестановке $1, 2, \ldots, n$, а основную перестановку $1, 2, \ldots, n$ —

---

* Под строками (столбцами) определителя надо понимать строки (столбцы) матрицы, которой соответствует данный определитель.

к перестановке $q_1, \ldots, q_n$, поэтому и число транспозиций при этих двух переходах одно и то же.

Из (4)—(7) следует

$$D(A) \underset{(4)}{=} \sum (-1)^{[p_1, \ldots, p_n]} a_{1p_1} \ldots a_{np_n} \underset{(6,\,7)}{=}$$

$$= \sum (-1)^{[q_1, \ldots, q_n]} a_{q_1 1} \ldots a_{q_n n} \underset{(5)}{=}$$

$$= \sum (-1)^{[q_1, \ldots, q_n]} a^*_{1q_1} \ldots a^*_{nq_n} \underset{(4)}{=} D(A^*).$$

Здесь под каждым знаком равенства указан номер формулы, которая служит основанием для этого равенства.

2°. *При перестановке двух строк (столбцов) между собой величина определителя меняет лишь знак.* Действительно, если поменять местами i-й и j-й столбцы, то в каждом слагаемом формулы (4) поменяются местами два вторых индекса p_i и p_j, что приведет согласно лемме к перемене знака в каждом слагаемом (поскольку изменится четность перестановки) и у всей суммы. Поэтому величина определителя исходной матрицы изменит лишь знак. Перемещение строк определителя сводится к перестановке соответствующих столбцов в транспонированной матрице.

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$.

3°. *Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.* Действительно, если в таком определителе переставить два одинаковых ряда, то, с одной стороны, определитель не изменится, а с другой — по свойству 2° определитель изменит знак, т. е. $D(A) = -D(A)$. Следовательно, $D(A) = 0$.

4°. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.* Это свойство непосредственно следует из формулы (4), потому что общий множитель каждого произведения можно вынести за знак всей суммы.

4а. *Если все элементы какой-либо строки (столбца) равны нулю или пропорциональны соответствующим элементам другой строки (другого столбца), то определитель равен нулю.* Это утверждение прямо следует из свойств 3° и 4°.

5°. *Если элементы некоторой строки (столбца) определителя суть суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, в которых элементы упомянутой строки (столбца) заменены соответствующими слагаемыми.* Действительно, пусть

для определенности речь идет о первой строке. Тогда согласно (4) имеем

$$D(A) = \sum (-1)^{[p_1 \ldots p_n]} (a_{1p_1} + b_{1p_1}) a_{2p_2} \ldots a_{np_n} =$$
$$= \sum (-1)^{[p_1 \ldots p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} +$$
$$+ \sum (-1)^{[p_1 \ldots p_n]} b_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} = D(A_1) + D(A_2).$$

Минором определителя n-го порядка $D(A)$, *соответствующим элементу* a_{ik}, называется определитель $n-1$-го порядка, получающийся из $D(A)$ вычеркиванием i-й строки и k-го столбца; он обозначается символом Δ_{ik}.

Минор Δ_{ik}, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$, называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ik} определителя $D(A)$ и обозначается символом

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}. \tag{8}$$

6°. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца)* определителя на их алгебраические дополнения равна величине определителя. Это свойство можно выразить формулами

$$D(A) = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

$$D(A) = a_{1k}A_{1k} + \ldots + a_{nk}A_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Формула (9) называется *разложением определителя по элементам* i*-й строки*, а формула (10) — *разложением определителя по элементам* k*-го столбца.*

Выведем формулу (9). В правой части равенства (4) каждое из $n!$ слагаемых содержит по одному элементу i-й строки матрицы A. Фиксируем i среди чисел $1, 2, \ldots, n$. Объединим в сумме (4) слагаемые, содержащие a_{i1}, затем a_{i2} и т. д., и представим всю сумму (4) в виде

$$D(A) = a_{i1}B_{i1} + a_{i2}B_{i2} + \ldots + a_{in}B_{in}. \tag{11}$$

Докажем, что

$$B_{ik} = A_{ik}. \tag{12}$$

1) Доказательство равенства (12) при $i = k = 1$. Первое слагаемое правой части (11) при $i = 1$ будет

$$a_{11}B_{11} \underset{\text{I}}{=} a_{11} \sum (-1)^{[1, p_2, \ldots, p_n]} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} =$$
$$\underset{\text{II}}{=} a_{11} \sum (-1)^{[p_2, \ldots, p_n]} a_{2p_2} \ldots a_{np_n} \underset{\text{III}}{=} a_{11}\Delta_{11}.$$

Здесь равенство I написано по определению B_{11}, II — так как $1 < p_2, \ldots, 1 < p_n$ и поэтому $[1, p_2, \ldots, p_n] = [p_2, \ldots, p_n]$, III — согласно определению минора. Следовательно,

$$B_{11} = \Delta_{11} = A_{11}. \tag{13}$$

2) Для доказательства равенства (12) в общем случае переставим i-ю строку A последовательно со строками $i-1$, $i-2$, и т. д., пока i-я строка не займет место первой строки. Переведем также k-й столбец на место первого столбца. После этого элемент a_{ik} матрицы A займет место элемента $\tilde{a}_{11}$ в получившейся матрице $\tilde{A}$.

Имеем

$$\tilde{\Delta}_{11} = \Delta_{ik}, \tag{14}$$

где Δ_{ik} — минор основного определителя $D(A)$, соответствующий элементу a_{ik}; $\tilde{\Delta}_{11}$ — минор $D(\tilde{A})$, соответствующий элементу $\tilde{a}_{11}$.

Согласно (13) применительно к $D(\tilde{A})$ имеем $\tilde{B}_{11} = \tilde{\Delta}_{11}$. Отсюда следует, учитывая формулу (14), равенство

$$\tilde{B}_{11} = \Delta_{ik}. \tag{15}$$

При переходе от A к $\tilde{A}$ выполнено $i+k-2$ перестановок строк и столбцов, причем каждая такая перестановка согласно свойству 2° влечет перемену знака определителя. Поэтому величины B_{ik} и $\tilde{B}_{11}$ связаны зависимостью $\tilde{B}_{11} = (-1)^{i+k} B_{ik}$. Следовательно, $B_{ik} = (-1)^{i+k}\tilde{B}_{11} = (-1)^{i+k}\Delta_{ik} = A_{ik}$. Таким образом, выведена формула (12) и этим установлена формула (9). Формула (10) может быть выведена аналогично.

Обе формулы (9) и (10) важны в вычислительном отношении, они позволяют свести вычисление определителя n-го порядка к вычислению n определителей $n-1$-го порядка.

Пример вычисления определителя путем разложения его по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -11 + 14 + 2 = 5.$$

7°. *Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (другого столбца) равна нулю*:

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad &\text{при } i \neq j, \\ a_{1k}A_{1s} + a_{2k}A_{2s} + \ldots + a_{nk}A_{ns} = 0 \quad &\text{при } k \neq s. \end{aligned} \tag{16}$$

Для вывода, например, первой из формул (16) заменим в матрице A элементы j-й строки произвольными числами $c_1, \ldots, c_n$ соответственно. Получим матрицу B и разложим $D(B)$ по элементам j-й строки, получим $D(B) = c_1A_{j1} + \cdots + c_nA_{jn}$. В частности, если положить $c_1 = a_{i1}, \ldots, c_n = a_{in}$, то получим

первую из формул (16), потому что матрица B будет иметь две одинаковые строки (i-ю и j-ю). Поэтому $D(B) = 0$.

8°. *Величина определителя не изменится, если к элементам одной из ее строк (столбцов) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же произвольное число.*

Действительно, в результате такого сложения (например, строк) с домножением на c получим строку с элементами $a_{ik} + ca_{jk}$ ($k = 1, \ldots, n$). По свойству 5° новый определитель равен сумме двух определителей: $D(B) = D(A) + cD(A_1)$, где $D(A_1) = 0$, так как i-я и j-я строки матрицы A_1 одинаковы.

Пример. Путем вычитания элементов первой строки из четвертой и второй из третьей получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4.$$

Для вычисления определителей выше четвертого порядка можно рекомендовать метод Гаусса.*

248. Теорема умножения определителей. Рассмотрим две матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ и $B = \| b_{ik} \|_1^n$. Составим третью матрицу $C = \| c_{ik} \|_1^n$, элементы которой определим равенствами

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \quad (i, k = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

Матрица C, составленная согласно (17) путем умножения строк матрицы A на столбцы матрицы B, называется *произведением матрицы A на матрицу B* и обозначается символом AB.

Определение. Матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ и $B = \| b_{ik} \|_1^n$ называются *равными*, если равны соответствующие элементы этих матриц: $a_{ik} = b_{ik}$ при $i, k = 1, 2, \ldots, n$, что изображается так: $A = B$.

Примечание. Произведение матриц, вообще говоря, не обладает переместительным свойством: $AB \neq BA$. Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq AB. \tag{18}$$

Теорема. *Определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей:*

$$D(AB) = D(A)D(B). \tag{19}$$

---

* См.: Д. К. Фадеев и В. Н. Фадеева. Вычислительные методы линейной алгебры.

Докажем теорему в случае $n=2$. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & \partial \end{pmatrix}$, $B=$

$=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ Тогда $D(C)=\begin{vmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+\partial r & cq+\partial s \end{vmatrix}$.

Этот определитель в силу свойства 5° равен сумме четырех определителей, из которых два имеют одинаковые столбцы и поэтому равны нулю:

$$D(C)=pq\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix}+ps\begin{vmatrix} a & b \\ c & \partial \end{vmatrix}+rq\begin{vmatrix} b & a \\ \partial & r \end{vmatrix}+rs\begin{vmatrix} b & b \\ \partial & \partial \end{vmatrix}=$$

$$=D(A)(ps-rq)=D(A)\,D(B).$$

Следовательно, определители можно умножать, так же как и матрицы, путем умножения строк на столбцы.

Заметим, без доказательства, что в результате умножения строк определителя на его столбцы, строк на строки, столбцов на столбцы или столбцов на строки получаются равные определители. Но матрицы умножаются только в соответствии с формулой (17). Например, $D(BA)=D(B)\,D(A)=D(AB)$, но $AB\neq BA$.

Теорема. *Даны две системы взаимно-обратных функций*:

$$u=u(x,\ y,\ z),\ v=v(x,\ y,\ z),\ w=w(x,\ y,\ z), \tag{20}$$

$$x=x(u,\ v,\ w),\ y=y(u,\ v,\ w),\ z=z(u,\ v,\ w), \tag{21}$$

которые предполагаются непрерывно дифференцируемыми в соответствующих областях. Имеет место равенство

$$\frac{D(u,\ v,\ w)}{D(x,\ y,\ z)}\cdot\frac{D(x,\ y,\ z)}{D(u,\ v,\ w)}=1, \tag{22}$$

т. е. произведение функциональных определителей, входящих в левую часть равенства (22) *равно тождественно единице.*

Доказательство. Функции (21) образуют решение системы (20), а функции (20) — решение системы (21). Поэтому имеют место тождества

$$u=u(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)),$$

$$v=v(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)),$$

$$w=w(x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)),$$

дифференцируя которые, имеем

$$u'_x x'_u+u'_y y'_u+u'_z z'_u=1,$$

$$u'_x x'_v+u'_y y'_v+u'_z z'_v=0,$$

$$u'_x x'_w+u'_y y'_w+u'_z z'_w=0$$

и еще шесть аналогичных равенств. Все эти девять равенств можно записать сокращенно в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Учитывая теорему умножения определителей из равенства (23), непосредственно следует формула (22), так как равен единице определитель единичной матрицы, находящийся в правой части равенства (23). Теорема доказана.

§ 43. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

249. Постановка вопроса. Система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ имеет вид

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1}$$

Числа a_{ik} (вещественные или комплексные) называются *коэффициентами системы.* Они образуют матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

содержащую m строк и n столбцов. Числа b_i называются свободными членами системы, а x_k — ее неизвестными. Число уравнений m может быть больше, меньше или равно числу неизвестных n. Система линейных уравнений (1) называется *однородной*, если $b_1 = \ldots = b_m = 0$.

Решением системы (1) называется последовательность чисел $x_{1*}, \ldots, x_{n*}$, удовлетворяющая системе (1), т. е. обращающая каждое ее уравнение в численное равенство в результате замены $x_1 = x_{1*}, \ldots, x_n = x_{n*}$.

Поставим два вопроса. Во-первых, выясним, имеет ли система (1) хотя бы одно решение. Система называется *совместной*, если она имеет решение. Не всякая система совместна; например, система $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$ несовместна, потому что любая тройка чисел, удовлетворяющая первому уравнению, не удовлетворяет второму. Во-вторых, если система совместна, то надо найти все ее решения.

В общем случае ответы на поставленные два вопроса, как мы увидим, зависят от свойств матрицы A коэффициентов системы и свойств расширенной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n}b_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} \ldots a_{mn}b_m \end{pmatrix}. \tag{3}$$

250. Теорема Крамера. Рассмотрим частный случай системы (1), когда число уравнений системы равно числу ее неизвестных $m = n$, т. е. систему

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Определитель $D(A)$ называется *определителем системы* и обозначается $\Delta = D(A)$.

Теорема. *Если определитель Δ системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, определяемое формулами*

$$x_k = \delta_k/\Delta \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Здесь каждая из неизвестных величин представлена в виде дроби, у которой знаменателем является определитель системы, а числитель есть определитель, получающийся из определителя системы путем замены коэффициентов при определяемом неизвестном свободными членами системы:

$$\delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1k-1} b_1 a_{1k+1} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nk-1} b_n a_{nk+1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Доказательство. 1. Умножим обе части каждого из уравнений системы (4) соответственно на $A_{1k}, \ldots, A_{kn}$, т. е. на алгебраические дополнения элементов k-го столбца определителя системы Δ. Сложив полученные произведения, получим систему равенств (где $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$x_1(a_{11}A_{1k} + \ldots + a_{n1}A_{nk}) + \ldots + x_k(a_{1k}A_{1k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}) + \\ + \ldots + x_n(a_{1n}A_{1k} + \ldots + a_{nn}A_{nk}) = b_1A_{1k} + \ldots + b_nA_{nk}.$$

Согласно свойствам 6° и 7° определителей здесь равны нулю коэффициенты при всех неизвестных, кроме x_k; правая же часть представляет разложение определителя (6) по элементам k-го столбца; поэтому имеем

$$\Delta x_k = \delta_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Система линейных уравнений (7) выведена из системы (4) и является ее следствием.

2. Из (7) в свою очередь следуют равенства (4), так как по условию $\Delta \neq 0$. Для доказательства умножим каждое из уравнений системы (7) соответственно на $a_{s1}, \ldots, a_{sn}$ и, сложив, получим

$$\Delta(a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n) = b_1(A_{11}a_{s1} + \ldots + A_{1n}a_{sn}) + \ldots + \\ + b_s(A_{s1}a_{s1} + \ldots + A_{sn}a_{sn}) + \ldots + b_n(A_{n1}a_{s1} + \ldots + A_{nn}a_{sn}).$$

Согласно свойствам 6° и 7° определителей здесь равны нулю коэффициенты при всех b_k, за исключением b_s, коэффициент при котором равен Δ. После сокращения на Δ получим систему (1). Следовательно, при условии $\Delta \neq 0$ системы (4) и (7) эквивалентны.

3. Система (7) имеет единственное решение (5). Следовательно, при $\Delta \neq 0$ система (4) имеет единственное решение (5). Теорема доказана.

Теорема Крамера имеет большое теоретическое значение. Для практического нахождения решений линейных систем при условии теоремы Крамера и $n \geqslant 5$ можно рекомендовать другие методы.*

Следствия из теоремы Крамера. 1. Если система n линейных уравнений с n неизвестными несовместна или имеет несколько решений, то определитель такой системы равен нулю: $\Delta = 0$. Действительно, если бы $\Delta \neq 0$, то система была бы совместна и имела единственное решение.

2. *Если однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет решение, отличное от нулевого* (т. е. отличное от $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$), *то определитель такой системы равен нулю.* Действительно, однородная система всегда совместна — она всегда имеет нулевое решение. Если же она имеет решение, отличное от нулевого, то она имеет несколько решений, и согласно следствию 1 имеем $\Delta = 0$.

Равенство $\Delta = 0$ есть условие, необходимое для существования ненулевого решения у однородной системы n уравнений с n неизвестными. Действительно, из существования ненулевого решения вытекает, как только что показано, условие $\Delta = 0$.

251. Общий случай системы m уравнений с n неизвестными. Рассмотрим систему (1), где $m \gtrless n$.

Понятие ранга матрицы. Матрица A системы (1) содержит m строк и n столбцов. Путем вычеркивания некоторых строк и столбцов этой матрицы можно получать различные квадратные матрицы и соответствующие им определители, которые могут оказаться равными или неравными нулю. Предположим, что для данной матрицы A все такие определители, порядок которых выше r, равны нулю, но по крайней мере один из определителей порядка r отличен от нуля. Число r называется рангом матрицы A.

Рангом r матрицы A называется наивысший из порядков отличных от нуля определителей, которые можно составить из данной матрицы посредством вычеркивания части ее строк и столбцов. Для ранга матрицы A принято обозначение $r(A)$ или r. Из определения следует, что

$$r \leqslant m, \quad r \leqslant n. \tag{8}$$

---

* См. сноску на стр. 451.

Например, матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет ранг $r=2$, потому что все определители третьего порядка имеют две одинаковые строки и поэтому равны нулю, определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Не нарушая общности исследования, можно считать (и мы это будем делать), что отличен от нуля определитель, составленный из первых r строк и первых r столбцов матрицы A, именно

$$\Delta_r \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Если это не так, то можно достичь желаемого путем перестановки уравнений в системе (1), изменения нумерации неизвестных и соответствующего изменения индексов у коэффициентов системы и у свободных членов. Определитель Δ_r называется *главным определителем системы* (1).

А. Исследование случая $r = m$. В случае, когда ранг r матрицы коэффициентов системы (1) равен числу m уравнений, запишем систему в виде

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{aligned} \tag{10}$$

В системе (10) величины $x_{r+1}, \dots, x_n$ играют роль произвольных параметров, от которых зависят неизвестные $x_1, \dots, x_r$. В случае $n = r$ этих параметров не будет.

Определитель системы (10) отличен от нуля: $\Delta_r \neq 0$, потому что $r(A) = r$. Система (10), содержащая r уравнений с r неизвестными $x_1, \dots, x_r$ в соответствии с теоремой Крамера и формулой (5) имеет решение, которое можно представить в виде

$$x_k = \frac{1}{\Delta_r}[(b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n)A_{1k} + \dots + (b_r - \dots - a_{rn}x_n)A_{rk}],$$

или

$$x_k = \alpha_k + \alpha_{r+1k}x_{r+1} + \dots + \alpha_{nk}x_n \quad (k = 1, 2, \dots, r), \tag{11}$$

где $n - r$ параметров $x_{r+1}, \dots, x_n$ суть произвольные постоянные. Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. *Если $n = m = r$, то система* (1) *имеет единственное решение, определяемое равенствами* (5) (это теорема Крамера). *Если $n > m = r$, то система* (1) *имеет бесчисленное множество решений, определяемое равенствами* (11). (Это множество решений содержит $n - r$ параметров, которые могут принимать произвольные значения.)

Пример. Система $x - y - z = 0$, $x + y - z = 2$ равносильна системе $x - y = z$, $x + y = z + 2$. Ее решение есть $x = 1 + z$, $y = 1$, где z — произвольное число. Геометрически этому решению соответствует линия пересечения данных плоскостей.

Б. Исследование случая $r < m$. Рассмотрим систему (1) при условии — ранг матрицы r меньше числа уравнений системы (случай $r = m$ рассмотрен выше, случай $r > m$ невозможен).

Левые части системы (1) суть линейные функции (линейные формы) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &\equiv a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \ldots, \\ f_r(x_1, \ldots, x_n) &\equiv a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n, \\ f_p(x_1, \ldots, x_n) &\equiv a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pn}x_n \quad (p = r+1, \ldots, m). \end{aligned} \tag{12}$$

Лемма (о зависимости между левыми частями уравнений системы (1)). *Если* $r < m$ *и* $\Delta_r \neq 0$, *то линейные формы* (12) *связаны линейной зависимостью*

$$A_1 f_1 + \ldots + A_r f_r + A_p f_p = 0 \tag{13}$$

при $p = r + 1, \ldots, m$, *где* $A_p = \Delta_r \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные определители

$$c_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{p1} & \ldots & a_{pr} & a_{pk} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

в которых k — любое из чисел $1, 2, \ldots, n$; p — любое из чисел $r + 1, \ldots, m$. Они равны нулю, потому что при $k \leqslant r$ определитель c_k имеет два одинаковых столбца, а при $k > r$ он равен нулю, так как $r(A) = r$. Поэтому в результате разложения определителя c_k по элементам последнего столбца получим

$$a_{1k}A_1 + \ldots + a_{rk}A_r + a_{pk}A_p = 0, \tag{15}$$

где $A_1, \ldots, A_r$, A_p — алгебраические дополнения элементов последнего столбца определителя c_k; здесь $A_p = \Delta_r \neq 0$.

Составим линейную форму

$$A_1 f_1 + \ldots + A_r f_r + A_p f_p = \sum_{k=1}^{n} (A_1 a_{1k} + \ldots + A_r a_{rk} + A_p a_{pk}) x_k.$$

Эта линейная форма согласно равенствам (15) равна нулю тождественно относительно $x_1, \ldots, x_n$, т. е. имеет место тождество (13). Лемма доказана.

Рассмотрим определители вида

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} b_r \\ a_{p1} & \dots & a_{pr} b_p \end{vmatrix} \quad (p = r+1, \dots, m), \tag{16}$$

называемые *характеристическими определителями системы* (1). Система (1) имеет $m - r$ характеристических определителей.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *была совместной, необходимо и достаточно чтобы все характеристические определители системы были равны нулю*

$$\Delta_p = 0 \quad (p = r+1, \dots, m). \tag{17}$$

Доказательство необходимости. Пусть система (1) совместна и $x_{1*}, \dots, x_{n*}$ — ее решение; таким образом при $i = 1, \dots, m$ имеем

$$f_i(x_{1*}, \dots, x_{n*}) = 0. \tag{18}$$

Каждый характеристический определитель (16) можно представить в виде следующей суммы:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} a_{11} x_{1*} + \dots + a_{1n} x_{n*} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} a_{r1} x_{1*} + \dots + a_{2n} x_{n*} \\ a_{p1} & \dots & a_{pr} a_{p1} x_{1*} + \dots + a_{pn} x_{n*} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} a_{rk} \\ a_{p1} & \dots & a_{pr} a_{pk} \end{vmatrix} x_{k*}.$$

Определители, получившиеся в правой части этого равенства, не отличаются от определителей (14) и равны нулю, что установлено выше. Поэтому все $\Delta_p = 0$.

Доказательство достаточности. Пусть выполнено условие (17). Это условие, принимая во внимание (16), можно записать в развернутом виде

$$A_1 b_1 + \dots + A_r b_r + A_p b_p = 0, \tag{19}$$

где $A_1, \dots, A_r$, A_p — те же, что и в формуле (15), поскольку определители c_k и Δ_p отличаются лишь последними столбцами. Докажем, что при условии (17) система (1) сводится к подсистеме

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = b_1, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = b_r, \tag{20}$$

состоящей из первых r уравнений системы (1). Остальные $m - r$ уравнений системы (1) являются следствиями ее первых r уравнений и поэтому их можно отбросить. Действительно, всякое решение $x_{1*}, \dots, x_{n*}$ системы (20) удовлетворяет каждому из остальных $m - r$ уравнений системы (1), потому что из равенств (19) и (20) следует $A_1 f_1 + \dots + A_r f_r + A_p b_p = 0$. А отсюда и из (13)

следует, что $f_p(x_{1*}, \ldots, x_{n*}) = b_p$ при $p = r+1, \ldots, m$, что и доказывает наше утверждение относительно системы (20).

Система (20) совместна. Действительно, если (20) представить в виде (10), то, так же как и выше, получим решение в виде (11), где $r < m$. Теорема 2 доказана.

Вместе с тем доказаны следующие утверждения.

Теорема 3. *Если все* $\Delta_p = 0$ и $r = n < m$, *то система* (1) *имеет единственное решение, определяемое формулами теоремы Крамера применительно к системе* (20). *Если все* $\Delta_p = 0$, $r < n$ *и* $r < m$, *то система* (1) *имеет бесчисленное множество решений* (11), *зависящее от* $n - r$ *произвольных параметров* $x_{r+1}, \ldots, x_n$. *Если не все* $\Delta_p = 0$, *то система* (1) *несовместна.*

Теорема 4. *Для того чтобы система* (1) *имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы* $r = n$ *и все* $\Delta_p = 0$. *Если* $r < n$, *то система* (1) *либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений.*

Пример 1. $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$. Здесь $m = 2$, $n = 3$, $r = 1$. Система несовместна, потому что не все характеристические определители равны нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Пример 2. $x + y = 3$, $x - y = 1$, $3x + y = 7$. Здесь $m = 3$, $n = 2$, $r = 2$, $n < m$. Единственный характеристический определитель равен нулю. Третье уравнение есть следствие двух первых — если умножить первое уравнение на 2 и сложить со вторым уравнением, то получим третье уравнение. Система имеет единственное решение $x = 2$, $y = 1$.

Пример 3. $x - y = 2$, $3x - 3y = 6$. Здесь $m = n = 2$, $r = 1$. Характеристический определитель равен нулю, поэтому система совместна. Она сводится к одному (первому) уравнению и имеет бесчисленное множество решений $x = 2 + y$, где y — произвольное число.

Геометрическая трактовка примеров. В примере 1 уравнения определяют две плоскости в пространстве; эти плоскости не имеют общих точек. В примере 2 уравнения определяют на плоскости три прямые, пересекающиеся в одной точке. В примере 3 уравнения определяют две прямые, совпадающие всеми своими точками.

252. Однородные системы линейных уравнений. Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными

$$a_{i1}x_1 + a_{i2} + x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \,(i = 1,2, \ldots, m). \qquad (21)$$

Система (21) всегда совместна, так как имеет тривиальное решение $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Условие (17) для системы (21) всегда выполнено, так как $b_1 = \cdots = b_m = 0$.

Система (21) представляет частный случай системы (1) и поэтому теоремы 1, 2, 3 и 4 п. 251 справедливы и для системы (21). В частности, имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $m = n = r$, *то система* (21) *имеет только нулевое решение. Если* $r = m < n$, *то система* (21) *имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулами* (11).

Теорема 2. *Если* $r = n < m$, *то система* (21) *имеет только нулевое решение. Если* $r < n$, $r < m$, *то система* (21) *имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулами* (11).

Теорема 3. *Для того чтобы система* (21) *имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы* $r = n$, *т. е. чтобы ранг матрицы коэффициентов был равен числу неизвестных. Если* $r < n$, *то система имеет бесчисленное множество решений, зависящее от* $n - r$ *параметров.*

Из теоремы 3 следует, что 1) система (21) имеет ненулевое решение только в случае $r < n$, 2) если $m = n$, то система имеет ненулевое решение только в случае $D(A) = 0$.

Пример. Дана система

$$(3-\lambda)\,x + y = 0,\quad x + (3-\lambda)\,y = 0,$$

содержащая параметр λ. Требуется выяснить при каких значениях этого параметра система имеет решения, отличные от нулевого, и найти эти решения.

Для этого составим определитель данной системы

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

и найдем его корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 4$. При этих значениях параметра λ система сводится к одному уравнению и имеет согласно теореме 3 бесконечное множество ненулевых решений.

При $\lambda = 2$ имеем $x + y = 0$, поэтому все решения системы получим по формуле $y = -x$, где x — произвольное число. При $\lambda = 4$ имеем $x - y = 0$, поэтому $y = x$, где x — произвольное число.

Геометрическая интерпретация такова. Каждое из уравнений системы определяет (при каждом значении параметра) прямую в плоскости Oxy, проходящую через начало координат. Если $\lambda \neq 2$ и $\lambda \neq 4$, то эти прямые различны и пересекаются только в начале координат. Если $\lambda = 2$ или $\lambda = 4$, то эти прямые сливаются и представляют собой биссектрисы координатных углов. Координаты точек этих биссектрис есть решения данной системы при соответствующем значении параметра λ.

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., «Наука», 1968. 911 с. с ил.
2. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1966. 436 с. с ил.
3. Будак Б. М. и Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М., «Наука», 1965. 607 с. с ил.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1961. 406 с. с ил.
5. Гмурман В. Е. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., «Высшая школа», 1963. 238 с. с ил.
6. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, «Наука и техника», 1970. 571 с. с ил.
7. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. М., Физматгиз, 1958. 256 с. с ил.
8. Ильин В. А. и Позняк Э. Г. Основы математического анализа. М., «Наука», 1965. 571 с. с ил.
9. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1963. 546 с. с ил.
10. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. В 2-х т. М., «Наука», 1970. 1032 с. с ил.
11. Романовский П. И. Ряды Фурье, теория поля. М., Физматгиз, 1961. 303 с. с ил.
12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. В 3-х т. М., «Наука», 1967. 1457 с. с ил.
13. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. В 2-х т. М., ГИТТЛ, 1955. 904 с. с ил.
14. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. М. — Л., ОГИЗ, 1946. 231 с. с ил.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная величина вещественного числа 9
— — комплексного числа 94
Абсцисса точки 115, 149
Алгебраическое дополнение 449
Аналитическое выражение 12
Аппликата точки 149
Аргумент комплексного числа 94
— промежуточный 52, 188
— функции 11, 181
Арифметическое пространство 179
Асимптота 75
Асимптоты гиперболы 140

Бесконечно большая 21
— малая 17
— — высшего порядка 31
— малые одного порядка 31
— — эквивалентные 31
Бесконечный ряд — см. Ряд
Бесконечность 22
Бета-функция 262
Бином Ньютона 92

Вектор 110, 148
— единичный 149
Векторы коллинеарные 111, 149
— компланарные 159
— ортогональные 154, 155
— противоположные 111
Векторная линия 303
— трубка 303
— функция 301, 303
— — скалярного аргумента 301
Вероятность 419, 421
— геометрическая 420
— условная 423
Верхняя граница числового множества 196
Винтовая линия 198
Вронскиан 400
Выпуклость и вогнутость 73

Гамма-функция 261
Гипербола 138
— равносторонняя 119, 140
Гиперболоид двухполостной 175

— однополостной 174
Главная часть бесконечно малой 85, 194
Годограф вектора 301
Градиент 299, 301, 340
Граница области 180
График функции 13

Диаметр области 268
Дивергенция вектора 328, 329, 341
Директрисы кривых 142
Дисперсия 429, 437
Дифференциал функции 84, 90
— независимой переменной 84
— полный 193, 200
— частный 193
Дифференциальная функция распределения 435
Дифференциальное уравнение 30, 225—227, 386
— — Бесселя 386, 414
— — в полных дифференциалах 394
— — гармонического осциллятора 404
— — диффузии (уравнение теплопроводности) 344
— — допускающее понижение порядка 396, 397
— — Лапласа 343, 345, 386
— — линейное 386
— — — однородное 398, 403
— — — неоднородное 406, 407
— — — первого порядка 393
— — — порядка n 397
— — обыкновенное 386
— — с разделяющимися переменными 392
— — с частными производными 386
— — Эйри 413
Дифференцирование функции 49
— неявной функции 189, 190
— обратной функции 53
— сложной функции 52, 187, 188
— степенного ряда 369
— функции, заданной параметрически 53
— функционального ряда 366
Длина вектора 151
— дуги 250
— отрезка касательной 81
— — нормали 81
Достаточное условие 66
— — выпуклости (вогнутости) 74
— — возрастания функции 66, 67
— — интегрируемости функции 231, 271, 276, 307, 323
— — монотонности функции 67
— — непрерывности функции 50
— — равномерной сходимости ряда 363
— — существования предела 24, 26, 34, 35, 37
— — сходимости несобственного интеграла 258, 260
— — — ряда 351—363
— — экстремума 70, 71, 93, 202
Дробная рациональная функция 100

Задача Коши 388, 390, 395
Закон больших чисел 439
— действующих масс 225
— распределения вероятностей 427
— — — биномиальный 432
— — — нормальный 436, 438
— Ньютона 388

Интеграл двойной 269, 271
— зависящий от параметра 262, 265
— криволинейный 304, 306
— неопределенный 212
— несобственный 255, 259
— определенный 229, 230
— поверхностный 321, 322, 323
— повторный 265, 275, 287
— с переменным верхним пределом 239
— тройной 286
— Эйлера — Пуассона 279
Интегральная кривая 387
— сумма 230, 271, 286
— функция распределения 433
Интегрирование функций 211, 218—225, 374
— дифференциальных уравнений 387
— иррациональных выражений 220
— неравенства почленное 237
— по частям 216, 241
— правильных рациональных дробей 220
— простейших дробей 219
— путем замены переменных 215, 242, 284, 293
— рациональных функций 218
— степенных рядов 369
— тригонометрических выражений 222
— функциональных рядов почленное 365
Интервал сходимости степенного ряда 368

Каноническое уравнение линий второго порядка 137, 139, 141
— — прямой 170
Касательная к кривой 48, 80, 197
— плоскость к поверхности 198
Комплексно-сопряженные числа 97
Комплексная функция 95

Конус второго порядка 178
Корень из комплексного числа 97
— многочлена кратный 99
— — простой 99
— уравнения 81
— функции 59, 81
Координаты вектора 151
— точки 110
— — декартовы 112, 114, 149
— — криволинейные 281, 289
— — полярные 116
— — сферические 161
— — цилиндрические 160
— центра тяжести 253, 254, 285, 294
Координатная линия 280, 289
— поверхность 289
Коэффициенты Ламе 290
— Тейлора 370
— Фурье 377
Кривая вогнутая (и выпуклая) 73
— Гаусса 416
— гладкая 197, 250, 251
— распределения 436
Кривизна в точке 78
— средняя 76
Кривизны радиус 80
— окружность 79
— центр 80
Криволинейная трапеция 229
Критерий 66
— Больцано—Коши 36, 37, 351

Линейная функция — см. Функция линейная
Линейное дифференциальное уравнение 387, 393, 397—408
Линии второго порядка 135
Линия алгебраическая 124
— уровня 297
Логарифм десятичный 29
— комплексного аргумента 96
— натуральный 29

Мажорантный ряд — см. Ряд мажорантный
Максимум (и минимум) функции 68
— — нескольких переменных 201
Масса стержня 228, 304
— пластины 268, 320
Математическая величина 8, 10
Математическое ожидание 427, 437
Матрица 105, 445
— транспонированная 447
Метод Бернулли 393
— вариации 394
— наименьших квадратов 207
— неопределенных коэффициентов 103, 217
— статистических испытаний 246
Минор элемента определителя 449
Многочлен — см. Полином
Множества эквивалентные 6
Множество 5, 197
— пустое 5
— ограниченное 185
— открытое 180
— связное 180
— счетное 7
— упорядоченное 7
Модуль вектора 110
— вещественного числа 9
— комплексного числа 94
— перехода M 30
Моменты инерции 285, 294
— статические 252—254, 285, 294
Монотонная переменная 33

Набла-вектор 339
Направленный отрезок оси 112
Направляющая цилиндрической поверхности 163
Направляющие косинусы 152, 169, 325
Натуральное число 5
Начало координат 112, 115, 116, 149
Независимая переменная 11, 181
Необходимое условие 66
— — сходимости ряда 350
— — относительного экстремума 205
— — экстремума функции 69, 202
Неопределенности 63—65
Непрерывность функции в области 183
— — в промежутке 39
— — в точке 37, 183
— — односторонняя 39
— — равномерная 42, 185
Неравенство Бесселя 384
— Чебышева 441
Норма функции 380
Нормаль к кривой 80
— к поверхности 198

Область 180
— допустимых значений 12
— замкнутая 180
— изменения переменной 11
— — функции 12, 13, 182
— ограниченная 185
— односвязная (и многосвязная) 312, 316
— определения функции 12, 13, 181
— сходимости ряда 361, 368
Объем тела 249
— — вращения 249
— цилиндрического бруса 270
Огибающая семейства кривых 392
Окрестность точки 10, 179
— бесконечно удаленной точки 24
Оператор 13

— Лапласа 339, 343
— линейный дифференциальный 398
Определитель 105, 106, 108, 446
— Вронского 400
— Якоби 191
— функциональный 191, 282, 292
Ордината точки 115, 149
Орт 149
Ортогональные
— полиномы 381, 382
— системы функций 376, 380
— функции 376, 380
Оси эллипса 138
Основная теорема алгебры 98
Остаток ряда 349, 362
Остаточный член 90
— — в форме Лагранжа 91
Ось 112
— вещественная гиперболы 140
— полярная 116
— числовая 112
Отображение 13, 95, 283
Оценка остатка ряда 356
— погрешности 88, 196

Парабола 141
Параболоид гиперболический 176
— эллиптический 175
Параметр 10, 53
Параметрические уравнения линии 164, 197
Первообразная функция — см. Функция первообразная
Переменная 11
— интегрирования 212
Пересечение множеств 6
Перестановки 104, 446
Плоскость в пространстве 165
Площадь криволинейного сектора 248
— криволинейной трапеции 151, 247
— поверхности вращения 251
— треугольника 67
— шарового пояса 252
Поверхность алгебраическая 164
— гладкая 199
— двусторонняя 322
— линейчатая 177
— цилиндрическая 163
— уровня 297
Погрешность абсолютная 87, 196
— — предельная 87, 196
— относительная 196
Подкасательная 81
Подмножество 6
Поднормаль 81
Подстановка 215
Подпоследовательность 349
Поле 296
— безвихревое 337
— векторное 296, 303
— гармоническое 338
— градиентов 319, 320, 337
— направлений 390
— потенциальное 319, 320
— силовое 304
— скалярное 296, 27
— соленоидальное 330
— стационарное 296
— точечного источника 319
— тяготения 297, 320
— центральное 320
— электростатическое 319, 331
Полином 13, 97
Полиномы Бернштейна 210
— Лежандра 382
— обобщенные 382
— ортогональные 381, 382
— Тейлора 89
— Чебышева 382
Полная группа событий 419
Полюс 116
Порядок алгебраической линии 124
Последовательность 7
— числовая 8, 346
Потенциал поля 319, 320
Поток вектора 324
Правила дифференцирования 51, 52, 53
Правило Лейбница 263
— Лопиталя 63—64
Предел последовательности 24, 32
— функции 23, 24, 32, 182
— — односторонний 23
Предельная точка множества — см. Точка предельная
Преобразование координат 116—120, 161, 162
Приближение функции 206, 209, 383
Признак 66
— Вейерштрасса 363
— Даламбера 351
— Коши 258, 354
— Лейбница 356
— сравнения 257, 260, 352
Принцип сходимости ряда 350
Приращение аргумента 38
— функции 38, 85
— — полное 184, 187, 194
— — частное 185
Проекция вектора 113
— точки 113
Производная 47, 49
— векторной функции скалярного аргумента 302
— высшего порядка 57
— комплексной функции вещественного аргумента 95
— логарифмическая 55
— логарифмической функции 55

— локальная 188
— обратной функции 53
— — тригонометрической функции 57
— интеграла по верхнему пределу 239
— — по параметру 263, 264
— неявной функции 189, 190, 191
— показательной функции 55
— полная 188
— по направлению 298
— постоянной 50
— сложной функции 52, 188
— степенной функции 56
— степенно-показательной функции 56
— тригонометрической функции 50, 54
— частная 186, 192
Произведение вектора на число 112
— векторов векторное 156
— — скалярное 153
— — смешанное 158
— матриц 451
— определителей 451
— функций скалярное 379
Промежуток 10
— замкнутый 10
— открытый 10
Пространство арифметическое 179
— эвклидово 179
Прямая в пространстве 169
Пучок прямых 128

Работа вектора 304, 318
Равенство векторов 111
— комплексных чисел 94
— матриц 451
— многочленов 97
— множеств 6
Радиус-вектор 11, 305
Радиус кривизны 80
— полярный 116
— сходимости степенного ряда 368
Радиусы фокальные 136, 139, 141
Разложение вектора 151
— определителя 107, 449
— рациональной дроби 101
— функции в степенной ряд 370, 372
— — в ряд Фурье 376
Размещения 104
Разность векторов 111
— множеств 6
Ранг матрицы 455
Раскрытие неопределенностей 63, 375
Решение дифференциального уравнения 31, 387
— — — общее 387, 391, 396
— — — особое 391, 392
— — — частное 387, 391, 396
— системы дифференциальных уравнений 408, 409, 410
— — уравнений 453
Ротор вектора 334, 335
Ряд 346, 361
— абсолютно сходящийся 357
— биномиальный 373
— гармонический 350
— геометрический 347
— знакочередующийся 355
— мажорантный 363
— Маклорена 372
— равномерно сходящийся 362
— расходящийся 347
— с комплексными членами 360
— с положительными членами 351
— степенной 367, 369
— сходящийся 347
— — в среднем 384
— Тейлора 370
— тригонометрический 375
— условно сходящийся 358
— функциональный 361
— Фурье 377
— — обобщенный 382
— числовой 346

Связка плоскостей 167
Символика Гамильтона 339, 340
Система дифференциальных уравнений 408—410
— координат 110
— — декартова 115, 149
— — криволинейная 281, 289
— — ортогональная 281, 289
— — полярная 116
— — сферическая 161, 293
— — цилиндрическая 160, 292
— уравнений 453, 455, 459
Скалярная величина 111, 296
Скалярное поле 296
— произведение векторов 153
— — функций 379
Случайная величина 416, 427
— — дискретная 416, 427
— — непрерывная 416, 433
Событие 416
— достоверное 416
— невозможное 416
— случайное 416
События зависимые 423
— независимые 423, 424
— несовместные 419
— противоположные 422
— равновозможные 419
Соединения 103
Соответствие 12
—взаимно-однозначное 6, 110, 112, 150

Сочетания 103
Способ замены переменной 215, 241
— интегрирования по частям 216, 241
— Ньютона 83
— хорд 82
— Эйлера 410, 412
Среднее значение случайной величины 428
— — функции 238, 273
— квадратичное уклонение 383, 437
Степень многочлена 14
— однородной функции 191
Сумма векторов 111
— множеств 6
— ряда 347, 362
— — частичная 346, 361
— функций 19
Сходимость несобственного интеграла 255, 259
— — — абсолютная 256, 260
— ряда 347, 361
— — абсолютная 357
— — равномерная 362
— — условная 358
— — Фурье в среднем 384

Таблица интегралов 213
— производных 54
Теорема Барроу 239
— Безу 98
— Бернулли 442
— Больцано—Коши 35
— Вейерштрасса 41, 185, 209
— Дирихле 378
— Кантора 43, 185
— Коши 42, 62, 185
— Крамера 109, 453
— Лагранжа 60
— Лапласа 444
— Лейбница 356
— Лопиталя 63
— Муавра—Лапласа 443
— Ролля 59
— существования предела 34, 35
— — двойного интеграла 271
— — неопределенного интеграла 211, 240
— — несобственного интеграла 256, 260
— — определенного интеграла 231
— Ферма 58
— Чебышева 441
— Эйлера 191
Теоремы Абеля 367, 369
— Гульдина 253, 254
— о пределах основные 25
Теория вероятностей 416, 417
Термодинамическая поверхность 177
Точка множества внутренняя 180
— — предельная (точка сгущения) 19, 180
— области граничная 180
— n-мерного пространства 179
— перегиба 73
— разрыва функции 37, 39
— сходимости ряда 361
— экстремума 68

Угловой коэффициент прямой 48
— — касательной 48
Угол между векторами 155
— — плоскостями 168
— — прямыми 130, 171
— — прямой и плоскостью 172
— наклона прямой 125
Уравнение алгебраической линии 124
— — поверхности 164
— гиперболы 139
— гиперболоида двухполостного 175
— — однополостного 174
— замкнутости 384
— касательной к кривой 80, 197
— — плоскости к поверхности 199
— конуса второго порядка 178
— линии 123
— — второго порядка 135
— окружности 124
— параболы 141
— параболоида гиперболического 176
— — эллиптического 175
— плоскости 165—168
— поверхности 164
— прямой 125—129, 133
— сферы 164
— теплопроводности 344
— эллипса 137
— эллипсоида 173
Уравнения прямой в пространстве 169—171
Условие необходимое и достаточное 66
— коллинеарности векторов 149, 153
— компланарности векторов 159
— ортогональности векторов 155
— — прямых 171
— — прямой и плоскости 172
— существования предела функции 35
— — — последовательности 37
— сходимости ряда 351

Фокусы линий второго порядка 136, 138, 141
Формула 102
— Бейеса 426
— Бернулли 431

— Грина 312
— конечных приращений Лагранжа 61
— — — обобщенная 187
— Лагранжа интерполяционная 207
— Лейбница 58
— Лиувилля—Остроградского 400
— Маклорена 91
— Ньютона—Лейбница 232, 240, 241
— Остроградского 328
— парабол 244
— полной вероятности 426
— прямоугольников 244
— Стокса 333, 334
— Тейлора 89, 201
— трапеций 244
Формулы Эйлера 95
Фундаментальная система решений 402
Функционал 13
Функции линейно-зависимые 399
— линейно-независимые 399—400
— обратные тригонометрические 15
— основные элементарные 13
— тригонометрические 15
— элементарные 13, 16
Функция 11, 13, 181, 182
— алгебраическая 16
— бесконечно большая 21
— — малая 17
— Бесселя 414, 415
— возрастающая 33
— двух переменных 181
— дифференцируемая 49
— дробная рациональная 14, 100
— заданная аналитически 12
— — параметрически 53
— интегрируемая 231, 271, 286
— — в элементарных функциях 220
— комплексного переменного 95
— Лагранжа 205
— Лапласа 444
— логарифмическая 15
— линейная 14
— нескольких переменных 182
— многозначная 13
— монотонная 33
— натурального аргумента 13
— неограниченная 258
— непрерывная в точке 37, 183
— — в промежутке 39
— — в области 183
— непрерывно дифференцируемая 58
— — — несколько переменных 187
— нечетная 77
— неявная 189
— обратная 44
— ограниченная 20
— однозначная 13
— однородная 191
— первообразная 211
— подынтегральная 212
— показательная 15
— — комплексного аргумента 96
— равномерно непрерывная 42, 185
— сложная 15
— состояния 318
— степенная 14
— трансцендентная 16
— убывающая 33
— целая рациональная 13, 97
— четная 77
— элементарная 13, 16

Характеристическое уравнение 403, 411

Центр кривизны 80
— тяжести 252, 253, 254, 285, 294
Цилиндрический брус 269
Цилиндры второго порядка 178
Циркуляция вектора 318

Частость события 421
Частота события 421
Число вещественное 8
— e 29
— комплексное 94
Численные методы 243
Числовая ось 112

Эвольвента 80
Эволюта 80
Эксцентриситет гиперболы 140
— эллипса 138
Экстремум функции 68
— — нескольких переменных 201
— — относительный 204
Элемент дуги 289
— матрицы 445
— множества 5
— объема 290, 291
— площади 282
Эллипс 136
Эллипсоид 173
Эмпирические формулы 207, 208
Энтропия 318

Якобиан 191

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
12	12 сверху	$[0, 4]$	$[0, 4)$
21	11 снизу	а если	если
33	17 снизу	$y_n = q$	$y_n = q^n$
44	8 снизу	(34)	(8)
65	11 снизу	$\infty^\circ \cdot 0$	$\infty\, 0$
96	2 снизу	$e^{z \operatorname{Ln} z}$	$e^{z_1 \operatorname{Ln} z}$
130	6 сверху	$k_1 - k_2$	$k_2 - k_1$
153	9 снизу	нулевых	непулевых
173	2 сверху	(5)	(6)
238	3 сверху	$q \int_a^b f(x)\, dx$	$q(b-a)$
277	7 снизу	$\int_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=1+\sqrt{1-y^2}}$	$\int_{x=1-\sqrt{1-y^2}}^{x=1+\sqrt{1-y^2}}$
301	20 сверху	$\frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,\mathbf{i}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathbf{i} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathbf{i}$
343	12 сверху	$\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta}$
374	16 снизу	$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$	$(-1 < x < 1)$
383	7 сверху	имеющий	тот, который имеет
	9 сверху	т. е. достигающий	когда достигает
395	11 сверху	y^{n-1}	$y^{(n-1)}$
405	21 сверху	(29)	(28)
414	2 сверху	x	x^{3k}
455	3 сверху	(1)	(4)

Заказ 114

1 р. 09 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1973